

**Appariement de l'actif et du passif  
d'un assureur vie par l'utilisation de  
produits dérivés**

**par Nathalie Laporte**

Cahier de recherche 01-10

Décembre 2001

ISSN : 1206-3290

---

*L'auteure remercie les personnes qui ont procédé à l'évaluation et à la révision du texte et  
Georges Dionne qui a dirigé la recherche.*

# **Appariement de l'actif et du passif d'un assureur vie par l'utilisation de produits dérivés**

**par Nathalie Laporte**

Nathalie Laporte a réalisé cette recherche dans le cadre d'un mémoire de maîtrise en sciences de la gestion à l'École des HEC de Montréal. Elle est maintenant F.S.A. (Fellow of the Society of Actuaries) et F.I.C.A. (Fellow de l'Institut Canadien des Actuaires).

---

*Copyright © 2001. École des Hautes Études Commerciales (HEC) Montréal.  
Tous droits réservés pour tous pays. Toute traduction ou toute reproduction sous quelque forme que ce soit est interdite. Les textes publiés dans la série des Cahiers de recherche HEC n'engagent que la responsabilité de leurs auteurs.*

# **Appariement de l'actif et du passif d'un assureur vie par l'utilisation de produits dérivés**

par Nathalie Laporte

## **Résumé**

Un des principaux risques supportés par les assureurs est celui de la variation des taux d'intérêt. La théorie financière affirme que l'utilisation de produits dérivés devrait permettre de couvrir à meilleur coût ce risque comparativement aux obligations traditionnellement utilisées à cette fin. Cet article compare donc l'appariement des durées de la ligne d'affaires principale d'un important assureur vie canadien à l'aide de contrats à terme contre l'appariement traditionnel.

*Mots clés* : Produit dérivé, assureur, obligation, appariement, couverture.

## **Abstract**

The interest rate risk is one of the most important risk that an insurer must bear. The financial theory asserts that the use of derivative instruments should hedge this risk at a better cost than the bonds usually used to this end. This study compares the duration matching of the principal line of business of one important Canadian insurer with futures to the usual matching with bonds.

*Keywords* : Future, insurer, bond, matching, hedging.

## **INTRODUCTION**

Le contexte économique des dernières années a fait en sorte que plusieurs des risques supportés par les compagnies d'assurance sont devenus de plus en plus importants. Par conséquent, la gestion des risques a pris davantage d'importance dans les marchés financiers.

Un des principaux risques supportés par les assureurs vie est celui de la variation des taux d'intérêt. Nous avons remarqué que, même si les contrats à terme sont couramment utilisés par les institutions bancaires pour gérer ce risque, l'utilisation de ces contrats par les compagnies d'assurance est encore limitée.

Ainsi, comme à priori l'utilisation de produits dérivés devrait permettre de couvrir à meilleur coût le risque de taux d'intérêt, nous allons analyser cette stratégie de couverture pour fins d'appariement des durées de l'actif et du passif du bilan d'un assureur vie. Cet article compare donc l'appariement des durées de la ligne d'affaire principale d'un important assureur vie canadien à l'aide de CGB contre l'appariement traditionnel effectué en transigeant plutôt des obligations. Notre étude couvre la période du 1<sup>er</sup> janvier 1997 au 31 décembre 1998.

## **GESTION DE RISQUE**

### **Motivation**

Les institutions financières existent pour améliorer l'efficacité des marchés financiers. En effet, les clients achètent leurs services en raison de leur connaissance du marché, de leur efficacité pour compléter des transactions et de leur capacité à remplir leurs obligations contractuelles. De plus, les compagnies d'assurance acceptent délibérément différents risques actuariels et financiers. Chaque assureur est donc exposé de façon différente à plusieurs risques et ce, en fonction de la composition de ses affaires.

Selon Santomero and Babbel (1997), le domaine de la gestion des risques financiers est celui qui a le plus évolué au cours de la dernière décennie chez les assureurs. Ils attribuent cela en grande partie au fait que le risque de taux d'intérêt a été la source de variation la plus importante des titres à revenus fixes durant les vingt dernières années. Comme la grande majorité des actifs des assureurs vie sont constitués de tels titres, les assureurs ont reconnu l'urgence d'utiliser des outils de gestion pour gérer ce risque de taux d'intérêt.

De plus, les assureurs vie supportent également un risque important de taux d'intérêt au niveau de leurs passifs. Le principal outil utilisé par les assureurs pour gérer ce risque est l'appariement de l'actif et du passif. Cette importance accrue de la gestion actif/passif se dénote, entre autres, dans deux sondages effectués par Lamm-Tennant (1995) et Lamm-Tennant et Gattis (1996). En effet, ces études classent la gestion actif/passif comme un des facteurs qui influence le plus la politique d'investissement des assureurs. Toutefois, ces sondages mentionnent que les techniques utilisées par les assureurs pour gérer le risque de taux d'intérêt sont très diversifiées, allant des plus naïves aux plus sophistiquées.

## La gestion du risque de désappariement de l'actif/passif

Lamm-Tennant (1995) a relevé sept techniques d'appariement utilisées par les assureurs :

1. immunisation à l'aide de contrats à terme sur titres à revenus fixes ;
2. immunisation à l'aide de contrats à terme sur indices boursiers ;
3. *internal coupon stripping* ;
4. immunisation à l'aide de swaps de taux d'intérêt ;
5. segmentation des actifs et passifs de l'assureur ;
6. projection de flux monétaires selon différents scénarios économiques ;
7. immunisation par l'appariement des durées.

Comme cette étude traite de la dernière technique, nous la détaillons davantage ci-dessous.

### *Immunitisation*

L'immunisation signifie l'application d'une stratégie destinée à offrir une couverture contre une évolution non anticipée des taux d'intérêt (Little 1986). Pour un assureur, l'appariement de son actif et de son passif a comme objectif d'immuniser son bilan.

