Le consentement à payer et les méthodes de réduction du risque.

Philippe Godfroid [*]

juillet 1997.

Abstract

In this paper, we compare the impact of an individual's risk perception modification on his willingness to pay as defined by Jones-Lee. Individuals can differ from several manners: they can be insured or not, risk-neutral or risk averse and they can promote self protection activities or not. We establish clasiffication rules in order to compare WTP with and without the presence of moral hasard.

Key Words

Willingness to pay, risk aversion, insurance, self-protection, moral hazard.

Résumé

Le but de ce travail est de comparer les différents niveaux du consentement à payer tels que définis par Jones-Lee et dégagés par des individus qui peuvent différer de plusieurs façons. Soit parce que leur comportement face au risque n'est pas identique, soit parce que la possibilité d'assurabilité du risque leur est offerte ou non et enfin soit parce qu'ils ont l'opportunité d'effectuer des activités d'autoprotection ou pas. De plus, nous étudions la problématique posée par la qualité de l'information disponible entre l'assuré et l'assureur qui induit ou pas le risque moral. Nous établissons des règles de classification des consentements à payer qui dans certains cas sont intimement liées à celles établies pour les différents niveaux de dépenses d'autoprotection.

[*] Cet article a été rédigé pendant que l'auteur effectuait un stage postdoctoral à l'Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Chaire de Gestion des Risques, ainsi qu'au C.R.T de l'Université de Montréal. Nous tenons à remercier Georges Dionne pour ses commentaires sur une version antérieure de ce texte. Cette recherche a été menée à terme grâce à l'octroi d'une bourse postdoctorale du Ministère de l'Education du Gouvernement du Québec.

Mots clés

Consentement à payer, aversion au risque, assurance de marché, autoprotection, risque moral.

1 Introduction.

La prévention des risques, qu'ils soient de santé publique ou environnementaux par exemple est souvent considérée comme un bien public. Un des points les plus importants de la politique publique consiste dès lors à évaluer le bénéfice social de la prévention. Dans une perspective coût-bénéfice, autant le coût est aisé à déterminer, autant le bénéfice attaché à la prévention est difficile à évaluer. Une des méthodes les plus fréquemment employées afin d'évaluer le bénéfice privé d'une réduction de risque est le consentement à payer prôné par Jones-Lee [10]. Dans cette optique, la question fondamentale posée aux individus est de savoir combien ils sont prêts à payer pour réduire leur risque. On n'aurait bien évidemment pas à leur poser la question si ils supportaient eux-mêmes globalement leurs propre risque puisque leurs choix effectifs de prévention donneraient automatiquement la réponse. Mais c'est bien souvent à l'Etat qu'incombe la charge de subvention du risque en particulier lorsque les dépenses de prévention génèrent des externalités. Le consentement à payer sert donc d'indicateur déterminant au niveau optimal de dépenses préventives à réaliser dans un environnement où les individus n'ont pas à les payer.

Le but de ce travail est de déterminer une valeur du consentement à payer qui corresponde à la variation compensatoire accordée par un individu à des fins préventives décidées par un organisme public et qui tienne compte de deux des instruments de réduction de risque privés définis par Ehrlich et Becker [7], à savoir l'assurance de marché et les activités d'autoprotection. Nous décrirons dans un premier temps un modèle simple dans lequel les activités d'autoprotection ne sont pas prises en compte pour ensuite les introduire dans l'analyse. Dans ce deuxième modèle, nous distinguerons deux cas, à savoir celui pour lequel l'information entre assuré et assureur est complète et gratuite et celui qui inclu le risque moral dans l'analyse. Pour chacun de ces deux modèles, trois cas de figure sont envisagés. Premièrement, nous considérons le cas le plus simple possible, à savoir celui d'un individu neutre au risque. Par la suite, nous envisageons une modification de l'aversion vis à vis du risque pour finalement examiner le cas d'un agent riscophobe qui a la possibilité de s'assurer. La question fondamentale qui se pose est de voir l'impact de l'assurance de marché sur le consentement à payer des individus.