Tel que mentionné par Panning (1993), l'appariement de l'actif et du passif d'un assureur repose sur deux principes fondamentaux :

- ♦ la valeur économique réelle de l'assureur est égale à la valeur présente de ses entrées de fonds (provenant de ses actifs) moins la valeur présente de ses sorties de fonds (provenant de son passif);
- ♦ l'objectif principal de la gestion actif/passif est de gérer la sensibilité de la valeur économique réelle de la firme aux variations des taux d'intérêt.

En accord avec ces principes fondamentaux, Smith (1993) définit la valeur d'une compagnie d'assurance comme suit :

$$V_j = \sum_{t=0}^T \frac{E(NCF_{jt})}{(1 + \bar{r}_{jt})}$$

Par la suite, il définit la sensibilité de la valeur de la compagnie d'assurance à une variation de taux d'intérêt comme suit :

$$\frac{dV}{dR} = \frac{L \cdot D(L) - A \cdot D(A)}{1 + R},$$

où :

$V_j$  : valeur de la compagnie d'assurance  $j$  ;

$NCF_{jt}$ :	<i>cash-flow</i> net de l'assureur $j$ au temps $t$ ;
$\bar{r}_{jt}$ :	taux de rendement requis ;
$L$ :	valeur marchande du passif de l'assureur ;
$A$ :	valeur marchande de l'actif de l'assureur ;
$D(L)$ :	durée du passif de l'assureur ;
$D(A)$ :	durée de l'actif de l'assureur ;
$R$ :	taux de rendement du marché.

Une des techniques traditionnelles pour un assureur qui veut immuniser sa valeur économique relativement à une variation de taux d'intérêt est donc de faire en sorte que la durée pondérée par la valeur marchande de ses entrées et de ses sorties de fonds (dollars-durée) soient les mêmes. En appliquant ce concept d'immunisation, le gestionnaire a comme objectif que son portefeuille d'actifs rapporte au moins le taux d'intérêt promis au client (passif).

Néanmoins, selon Fogler (1984), plusieurs facteurs peuvent faire en sorte que le taux d'intérêt gagné soit quand même moindre que celui promis. Plusieurs articles dans la littérature financière traitent donc des limites d'utilisation d'un modèle de durée aux fins d'immunisation contre les variations de taux d'intérêt. Les assureurs sont conscients des limites afférentes à cette méthode mais l'utilisent principalement en raison de ses facilités d'application. Par contre, ils utilisent également d'autres méthodes d'appariement pour contrer les limites inhérentes à l'appariement des durées.

### *Durée*

Macauley (1938) fut le premier à introduire une mesure d'exposition au risque en développant le concept de durée (duration). Ce concept a été défini afin de pouvoir comparer la sensibilité du prix d'obligations possédant des caractéristiques différentes (échéance, coupons, ...) à des variations de taux d'intérêt. La formule originale de durée définie par Macauley est la suivante :

$$D = \left[ \sum_{t=1}^T \frac{CF_t \cdot t}{(1+y)^t} \right] \cdot \frac{1}{P}$$

où :

$CF_t$ :	flux monétaire du portefeuille au temps $t$ ;
$T$ :	nombre de période avant l'échéance de l'obligation ;
$y$ :	taux de rendement requis par le marché ; et
$P$	prix d'une obligation exprimé comme suit :

$$P = \left[ \sum_{t=1}^T \frac{CF_t}{(1+y)^t} \right].$$

Afin d'avoir une meilleure notion de sensibilité qui tienne compte du niveau de taux d'intérêt, une version modifiée de la durée a été développée. Cette mesure est définie comme la sensibilité

de la variation relative de sa valeur marchande par rapport à une variation du taux de rendement requis par le marché. La durée modifiée se calcule donc ainsi :

$$\text{durée modifiée} = \frac{-\partial P}{\partial y} \cdot \frac{1}{P} \approx \frac{\Delta P / P}{\Delta y}$$

où :

$P$  : valeur marchande de l'instrument financier ;

$\Delta y$  : variation du taux de rendement requis.

Lorsque la valeur marchande d'un instrument financier peut être exprimée par la valeur présente de ses flux monétaires futurs et que le taux de rendement utilisé est le taux de rendement à terme, l'expression bien connue pour  $\frac{\partial P}{\partial y}$  est la suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-\sum CF_t \cdot t}{(1+y)^{t+1}}$$

Depuis l'introduction de cette notion de durée modifiée, les gestionnaires de plusieurs domaines de pratique l'ont utilisée pour fins d'application de stratégies d'immunisation contre les changements parallèles de la structure à terme des taux d'intérêt. Une limite inhérente à cette définition de durée modifiée est qu'elle suppose des flux monétaires fixes dans le temps. Si les flux monétaires ne sont pas fixes, la formule précédente n'est pas appropriée. Dans une telle situation, cette dernière formule doit être étendue ou ajustée pour incorporer la sensibilité des flux monétaires aux taux d'intérêt comme suit :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-\sum CF_t \cdot t}{(1+y)^{t+1}} + \frac{\frac{\partial CF_t}{\partial y}}{(1+y)^t}$$

Par conséquent, cette définition de durée devrait être utilisée si les entrées et/ou les sorties de fonds d'un assureur sont fonction des taux d'intérêt.

Encore aujourd'hui, la définition de durée couramment utilisée est celle de Macauley modifiée. Selon Santomero et Babbel (1997), cette définition est appropriée pour les actifs d'un assureur vie, puisqu'ils sont généralement composés en grande partie d'actifs financiers traditionnels.

Mentionnons toutefois que le calcul de la durée peut s'avérer problématique au niveau des biens immobiliers et des actions, s'il en est, dans le portefeuille de l'assureur.