2 Absence d'activités d'autoprotection.

On considère un individu -ou une firme- doté d'actifs financiers certains de montant W_0 et d'un actif physique de valeur L [1] (un immeuble) exposé à un risque

[1] Dans certains modèles, on considère W_0 comme étant la richesse initiale de l'individu qui comprend l'actif sûr $(W_0 - L)$ et l'actif soumis au risque de sinistre L. Cette modélisation pose problème lorsque l'on doit différentier par rapport à W_0 puisque l'on ne sait pas si le changement

de sinistre de probabilité p_0. Pour pouvoir faire face à cette perte potentielle L, l'individu a la possibilité d'acquérir (ou non) une couverture d'assurance partielle (ou totale) pour un montant équivalant à Q. Pour avoir droit à l'indemnisation, il doit s'acquiter du paiement d'une prime π qui est fonction du risque couvert, de la couverture d'assurance choisie et du taux de chargement λ imposé par la compagnie d'assurance. Si nous supposons que suite à une action publique de prévention, le niveau de la probabilité de sinistre peut être réduit, la question qui se pose est de savoir quel sera le "prix" de cette action évalué par les différents individus. C'est ce qu'on appelle le consentement à payer, la variation compensatoire que l'individu est prêt à accorder (qui grèvera sa fortune d'un montant dW_0) et ce, afin de pouvoir bénéficier de la baisse de probabilité (exogène) dégagée sur base d'une action préventive dp_0. A titre d'exemple, on pourrait essayer de déterminer l'impact d'une politique publique qui consisterait à raffermir les normes ignifuges pour le recouvrement des immeubles, ce qui reviendrait à diminuer de manière exogène et pour tous les individus le risque d'incendie de ces immeubles. Cette approche par les consentements à payer a été développée par Jones-Lee [10] dans un contexte de dépendance des fonctions d'utilité vis-à-vis des différents états du monde. Pour notre part, nous nous situons dans un contexte d'indépendance vis-à-vis des états du monde, la concrétisation des deux états de la nature possibles (faire face ou pas à un sinistre) n'est pas associée à deux fonctions d'utilité distinctes mais bien à une variation du niveau de la richesse finale de l'individu. Cette approche a été développée pour la première fois par Eeckhoudt, Godfroid et Gollier [6].

2.1 L'individu est neutre vis-à-vis du risque.

Par hypothèse, l'individu est confronté à deux éventualités, à savoir faire face (ou pas) à un sinistre. Le premier cas de figure envisagé est celui pour lequel l'individu est neutre vis à vis du risque ce qui exclut toute possibilité d'achat d'assurance actuarielle. Son espérance d'utilité peut se reformuler dans ce cas par:

$$EU = p_0 b W_0 + (1 - p_0)\, b\, (W_0 + L)$$

où la pente de la droite d'utilité est fixée à b. Différentions totalement cette dernière expression par rapport à la richesse initiale d'une part et à la probabilité de sinistre d'autre part afin d'obtenir:

$$dEU = \frac{\partial EU}{\partial W_0} dW_0 + \frac{\partial EU}{\partial p_0} dp_0 = 0$$

de W_0 correspond à un changement de la valeur de l'actif sûr ou à un changement de la valeur de l'actif risqué.

ce qui conduit à la valeur du consentement à payer:

$$Cap_1 = \frac{dW_0}{dp_0} = - \frac{\partial EU/\partial p_0}{\partial EU/\partial W_0} = \frac{bL}{b} = L. \qquad (1)$$

Conformément à l'intuition, le consentement à payer est positif, ce qui revient à dire que l'individu acceptera une diminution de ses avoirs (d'un montant proportionnel à la valeur de l'actif risqué) en contrepartie d'une baisse de la probabilité de sinistre.

2.2 L'individu est riscophobe sans possibilité d'assurance.

Intéressons nous à présent non plus à un agent risconeutre mais bien à son homologue riscophobe présentant les mêmes caractéristiques de ventilation de richesse finale. L'espérance d'utilité d'un tel individu s'écrit:

$$EU = p_0 U(W_0) + (1 - p_0)\, U(W_0 + L).$$

Son consentement à payer valant quant à lui devient:

$$Cap_2 = \frac{U(W_0 + L) - U(W_0)}{p_0 U'(W_0) + (1 - p_0)\, U'(W_0 + L)}. \qquad (2)$$