De plus, si l'assureur évalue ses durées selon différents scénarios de taux d'intérêt, cela réussit à atténuer considérablement les désavantages de cette technique. C'est le cas au Canada, où un assureur est obligé légalement de faire des simulations de son bilan selon de multiples scénarios de taux d'intérêt.

L'approche la plus courante pour gérer l'appariement des durées est d'utiliser des actifs financiers traditionnels (Babel, 1993). Ce type d'appariement peut toutefois nécessiter plusieurs transactions et donc des coûts afférents relativement élevés. Cummins, Phillips and Smith (1997) analysent l'utilisation des produits dérivés par les assureurs et suggèrent que leur utilisation présente habituellement des frais de transactions beaucoup moins élevés, en plus d'offrir davantage de flexibilité dans la gestion. Nous avons donc décidé de faire une étude de comparaison de ces deux méthodes d'appariement.

## **COMPARAISON DE DEUX MÉTHODES D'APPARIEMENT DE L'ACTIF ET DU PASSIF D'UN IMPORTANT ASSUREUR VIE CANADIEN**

### **Base de données**

Nous allons effectuer notre étude pour le segment d'affaire principal d'un important assureur vie canadien. Notre période d'étude débute le 1<sup>er</sup> janvier 1997 et sa durée est de 2 ans. Le portefeuille d'affaires utilisé est le portefeuille «fermé» de l'assureur au 1<sup>er</sup> janvier 1997, c'est-à-dire que nous ne tenons pas compte des affaires souscrites après cette date. De plus, nous posons comme hypothèse que les flux financiers réalisés sur la période d'étude sont ceux anticipés par l'assureur pour la production des états financiers au 31 décembre 1996. Les seuls ajustements effectués sont donc ceux pour tenir compte de l'impact des taux d'intérêt observés et des transactions d'appariement. Nous vérifions la position d'appariement à tous les mois et nous «relançons» totalement le portefeuille, si nécessaire.

### **Méthode d'appariement**

Tel que défini précédemment, si l'assureur veut immuniser sa valeur relativement à une variation de taux d'intérêt, il doit faire en sorte que la durée pondérée par la valeur marchande de ses entrées et de ses sorties de fonds (dollars-durée) soient les mêmes. De plus, cette méthode d'appariement des durées à partir du concept de dollars-durée est également celle qui est suggérée par Fabozzi (1999).

### **Définition de durée**

Comme le portefeuille d'actifs du segment visé est composé à 92% d'obligations, nous utilisons pour les actifs la durée de MacCauley modifiée. Cette formule est celle qui est couramment utilisée dans l'industrie. Pour les passifs, étant donné les clauses présentes dans les produits de l'assureur (principalement les clauses d'ajustements des valeurs marchandes lors des règlements), la durée de MacCaulay modifiée est également appropriée.

Pour ce qui est d'un contrat à terme, sa durée est la durée de MacCaulay modifiée de l'obligation sous-jacente la moins chère à livrer. Nous poserons comme hypothèse que l'obligation qui sera la moins chère à livrer à la date d'échéance du contrat à terme est celle qui est la moins chère à livrer à la date de transaction initiale du contrat à terme.



## **Produits dérivés utilisés aux fins d'appariement**

### *Sélection des contrats à terme boursiers sur titres à revenus fixes*

Une étude de Louis Gagnon (1996) démontre la supériorité du contrat à terme sur acceptations bancaires canadiennes de trois mois (BAX) et du contrat à terme sur obligations du gouvernement du Canada de dix ans (CGB) (vs contrats à terme américains) afin de couvrir l'exposition au risque de taux d'intérêt au Canada. Une mise à jour de cette étude par Claude Lapointe (1999) confirme également cette supériorité.

Nous proposons donc l'utilisation des contrats à terme boursiers canadiens comme produits dérivés. Étant donné la composition du portefeuille de l'assureur, nous utilisons les CGB vendus à la Bourse de Montréal.

### *Caractéristiques des CGB*

Ces contrats sont négociés sur le plancher de la Bourse de Montréal et viennent à échéance quatre fois par année soit en mars, juin, septembre et décembre. La valeur nominale d'un CGB est de 100 000 \$ par contrat et l'obligation de référence est l'obligation du gouvernement du Canada portant des coupons au taux annuel de 9 %<sup>1</sup>. De plus, si le CGB est conservé jusqu'à échéance, il y a effectivement livraison d'une obligation admissible.

### *Prix des contrats à terme*

Nous utilisons comme prix de transaction des CGB les cours de clôture quotidiens de ces titres extraits des données historiques que l'on retrouve sur le site Internet de la Bourse de Montréal. Toutefois, comme les caractéristiques des obligations livrables peuvent différer de celles de l'obligation de référence, le prix facturé lors du règlement est le prix du contrat à terme multiplié par le facteur de concordance de l'obligation livrée.

### *Roulement*

Comme il n'y a habituellement pas de correspondance parfaite entre la période de couverture désirée et l'échéance des contrats à terme disponibles sur le marché boursier, deux techniques de couverture sont possibles :

- ♦ '*strip hedge*' : sélection d'un certain nombre de contrats ayant des échéances différentes ;
- ♦ '*rolling hedge*' : sélection de contrats avec la même date de livraison la plus rapprochée pour les remplacer par d'autres ayant des échéances plus éloignées.

---

<sup>1</sup> Depuis la réalisation de cette étude, l'obligation de référence a été modifiée pour une obligation du Canada portant des coupons au taux annuel de 6 %.