La différence entre les utilités exprimées au numérateur est positive tout comme l'est aussi l'espérance d'utilité marginale du dénominateur, ce qui nous garantit un consentement à payer positif. Si l'on s'intéresse à la comparaison de Cap_1 avec Cap_2 on remarque que les deux consentements à payer sont identiques lorsque l'égalité suivante est respectée [2]:

$$Tg(\alpha) \equiv \frac{U(W_0 + L) - U(W_0)}{L} = p_0 U'(W_0) + (1 - p_0)\, U'(W_0 + L).$$

De plus, en utilisant ce résultat, on peut déterminer un niveau de probabilité "seuil" tel qu'il égalise les deux consentements à payer. Ce niveau p_{12} est défini par:

$$p_{12} = \frac{Tg(\alpha) - U'(W_0 + L)}{U'(W_0) - U'(W_0 + L)} \qquad (3)$$

ceci nous conduit à formuler la proposition suivante:

Proposition 1 Le consentement à payer d'un individu riscophobe non assuré est plus faible (égal ou supérieur) à celui consenti par son homologue risconeutre lorsque la probabilité de sinistre de départ est supérieure (égale ou inférieure) à un niveau seuil p_{12}. On a donc:

$$Cap_2 \lesseqgtr Cap_1 \iff p_0 \gtreqless p_{12}$$

[2] Par définition de la dérivée, la pente de la droite qui comprend les points de coordonnées $(W_0; U(W_0))$ et $(W_0 + L; U(W_0 + L))$ est égale à $Tg(\alpha)$.

Ce résultat est en parfait accord avec celui de Eeckhoudt, Godfroid et Gollier [6] établi sur base de la comparaison entre les concepts de prime de risque et de consentement à payer et qui stipule qu'un individu riscophobe peut avoir un consentement à payer plus faible qu'un risconeutre. L'apport de la proposition 1 est de définir l'intervalle de probabilité pour lequel ce résultat est valide (pour des valeurs de p_0 relativement élevées et supérieures à un certain seuil p_{12}). Ce niveau de probabilité détermine en quelque sorte la "frontière" qui explique quand le risque augmente ou diminue suite à une variation de la probabilité de sinistre. Si l'on applique le théorème de Taylor-Lagrange à l'expression (3), on obtient que:

$$
\begin{aligned}
Tg(\alpha) &= \frac{U(W_0) - U(W_0+L)}{-L} = U'(W_0+L) - U''(W_0+L)\frac{L^2}{2} - \\
&\quad U'''(W_0+L)\frac{L^3}{6} + U^4(W_0+L)\frac{L^4}{24} - \frac{\Psi}{L}
\end{aligned}
$$

ainsi que:

$$
\begin{aligned}
U'(W_0) - U'(W_0+L) &= -U''(W_0+L)\,L + U'''(W_0+L)\frac{L^2}{2} - \\
&\quad U^4(W_0+L)\frac{L^3}{6} + \Omega
\end{aligned}
$$

où Ψ et Ω comprennent les termes d'ordre supérieur à 4, ce qui nous permet de réécrire (3) de la façon suivante:

$$
p_{12} = \frac{1}{2}\left[\frac{-U''(W_0+L) + U'''(W_0+L)\frac{L}{3} - U^4(W_0+L)\frac{L^2}{12} + \frac{\Psi}{L}}{-U''(W_0+L) + U'''(W_0+L)\frac{L}{2} - U^4(W_0+L)\frac{L^2}{6} + \Omega}\right] \tag{4}
$$

Cette expression est intéressante à plus d'un titre. Premièrement, elle nous indique que pour les fonctions d'utilités dont la dérivée troisième est nulle (cfr. la quadratique), le niveau de probabilité "seuil" est toujours égal à 0.5. Par contre, nous pouvons formuler la proposition suivante:

Proposition 2 Si la fonction d'utilité satisfait au concept de "proper risk aversion"[3], alors le niveau de p_{12} est toujours inférieur à 0.5.

En effet, si la fonction d'utilité U est "proper", le numérateur tout comme le dénominateur de (4) est positif. Néanmoins, à partir de la dérivée d'ordre 3, on

[3] Pratt et Zeckhauser [13] ont montré qu'une condition suffisante pour qu'une fonction d'utilité soit "proper risk averse" est que ses dérivées successives alternent de signe, avec évidemment un signe positif pour les dérivées impaires et un signe négatif pour les dérivées paires.

remarque que les termes du numérateur présentent des valeurs plus faibles que celles présentes au dénominateur. Le terme entre crochets est donc inférieur à l'unité, ce qui garantit un niveau de p_{12} inférieur à 0.5. Bien évidemment, plus L est faible, plus la qualité de l'approximation fournie par (4) sera bonne et nécessitera moins de termes d'ordre élevés. En outre, on peut facilement déterminer la valeur de p_{12} pour différentes fonctions d'utilités grâce à l'expression (3) qui nous permet d'exprimer la valeur de la probabilité "seuil" en fonction des différents paramètres du modèle. En ce qui concerne la fonction d'utilité logarithmique du type $U(W) = \ln(W)$ on obtient,:

$$p_{12} = \frac{W_0 (W_0 + L) [\ln (W_0 + L) - \ln (W_0)]}{L^2} - \frac{W_0}{L}$$

et pour la fonction d'utilité exponentielle négative du type $U(W) = -\exp^{-\rho W}$, on obtient:

$$p_{12} = \frac{1}{\rho L} - \frac{\exp^{-\rho(W_0+L)}}{\exp^{-\rho(W_0)} - \exp^{-\rho(W_0+L)}}.$$

Afin d'illustrer numériquement ces résultats nous avons repris différentes valeurs de p_{12} calculées pour des fonctions d'utilités exponentielle négative et logarithmique lorsque l'individu dispose d'une richesse certaine de montant $W_0 = 20$ et d'un actif risqué de valeur $L = 60$. Celles-ci sont reprises dans la Table suivante.

	quadratique	exponentielle ($\rho = 0.05$)	logarithmique
probabilité p_{12}	0.5	0.20809	0.2827

Une manière simple de trouver ce résultat dans le cadre d'une fonction d'utilité quadratique est d'appliquer à nouveau le théorème de Taylor-Lagrange non plus sur le niveau de la probabilité mais sur le niveau du consentement à payer. On peut en effet reformuler aussi bien le numérateur que le dénominateur de (2) en effectuant des approximations d'ordre 1 et 2 pour avoir:

$$U(W_0) - U(W_0 + L) = -U'(W_0 + L)\, L + U''(W_0 + L) \frac{L^2}{2} + \varepsilon_1$$

ainsi que

$$E(U') = U'(W_0 + L) - p_0 U''(W_0 + L)\, L + p_0 \varepsilon_2$$

où

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{6} U'''(W_1)\, L^3 \text{ avec } W_0 < W_1 < W_0 + L \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2} U'''(W_2)\, L^2 \text{ avec } W_0 < W_2 < W_0 + L. \end{aligned}$$

A ce stade de l'analyse, nous allons poser l'hypothèse suivante:

Hypothèse 1: si l'on suppose que la fonction d'utilité peut être approximée de façon assez bonne par le biais d'une fonction d'utilité quadratique, on peut considérer les termes ε_1 et ε_2 comme négligeables.

Sous cette hypothèse, (2) peut donc se réécrire comme suit:

$$Cap_2 = L \frac{U'(W_0 + L) - U''(W_0 + L)\frac{L}{2}}{U'(W_0 + L) - p_0 U''(W_0 + L) L}. \tag{5}$$

On remarque immédiatement que lorsque $p_0 = 1/2$; la fraction est égale à l'unité ce qui implique que le consentement à payer est égal à la valeur de l'actif risqué et par conséquent égal à Cap_1. On a donc:

Proposition 3 Sous l'hypothèse 1, le niveau de la probabilité "seuil" p_{12} est fixé à $1/2$.