Selon Khoury et Laroche (1996), dans le cas de portefeuilles obligataires de grande taille, la seconde stratégie de roulement est plus convenable, puisque le contrat le plus approprié quant à la largeur et à la profondeur du marché à Montréal est celui dont l'échéance est la plus rapprochée. Nous utiliserons donc comme contrat à terme de couverture les contrats ayant l'échéance la plus rapprochée et la position sera 'roulée' à tous les trois mois.

#### *Prix de roulement des contrats à terme*

Lorsqu'un contrat à terme détenu par un investisseur arrive à échéance mais que l'investisseur veut continuer à investir sur le même marché, il devrait renverser la position qu'il détient à échéance et acheter un nouveau contrat à terme. Au lieu de faire ceci, les courtiers sur le marché lui permettent de payer le prix de roulement pour détenir un contrat à terme de l'échéance suivante.

Les données réelles des prix de roulement ne sont pas disponibles, étant donné que ces prix ne sont pas directement cotés en bourse. Les négociateurs de la Caisse de dépôt et placement du Québec nous proposent une approximation des prix de roulement comme étant une moyenne des différences entre le prix du contrat '*front*' (qui va venir à échéance) et le prix du contrat '*next*' (qui va devenir le '*front*' à la prochaine date de roulement) sur les 4<sup>ième</sup> et 5<sup>ième</sup> journées précédant la date d'échéance du contrat à terme.

#### *Obligation la moins chère à livrer*

Comme les contrats à terme sur obligations gouvernementales permettent de livrer plusieurs obligations différentes de l'obligation sous-jacente, le vendeur d'un contrat à terme a intérêt à utiliser l'obligation la moins chère à livrer au moment du règlement. L'obligation la moins chère à livrer est celle, parmi les obligations livrables, qui minimise l'écart entre le prix au comptant de l'obligation et le prix de règlement du contrat à terme au moment de sa signature multiplié par son facteur de concordance. L'obligation la moins chère à livrer se détermine donc comme suit :

$$MIN [P - (FR \cdot X)],$$

où :

- P* : valeur marchande de l'obligation livrable ;
- FR* : prix de règlement du contrat à terme ;
- X* : facteur de concordance de l'obligation livrable.

Pour calculer le facteur de concordance, il s'agit de déterminer le prix de l'obligation livrable en date du premier jour du mois de livraison, en supposant que son rendement exigé est égal au taux de coupon de l'obligation de référence et de diviser ce prix par la valeur nominale de l'obligation. Aux fins de notre analyse, nous utilisons les facteurs de concordance publiés par la Bourse de Montréal.

#### *Nombre de contrats à terme à transiger*

Selon Fabozzi (1999), la formule approximative suggérée pour déterminer le nombre de contrats à terme à transiger pour ajuster la durée d'un portefeuille à un niveau voulu (cible) est la suivante :

$$N = \frac{(D_T - D_I)}{D_F P_F} P_I,$$

où :

- $N$  : nombre de contrats à terme à transiger ;
- $D_T$  : durée modifiée cible du portefeuille ;
- $D_I$  : durée modifiée initiale du portefeuille ;
- $D_F$  : durée modifiée de l'actif sous-jacent au contrat à terme ;
- $P_I$  : valeur marchande du portefeuille initial ;
- $P_F$  : valeur marchande du contrat à terme.

Pour un assureur, le portefeuille cible est celui du passif et le portefeuille initial est le portefeuille d'actifs. De plus, comme les valeurs marchandes de l'actif et du passif ne sont pas nécessairement toujours égales, nous devons introduire deux valeurs marchandes différentes. La formule approximative devient alors la même que celle obtenue à partir de l'égalité des dollars-durée, soit :

$$N = \frac{D_P P_P - D_A P_A}{D_F P_F}.$$

## Appariement

Dans cette étude, nous comparons deux types d'appariement.

- ♦ *Appariement traditionnel* - Nous utiliserons, comme actifs financiers traditionnels, les actifs couramment transigés par l'assureur aux fins d'appariement. Étant donné l'importance des obligations du Québec dans le portefeuille de l'assureur, nous avons choisi l'obligation du Québec à longue échéance (~10 ans) la plus régulièrement transigée par l'assureur, soit l'obligation d'Hydro-Québec d'échéance du 15 février 2007, ainsi qu'un titre à court terme (Bons du trésor de la province de Québec, 3 mois). L'assureur nous a confirmé que les taux offerts par Hydro-Québec sont identiques à ceux offerts par la province de Québec.
- ♦ *Appariement par produits dérivés* - Tel que justifié précédemment, nous avons choisi les CGB vendus à la Bourse de Montréal.

## Appariement différentiel d'un segment

Tous les mois, nous devons calculer les quantités de chacun des actifs à transiger et ce, pour chacune des deux méthodes d'appariement. Pour ce faire, nous procéderons simplement par résolution d'une équation définie en termes de dollars-durée. La dollars-durée est égale à la

multiplication de la valeur marchande par la durée. Les calculs requis sont légèrement différents, dépendamment de la catégorie des actifs utilisés pour fins d'appariement.

### *Appariement à l'aide d'obligations*

En premier lieu, nous calculerons les variables dollars-durée de l'actif ( $DDA$ ) et du passif ( $DDP$ ). Nous poursuivrons ensuite avec le calcul des transactions nécessaires pour faire en sorte que ces deux variables deviennent égales.

Nous calculerons la durée de l'actif à plus long terme (obligation) utilisé pour fins d'appariement ( $DX$ ). L'autre actif utilisé pour fins d'appariement ( $Y$ ) est un titre d'échéance 3 mois et sa durée est donc de 0,25.

Par la suite, nous calculerons la  $VM$  des titres (obligations et titres à court terme) à acheter/vendre pour fins d'appariement ( $VMXY$ ) par résolution de l'équation suivante.