2.3 L'individu est riscophobe avec assurance complète.

Dans cette section, nous utilisons un résultat classique de la demande d'assurance (Mossin [12], Smith [17]) qui nous indique que si la prime d'assurance est actuariellement neutre -le taux de chargement est nul et la prime correspond à l'espérance de perte- alors il est optimal de souscrire une assurance complète ($Q^* = L$). Dans pareil cas, l'espérance d'utilité de l'individu se ramène à:

$$EU(Q^* = L) = U(W_0 + L(1 - p_0))$$

ce qui nous mène après avoir effectué le processus de différentiation totale à la valeur du consentement à payer:

$$Cap_3 = \frac{LU'(W_0 + L(1 - p_0))}{U'(W_0 + L(1 - p_0))} = L. \tag{6}$$

On peut remarquer en comparant (1) et (6) que le comportement d'un individu riscophobe mais complètement assuré vis à vis du risque s'apparente à celui d'un individu neutre vis-à-vis du risque:

Proposition 4 Le consentement à payer d'un individu riscophobe qui est complètement assuré est égal à celui consenti par son homologue risconeutre(qui est égal à la valeur de l'actif risqué). On a donc:

$$Cap_3 = Cap_1 = L.$$

Comme la proposition 1 nous indique que le consentement à payer d'un individu riscophobe qui ne s'assure pas peut être plus faible que celui d'un risconeutre (qui ne s'assure pas lui aussi), on peut formuler les propositions suivantes:

Proposition 5 Le consentement à payer d'un individu riscophobe non assuré est plus faible (égal ou plus élevé) que celui de son homologue qui souscrit une assurance complète lorsque la probabilité de sinistre de départ est supérieure (égale ou inférieure) à un niveau "seuil" p_{12}. On a donc:

$$Cap_2 \gtreqless Cap_3 \iff p_{12} \gtreqless p_0.$$

En effet, si on a:

$$Cap_2 \gtreqless Cap_1 = Cap_3 \Rightarrow Cap_2 \gtreqless Cap_3$$

Proposition 6 Sous l'hypothèse 1, le niveau de la probabilité "seuil" est égal à $1/2$. On a donc:

$$Cap_2 \lesseqgtr Cap_3 \iff p_0 \gtreqless \frac{1}{2}$$

La preuve est triviale et découle des propositions 3 et 4. Nous pouvons illustrer graphiquement les résultats obtenus dans les sections précédentes. Afin de montrer que Cap_2 est une fonction décroissante et convexe de la probabilité de sinistre, il faut dans un premier temps dériver par rapport à p l'expression

$$Cap_2 = \frac{A}{U'(W_0+L) - pU''(W_0+L)L}$$

dans laquelle

$$A = L\left(U'(W_0+L) - U''(W_0+L)\frac{L}{2}\right) > 0.$$

On a:

$$\frac{dCap_2}{dp} = \frac{AU''(W_0+L)L}{[U'(W_0+L) - pU''(W_0+L)L]^2} < 0.$$

Pour déterminer la convexité, on obtient comme dérivée seconde:

$$\frac{d^2Cap_2}{dp^2} = \frac{2A[U''(W_0+L)L]^2}{[U'(W_0+L) - pU''(W_0+L)L]^3} > 0$$

Ce résultat est en accord avec celui de Godfroid [8].

On voit bien sur le graphique que pour un niveau de probabilité de sinistre égal à p_{12}, la fonction Cap_2 qui est décroissante et convexe coupe la droite horizontale qui représente $Cap_1 = Cap_3 = L$.

2.4 L'individu est riscophobe avec assurance partielle.

Lorsque la prime d'assurance contient un chargement, la littérature nous indique qu'il est optimal pour l'individu de souscrire une assurance partielle ($Q^* < L$) lorsque le problème admet une solution intérieure. Deux cas de figure distincts peuvent être envisagés à savoir que soit la prime d'assurance dépend de la probabilité de sinistre ou soit elle est proportionnelle à un taux de couverture qui n'est pas fonction de ladite probabilité.

2.4.1 La prime est indépendante de la probabilité individuelle de sinistre.

Ce type de tarification est observé dans certains régimes publics d'assurance. On retrouvait par exemple une tarification uniforme dans le régime d'assurance automobile du Québec avant 1992. Dans ce cas, la prime d'assurance de l'individu est égale à un montant πQ où π est le prix d'un franc de couverture ($\pi \geq p_0$). On peut écrire l'espérance d'utilité par:

$$EU = p_0 U\left(W_0 + Q\left(1 - \pi\right)\right) + \left(1 - p_0\right) U\left(W_0 + L - \pi Q\right):$$

Le problème de l'assuré consiste à choisir la couverture d'assurance qui maximise son espérance d'utilité [4]:

$$\max_{Q \geq 0} EU = p_0 U(A) + (1 - p_0) U(B)$$

la condition de premier ordre s'écrit:

$$\frac{\delta EU}{\delta Q} = p_0 (1 - \pi) U'(A) - (1 - p_0) \pi U'(B) = 0$$

Si $\pi = p_0$ la prime d'assurance est actuariellement neutre et la couverture d'assurance optimale est dès lors une couverture complète. En revanche, dès que $\pi > p_0$, alors la prime contient un chargement et il est optimal de ne s'assurer que partiellement. En utilisant le processus de différentiation de l'espérance d'utilité de l'individu évaluée au niveau de couverture optimal et grâce au théorème

[4] A des fins de simplifications dans la notation, on pose que

$$\begin{aligned} A &= W_0 + Q(1 - \pi) \\ B &= W_0 + L - \pi Q \end{aligned}$$

de l'enveloppe qui fait en sorte que les termes en $\partial Q^*/\partial W_0$ et $\partial Q^*/\partial p_0$ s'éliminent, on obtient comme valeur du consentement à payer:

$$\mathrm{Cap}_4 = \frac{U(B) - U(A)}{p_0 U'(A) + (1 - p_0) U'(B)}. \tag{7}$$

En utilisant à nouveau le théorème de Taylor-Lagrange, on peut réécrire la valeur du consentement à payer établi en (7) de la manière suivante. On a en effet:

$$U(A) - U(B) = -U'(B)(L - Q^*) + U''(B)\frac{(L - Q^*)^2}{2} + \varepsilon_3$$

ainsi que:

$$E(U') = U'(B) - p_0 U''(B)(L - Q^*) + p_0 \varepsilon_4$$

où

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= \frac{1}{6}U'''(W_3)(L - Q^*)^3 \text{ avec } A < W_3 < B \\ \varepsilon_4 &= \frac{1}{2}U'''(W_4)(L - Q^*)^2 \text{ avec } A < W_4 < B. \end{aligned}$$

Si nous supposons que ε_3 et ε_3 sont négligeables, ce qui se justifie si l'on considère l'hypothèse 1 ou bien encore lorsque l'on suppose que la différence $(L - Q^*)$ est faible, on peut réécrire le consentement à payer de la manière suivante:

$$\mathrm{Cap}_4 = (L - Q^*)\left[\frac{U'(B) - U''(B)\dfrac{L - Q^*}{2}}{U'(B) - p_0 U''(B)(L - Q^*)}\right]. \tag{8}$$

On remarque de l'examen de (8) que si la probabilité de sinistre initiale est égale à 1/2, le terme entre crochets est égal à l'unité ce qui implique que le consentement à payer d'un individu riscophobe qui souscrit une assurance partielle et dont la prime ne dépend pas de la probabilité de sinistre est moins élevé que celui consenti par celui souscrivant une assurance complète. En effet, on a dans ce cas:

$$p_0 = 1/2 \Rightarrow \mathrm{Cap}_4 = L - Q^* < L = \mathrm{Cap}_3.$$

Comme 1/2 est le niveau de probabilité qui égalise Cap_2 et Cap_3, on a aussi:

$$p_0 = 1/2 \Rightarrow \mathrm{Cap}_4 < \mathrm{Cap}_2.$$

Afin de montrer que ce résultat reste valable quel que soit le niveau de p_0, nous allons calculer l'expression de la différence entre Cap_2 et Cap_4. On obtient après mise au même dénominateur et simplification de (5) moins (8):

$$
\begin{aligned}
& U'(W_0+L)\,U'(B)\,Q^* - \\
& U''(W_0+L)\,U'(B)\,L\left(\frac{L}{2} - p_0(L-Q^*)\right) - \\
& U'(W_0+L)\,U''(B)\,(L-Q^*)\left(Lp_0 - \frac{L-Q^*}{2}\right) + \\
& U''(W_0+L)\,U''(B)\,p_0 L\,(L-Q^*)\,\frac{Q^*}{2}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

On peut remarquer que si la probabilité de sinistre est nulle ou unitaire, la couverture d'assurance optimale étant dans ce cas égale à zéro ($Q^* = 0$), on retrouve bien le cas pour lequel l'individu ne souscrit pas d'assurance. On a en effet une valeur nulle pour (9). Par contre, dès que la probabilité de sinistre est supérieure à zéro et sous l'hypothèse H_1, (9) est de signe positif[5]. On peut donc affirmer que quel que soit le niveau de la probabilité initiale $Cap_4 < Cap_2$.