- ♦ Si  $DDP < DDA$  :

$$DDP - DDA = 0,25 VMXY - (DX \cdot VMXY).$$

Ainsi, dans ce cas, il faut réduire la durée des actifs. Pour ce faire, nous vendrons pour une valeur marchande de  $VMXY$  \$ des actifs  $X$  (obligations) et achèterons avec cette valeur  $VMXY$  \$ des titres à court terme.

- ♦ Si  $DDP > DDA$  :

$$DDP - DDA = (DX \cdot VMXY) - 0,25 VMXY.$$

Dans ce cas, il faut allonger la durée des actifs. Pour ce faire, nous vendrons, pour une valeur marchande de  $VMXY$  \$, des titres à court terme et achèterons avec cette valeur  $VMXY$  \$ des actifs  $X$ .

- ♦ Si  $DDP = DDA$  :

aucune transaction nécessaire à cette date autre que le roulement des  $CGB$ , s'il y a lieu.

Finalement, à partir de la valeur marchande calculée ci-dessus ( $VMXY$ ), nous déterminerons le nombre d'obligations à transiger. Pour les fins de l'étude, nous poserons comme hypothèse qu'il est possible de transiger une fraction d'actifs. Cette hypothèse évitera que notre conclusion soit affectée par des différences inhérentes à la quantité transigée.

### *Appariement à l'aide de contrats à terme (ici des CGB)*

Nous calculerons d'abord la durée du contrat à terme ( $DCT$ ) utilisé pour fins d'appariement. Par la suite, nous calculerons la valeur marchande des contrats à terme à transiger pour fins d'appariement ( $VMCT$ ) par résolution de l'équation suivante :

$$DDP - DDA = (DCT \cdot VMCT).$$

Ainsi, s'il faut réduire la durée des actifs ( $DDA > DDP$ ), nous vendrons des contrats à terme pour une valeur marchande de  $VMCT$  \$. Inversement, s'il faut augmenter la durée des actifs ( $DDA < DDP$ ), nous achèterons des contrats à terme pour une valeur marchande de  $VMCT$  \$.

Finalement, à partir de la valeur marchande calculée ci-dessus ( $VMCT$ ), nous déterminerons le nombre de contrats à terme à transiger. Pour les fins de l'étude, nous poserons également comme hypothèse qu'il est possible de transiger une fraction des contrats à terme.

### **Frais de transaction**

Pour les obligations, nous avons demandé à l'assureur de nous fournir son échelle de frais effectivement payés pour ces transactions. L'assureur a pu établir qu'il y a une différence d'environ 0,05 \$ entre le cours acheteur et le cours vendeur d'une obligation de 5 ans et moins. Pour les obligations de plus de 5 ans, la différence entre les deux cours est d'environ 0,10 \$. Pour tenir compte des frais de transaction, nous avons donc supposé ces différences entre les cours acheteur et vendeur des obligations.

Pour ce qui est des bons du trésor, selon l'assureur, l'écart entre le cours vendeur et acheteur est d'environ 3 points de base. Nous utilisons donc cette hypothèse pour tenir compte des frais de transaction afférents à ces titres.

Pour les contrats à terme, quoique l'assureur n'en transige pas, il nous a indiqué qu'un frais fixe de 10 \$ par contrat à terme transigé est exigé.

### **Comparaison des deux méthodes d'appariement**

Pour les deux méthodes, nous débutons notre étude avec les mêmes montants d'actif et de passif. En cours d'étude, les montants de passif demeureront identiques, puisque nous avons posé comme hypothèse que le portefeuille de l'assureur était «fermé» au début de la période d'étude. Pour ce qui est de l'actif, en raison encore de l'hypothèse de portefeuille fermé, les seuls flux monétaires différents entre les deux méthodes sont directement attribuables à l'appariement à l'aide d'actifs financiers différents.

Pour déterminer la méthode d'appariement la plus efficace, nous comparerons donc les montants totaux d'actifs accumulés à la fin de la période d'étude. De plus, puisque théoriquement il devrait y avoir une différence au niveau des frais de transaction, nous les comparerons également.

### **AJUSTEMENT DU RATIO DE COUVERTURE LORS DE L'APPARIEMENT PAR DES CONTRATS À TERME**

Comme point de départ, pour l'appariement des durées, nous avons posé la formule suivante pour déterminer le nombre de contrats à terme à transiger ( $N$ ) :

$$N = \frac{D_P P_P - D_A P_A}{D_F P_F}$$

où :

$D_P$  : durée modifiée du passif ;

$D_A$  : durée modifiée de l'actif ;

$P_P$  : valeur marchande du passif ;

$P_A$  : valeur marchande de l'actif.

Cette formule suppose que les variations de rendements du portefeuille d'actifs de l'assureur sont égales aux variations de rendements de l'obligation sous-jacente au contrat à terme, soit l'obligation du Canada 10 ans ; c'est-à-dire :

$$\frac{dR_A}{dR_F} = \frac{dR_j}{dR_F}$$

où :

$R_A$  : rendement du portefeuille d'actifs ;

$R_j$  : rendement de l'obligation sous-jacente au contrat à terme ;

$R_F$  : rendement du contrat à terme.

Il est nécessaire de vérifier si cette hypothèse est justifiée pour le portefeuille faisant l'objet de cette étude. Nous allons donc valider si :

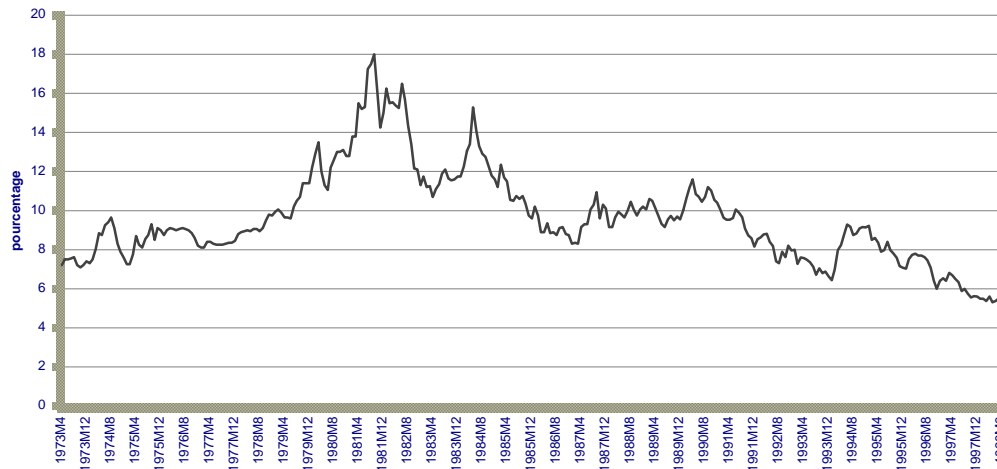
$$\frac{dR_A}{dR_j} = 1.$$

Tel que mentionné précédemment, le portefeuille de l'assureur est composé à 92 % d'obligations, dont seulement 3 % sont des obligations du gouvernement du Canada alors que plus de 70 % sont des obligations du gouvernement du Québec. La balance du portefeuille est composée en majorité d'obligations de différentes municipalités québécoises. De plus, notons que plus de 75 % des obligations du gouvernement du Québec détenues par l'assureur ont une échéance supérieure à 5 ans. Étant donné cette prépondérance marquée d'obligations du Québec à long terme, nous avons décidé d'utiliser, comme obligation de référence du portefeuille de l'assureur, une obligation du gouvernement du Québec d'échéance 10 ans. Nous comparerons donc les rendements des obligations du gouvernement du Québec 10 ans à ceux des obligations du gouvernement du Canada 10 ans (obligation sous-jacente au CGB).

Les rendements des deux obligations précédentes nous ont été fournis par le ministère des Finances du Québec pour tous les mois allant de mars 1973 à août 1998. Notre échantillon est donc composé de 305 données.

La figure 1 qui suit présente l'évolution des rendements mensuels de l'obligation du Canada 10 ans de mars 1973 à août 1998.

**Figure 1**  
**Évolution des rendements de l'obligation du Canada 10 ans**



La figure 2 présente l'évolution des rendements de l'obligation du Québec 10 ans au cours de la même période.

**Figure 2**  
**Évolution des rendements de l'obligation du Québec 10 ans**



À première vue, il y a lieu de croire que les données sont non stationnaires. Pour le confirmer, nous allons effectuer le test statistique de racines unitaires de Dickey-Fuller. Ce test permet de vérifier le caractère aléatoire des données ; c'est-à-dire qu'il valide la stationnarité des données. Dans la mesure où les données seraient non stationnaires, l'utilisation des variations de rendement plutôt que des rendements eux-mêmes serait privilégiée.

Le test de racines unitaires consiste à tester si  $\beta = 0$  dans les équations de régression suivantes (avec et sans tendance) :

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \beta y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \beta y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$$

où :

- $y_t$  : rendement de la période  $t$  ;
- $y_{t-1}$  : rendement de la période  $t-1$  ;
- $\Delta y_{t-1}$  : variation du rendement de la période  $t-1$  ;
- $\beta$  : coefficient à estimer ;
- $\alpha_1$  : coefficient à estimer ;
- $\alpha_0$  : constante à estimer ;
- $\varepsilon_t$  : terme aléatoire.

Si le résultat du test indique que  $\beta = 0$ , cela signifie que les données sont non stationnaires. Les résultats suivants nous confirment donc que les rendements des deux obligations sont non stationnaires, même à un niveau de confiance de 10 %.

**Tableau 1**  
**Résultats du test de racine unitaire sur les variables  $C_{10}$  et  $Q_{10}$**

Variable	t-test	Valeurs critiques des trois niveaux de confiance		
		10 %	5 %	1 %
$C_{10}$ (Constante, sans tendance)	-1,24	-2,57	-2,86	-3,43
$C_{10}$ (Constante, avec tendance)	-1,75	-3,13	-3,41	-3,96
$Q_{10}$ (Constante, sans tendance)	-1,48	-2,57	-2,86	-3,43
$Q_{10}$ (Constante, avec tendance)	-2,13	-3,13	-3,41	-3,96

En effet, le test de Dickey-Fuller nous permet de rejeter l'hypothèse de racine unitaire si la valeur du test statistique (t-test) est inférieure à la valeur critique du niveau de confiance retenu. Ainsi, comme toutes les statistiques calculées sont supérieures aux valeurs critiques, nous acceptons l'hypothèse que ( $\beta = 0$ ) et nous pouvons donc conclure que les données  $C_{10}$  et  $Q_{10}$  sont non stationnaires.



Étant donné ces résultats, nous avons défini de nouvelles variables  $y_t$  représentant les variations de rendements (obligations du Canada –  $VC_{10}$  et obligations du Québec –  $VQ_{10}$ ). Pour valider la stationnarité de ces variables, nous allons effectuer à nouveau le test statistique de racine unitaire de Dickey-Fuller. Les résultats suivants présentent des statistiques  $t$  toujours inférieures aux valeurs critiques; ce qui nous permet de rejeter l'hypothèse que  $\beta = 0$ . Le test nous confirme donc que les variations des rendements des deux obligations sont en effet stationnaires.

**Tableau 2**  
**Résultats du test de racine unitaire sur les variables  $VC_{10}$  et  $VQ_{10}$**

Variable	t-test	Valeurs critiques des trois niveaux de confiance		
		10 %	5 %	1 %
$VC_{10}$ (Constante, sans tendance)	-4,11	-2,57	-2,86	-3,43
$VC_{10}$ (Constante, avec tendance)	-4,24	-3,13	-3,41	-3,96
$VQ_{10}$ (Constante, sans tendance)	-4,23	-2,57	-2,86	-3,43
$VQ_{10}$ (Constante, avec tendance)	-4,33	-3,13	-3,41	-3,96

Étant donné ces résultats, nous utiliserons les variations de rendement des deux obligations afin de tester leur corrélation entre elles. Les tableaux suivants présentent les statistiques descriptives des variables retenues ( $VC_{10}$  et  $VQ_{10}$ ) ainsi que l'analyse de corrélation entre ces variables.

**Tableau 3**  
**Statistiques descriptives des variables  $VC_{10}$  et  $VQ_{10}$**

	$VC_{10}$	$VQ_{10}$
Moyenne	-0,482%	-0,439%
Médiane	0,000	0,000
Mode	0,000	0,000
Écart type	0,475	0,474
Variance de l'échantillon	0,226	0,224

**Tableau 4**  
**Analyse de corrélation entre les variables  $VC_{10}$  et  $VQ_{10}$**

	$VC_{10}$	$VQ_{10}$
$VC_{10}$	1,00	
$VQ_{10}$	0,96	1,00

La lecture du tableau 3 nous permet de conclure à une grande similarité des statistiques descriptives des deux variables étudiées. De plus, ces deux variables sont fortement corrélées entre elles, puisqu'elles présentent un coefficient de corrélation de 96 %. Mais est-il justifié de supposer un ratio des variations de rendement des deux obligations de 1 ?

Avec l'objectif de répondre à cette question, nous avons effectué une régression sur le logiciel SHAZAM par la méthode des moindres carrés ordinaires. Nous avons utilisé les variations de rendement de l'obligation du Québec 10 ans ( $VQ_{10}$ ) comme variable expliquée et les variations de rendement de l'obligation du Canada 10 ans ( $VC_{10}$ ) comme variable explicative :

$$VQ_{10_t} = \alpha + \beta VC_{10_t} + \varepsilon_t.$$

De plus, nous avons effectué la régression sur trois échantillons différents, soit :

Échantillon 1 : toutes les données disponibles, de mars 1973 à août 1998.

Échantillon 2 : de janvier 1990 à août 1998.

Échantillon 3 : 60 mois avant l'étude, soit de janvier 1992 à décembre 1996.

Les résultats suivants ont été obtenus.

**Tableau 5**  
**Résultats de la régression**

Échantillon	$\alpha$	$\beta$	$R^2$	Statistique t	
				$\beta = 0$	$\beta = 1$
1	0	0,958	0,92	60,1	-2,65
2	0	1,064	0,95	43,5	2,62
3	0	1,101	0,96	38,2	3,50

Le tableau précédent nous présente des coefficients de détermination entre 92 % et 96 %, ce qui confirme la corrélation élevée entre les deux variables. De plus, comme les coefficients  $\beta$  sont près de 1 pour chacun des trois échantillons, nous avons testé l'hypothèse que  $\beta = 1$  dans l'équation de régression. La dernière colonne du tableau 5 présente les résultats obtenus pour ce test. Comme toutes les statistiques  $t$  en valeur absolue sont supérieures à 2, nous devons rejeter cette hypothèse, et ce, pour les trois échantillons. Il serait donc injustifié de faire l'hypothèse que :

$$\frac{dR_A}{dR_j} = 1.$$

En pratique, nous devons donc ajuster le ratio de couverture de la formule (4) dans le cas de l'appariement à l'aide de contrats à terme. Le ratio d'ajustement est en fait le  $\beta$  de la régression précédente. Nous proposons d'utiliser l'échantillon des 60 mois précédant la date de l'appariement avec un décalage d'un mois (afin de s'assurer de la disponibilité de la dernière donnée lors du calcul). Le tableau suivant présente les ratios de couverture.

**Tableau 6**  
**Ratio de couverture**

<b>Mois</b>	<b>β 60 derniers mois</b>
Janvier 97	1,099
Février 97	1,101
Mars 97	1,099
Avril 97	1,099
Mai 97	1,094
Juin 97	1,093
Juillet 97	1,102
Août 97	1,095
Septembre 97	1,096
Octobre 97	1,097
Novembre 97	1,089
Décembre 97	1,088
Janvier 98	1,085
Février 98	1,084
Mars 98	1,083
Avril 98	1,085
Mai 98	1,084
Juin 98	1,076
Juillet 98	1,071
Août 98	1,071
Septembre 98	1,070
Octobre 98	1,077
Novembre 98	1,070
Décembre 98	1,070

## **RÉSULTATS**

### **Données au 31 décembre 1996**

Pour les deux types d'appariement, nous avons débuté avec l'actif et le passif du segment visé au 31 décembre 1996, tel que fourni par l'assureur.

**Tableau 7**  
**Données au 31 décembre 1996**

	<b>Actif</b>	<b>Passif</b>
Valeur	518 200 877 \$	519 002 468 \$
Durée	6,19	6,15

Nous remarquons que l'actif initial ne coïncide pas exactement avec le passif initial. En effet, comme nous effectuons la simulation pour un segment auquel sont rattachés des actifs précis au 31 décembre 1996, la différence d'actif se trouve dans le segment équité de l'assureur. Cette particularité n'a toutefois aucun impact sur l'étude, puisque nous avons un point de départ identique.

### **Comparaison des deux méthodes d'appariement**

Pour déterminer la méthode d'appariement la plus efficace, le tableau 8 compare les montants totaux d'actifs ainsi que les frais de transaction accumulés à la fin de la période d'étude.

**Tableau 8**  
**Résultats au 31 décembre 1998**

<b>Méthode</b>	<b>Actif</b>	<b>Frais accumulés</b>
Traditionnelle	505 522 264 \$	60 565 \$
CGB	506 783 267 \$	11 069 \$

L'analyse du tableau précédent nous permet de conclure que la méthode d'appariement à l'aide des CGB a permis un rendement supérieur sur la période de deux ans visée par l'étude.

En effet, cette méthode d'appariement a permis d'accumuler un montant d'actif supplémentaire de 1 261 003 de dollars. Ce montant n'est toutefois pas élevé relativement à l'actif total du segment visé, puisqu'il ne représente qu'une différence de rendement annuel d'environ 12,5 points de base. Par contre, d'un autre point de vue, si les frais de transaction de l'assureur diminuaient de 0,65 million de dollars, cela ferait augmenter son bénéfice net d'environ 0,4 million. Si nous comparons maintenant ce montant supplémentaire à un bénéfice net annuel d'environ 12 millions, cela devient peut-être plus significatif. Il pourrait donc être intéressant pour l'assureur de considérer cette méthode.

Nous avons mentionné dès l'introduction qu'il devrait, en théorie, y avoir une différence au niveau des frais de transaction, et ce, à l'avantage des contrats à terme. En pratique, suite à notre étude, nous constatons que l'appariement à l'aide de contrats à terme a effectivement présenté des frais moins élevés d'environ 50 000 dollars sur 2 ans. Encore ici, cette différence n'est pas importante, si on l'exprime en fonction de l'actif total du segment, soit seulement environ 0,005 % annuellement. Par contre, nous pouvons également conclure qu'il a été cinq fois plus coûteux d'utiliser des obligations plutôt que des CGB.

De plus, nous constatons que la différence entre les frais de transaction des deux méthodes d'appariement n'explique qu'une portion de la différence de rendement total. En effet, nous obtenons environ 0,12 point de base de rendement supplémentaire en appariant à l'aide de CGB plutôt qu'à l'aide d'obligations. Cette différence est attribuable à l'impact des flux d'actifs différents transigés à des dates différentes et aux taux d'intérêt observés applicables à ces flux. Nous sommes conscients que ce résultat est directement relié aux taux observés sur cette période

d'étude de 2 ans et qu'il serait alors très intéressant pour l'assureur, dans une étude ultérieure, d'effectuer des simulations supplémentaires à l'aide de scénarios d'intérêts différents pour tester la sensibilité des résultats à cette variable.

De plus, avant d'entreprendre concrètement l'appariement à l'aide de CGB, nous suggérons également qu'une autre hypothèse utilisée soit analysée davantage, soit celle de l'obligation sous-jacente au CGB la moins chère à livrer. Rappelons que nous avons supposé que l'obligation la moins chère à livrer à la date d'échéance du contrat à terme était celle qui était la moins chère à livrer à la date de la transaction d'achat ou de vente. Sur la période de cette étude, cette hypothèse a été vérifiée. Par contre, nous savons qu'il en a été autrement à l'occasion par la suite. Il serait donc intéressant d'analyser l'impact d'une variation de cette hypothèse sur les résultats.

Enfin, mentionnons que l'utilisation de produits dérivés n'a pas nécessairement les mêmes implications financières, fiscales, juridiques et comptables que l'utilisation d'obligations traditionnelles. Ainsi, avant d'aller de l'avant avec une nouvelle technique de couverture, ces points devraient être considérés par l'assureur.

## Bibliographie

- Babbel, D., «Asset-Liability Matching in the Life Insurance Industry», *The Financial Dynamics of the Insurance Industry*, E. Altman and I. T. Vanderhoof, editors, Irwin Press, 1994.
- Beaver, W.H. and G. Parker, *Risk Management, Problems and solutions*, McGraw Hill, New York, 1995.
- Colquitt, L.L. and R.E. Hoyt, «Determinants of Corporate Hedging Behavior : Evidence from the Life Insurance Industry», *The journal of Risk and Insurance*, 64 : 649-671, 1997.
- Cummins, J.D. , R.D. Phillips, and S.D. Smith, «Corporate Hedging in the Insurance Industry : The Use of Financial Derivatives By U.S. Insurers », *North American Actuarial Journal*, Vol. 1, no 1.
- Fok, R.C., C. Carroll and M.C. Chiou, «Determinants of Corporate Hedging and Derivatives : A Revisit», *Journal of Economics and Business* 49 : 569-585, 1997.
- Froot, K.A. and J.C. Stein, «Risk Management, Capital Budgeting, and Capital Structure Policy for Financial Institutions : an Integrated Approach», *Journal of Financial Economics* 47 : 55-82, 1998.
- Garbade K. D., *Fixed Income Analytics*, 2<sup>ième</sup> édition, Massachusetts Institute of Technology, 1998.».
- Green, W.H., *Econometric Analysis*, 3<sup>ième</sup> édition, Prentice Hall, 1997.
- Hoyt, R. E., «Use of Financial Futures by Life Insurers», *The Journal of Risk and Insurance* 56 : 740-749, 1989.
- Hull, J.C., *Options, Futures and other Derivatives*, 3<sup>ième</sup> édition, Prentice Hall, 1997.
- Khoury, N. et P. Laroche, *Options et contrats à terme*, 2<sup>ième</sup> édition, Les Presses de l'Université Laval, 1996.
- Lamm-Tennant, J., «Asset/Liability Management for the Life Insurer : Situation Analysis and Strategy Formulation», *Journal of Risk and Insurance*, September 1989.
- Santomero, A.M., «Financial Risk Management : The Whys and Hows», *Financial Markets, Institutions and Investments*, December 1995.
- Smith, C.W., «Corporate Risk Management and the Insurance Industry», *Financial Management of Life Insurance Companies*, 1993.