Proposition 7 *Le consentement à payer d'un individu riscophobe partiellement assuré mais dont la prime d'assurance ne dépend pas de la probabilité de sinistre est toujours inférieur à celui consenti par un riscophobe non assuré.*

En outre, on peut aisément déterminer le niveau de probabilité qui égalise Cap_4 et Cap_3: Ce niveau est défini par l'égalisation de (6) et (7) et peut être défini sur base d'approximations[6]. On a en effet:

$$
p_{34} = \frac{\dfrac{U(B) - U(A)}{L} - U'(B)}{U'(A) - U'(B)}
$$

qui peut se reformuler sur base du même processus que celui utilisé précédemment par:

$$
p_{34} = \frac{-\dfrac{Q}{L}U'(B) - U''(B)\dfrac{(L-Q)^2}{2L} + U'''(B)\dfrac{(L-Q)^3}{6L} - \alpha}{-U''(B)(L-Q) + U'''(B)\dfrac{(L-Q)^2}{2} - \beta}
$$

avec α et β comprenant tous les termes d'ordre supérieur à trois. Notons que lorsque la fonction d'utilité présente une dérivée troisième nulle (cfr. quadratique)

---

[5] En effet, si la différence $(L - Q^*)$ est faible, on a:

$$
U'(W_0+L)\,U'(B)\,Q^* - U''(W_0+L)\,U'(B)\,\frac{L^2}{2} > 0
$$

[6] Il est à noter que la couverture d'assurance optimale est elle aussi fonction de ce niveau de probabilité "seuil". On a donc $Q^* = Q^*(p_{34})$.

on a:

$$p_{34} = \frac{L - Q^*}{L}\left[\frac{U'(B)\,Q^*}{U''(B)\,(L - Q^*)^2} + \frac{1}{2}\right] \tag{10}$$

comme le terme de gauche est inférieur à l'unité et que le terme entre crochets est strictement inférieur à 1/2, le niveau de probabilité "seuil" est lui-aussi strictement inférieur à 1/2. On peut aussi tirer de (10) la règle comparative suivante:

$$p_0 \lesseqgtr p_{34} \iff Cap_4 \gtreqless Cap_3$$

et formuler la proposition suivante:

Proposition 8 Pour un niveau de probabilité de sinistre inférieur (égal ou supérieur) à un certain seuil p_{34}, le consentement à payer d'un individu riscophobe et qui souscrit une couverture d'assurance partielle est supérieur (égal ou inférieur) au consentement à payer qui est consenti par son homologue complètement couvert.

On peut illustrer tout ceci graphiquement par:

Il est bien évident que dans ce cas, le consentement à payer n'est défini que dans l'intervalle $[0; \pi]$ (intervalle qui définit une valeur de couverture optimale). Si $\pi = p_0$, la couverture optimale est une couverture complète et le numérateur de (7) est nul ce qui implique que $Cap_4 = 0$.

2.4.2 La prime est dépendante de la probabilité de sinistre.

Dans pareil cas, on peut calculer l'espérance d'utilité de l'individu évaluée au niveau de couverture optimale:

$$\begin{aligned} EU(Q^* < L) = {} & p_0 U(W_0 + Q^* - p_0 Q^*(1+\lambda)) + \\ & (1 - p_0)\, U(W_0 + L - p_0 Q^*(1+\lambda)) \end{aligned}$$

ce qui nous permet, en appliquant le même processus de différentiation que celui utilsé précédemment, de déterminer la valeur du consentement à payer[7]:

$$Cap_5 = \frac{U(B) - U(A)}{p_0 U'(A) + (1 - p_0)\, U'(B)} + Q^*(1 + \lambda) \qquad (11)$$

en utilisant à nouveau le théorème de Taylor-Lagrange, on peut réécrire la valeur du consentement à payer établi en (11) de la manière suivante. On a en effet:

$$U(A) - U(B) = -U'(B)(L - Q^*) + U''(B)\frac{(L - Q^*)^2}{2} + \varepsilon_5$$

ainsi que:

$$E(U') = U'(B) - p_0 U''(B)(L - Q^*) + p_0 \varepsilon_6$$

où

$$\begin{aligned} \varepsilon_5 &= \frac{1}{6} U'''(W_5)(L - Q^*)^3 \text{ avec } A < W_5 < B \\ \varepsilon_6 &= \frac{1}{2} U'''(W_6)(L - Q^*)^2 \text{ avec } A < W_6 < B \end{aligned}$$

si nous supposons que ε_5 et ε_6 sont négligeables, ce qui se justifie si l'on considère l'hypothèse H_1, on peut réécrire le consentement à payer de la manière suivante:

$$Cap_5 = (L - Q^*) \left[\frac{U'(B) - U''(B)\frac{L - Q^*}{2}}{U'(B) - p_0 U''(B)(L - Q^*)} \right] + Q^*(1 + \lambda): \qquad (12)$$

On remarque de l'examen de (12) que si la probabilité de sinistre initiale est égale à 1/2, le terme entre crochets est égal à l'unité ce qui implique que le consentement à payer d'un individu riscophobe qui souscrit une assurance partielle est plus élevé que celui consenti par celui souscrivant une assurance complète. En effet, on a:

$$p_0 = 1/2 \Rightarrow Cap_5 = L - Q^* + Q^*(1 + \lambda) > L = Cap_3$$

Comme 1/2 est le niveau de probabilité qui égalise Cap_2 et Cap_3, on a aussi que

$$p_0 = 1/2 \Rightarrow Cap_5 > Cap_2:$$

[7] A des fins de simplifications dans les notations, on pose:

$$\begin{aligned} A &= W_0 + Q^* - p_0 Q^*(1 + \lambda) \\ B &= W_0 + L - p_0 Q^*(1 + \lambda) \end{aligned}$$

Comme précédemment nous pouvons calculer la différence $Cap_2 - Cap_5$. On obtient après mise au même dénominateur et simplification de la différence exprimée par (5)-(12) dans le cas quadratique:

$$
\begin{aligned}
& U'(W_0+L)\,U'(B)\,(-\lambda Q^*) - \\
& U''(W_0+L)\,U'(B)\,L\left[\frac{L}{2} - p_0(L+\lambda Q^*)\right] - \\
& U'(W_0+L)\,U''(B)\,(L-Q^*)\,Lp_0\left[\frac{L-Q^*}{2} - p_0Q^*(1+\lambda)\right] + \\
& U''(W_0+L)\,U''(B)\,p_0L\,(L-Q^*)\left(\frac{Q^*}{2} - p_0Q^*(1+\lambda)\right)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

A nouveau si la probabilité de sinistre est nulle ou unitaire, la couverture d'assurance optimale est nulle et on retrouve bien le cas pour lequel l'individu ne souscrit pas d'assurance. On a en effet une valeur nulle pour (13). Par contre, dès que la probabilité de sinistre est supérieure à zéro et sous l'hypothèse H_1, (13) est de signe ambigu. Néanmoins, il existe plusieurs niveaux de probabilité p_{25} définis de telle manière à ce qu'il annule l'expression (13). On a en effet une expression quadratique pour (13). Comme il est assez complexe de déterminer de manière analytique la formulation de ce niveau de probabilité, nous avons repris dans la Table 2 une application numérique avec $W_0 = 20; L = 60$ et comme valeur du taux de chargement $\lambda = 0.25$ qui illustre assez bien ce phénomène. On remarque que pour le cas quadratique, on trouve deux valeurs de probabilités qui annulent (13). Néanmoins, l'examen approfondi de la deuxième valeur (0.73333) nous indique qu'elle correspond à une valeur de couverture optimale quasi nulle. On est en effet proche du seuil de positivité de la couverture d'assurance qui est défini pour tout λ inférieur à $(1-p)/p$. De la même manière, on peut donc aussi conclure qu'il existe un niveau de probabilité p_{35} qui est tel qu'il égalise Cap_5 et Cap_3. Ce niveau est défini par [8]:

$$
p_{35} = \frac{L - Q^*}{L - Q^*(1+\lambda)}\left[\frac{U'(B)(-\lambda Q^*)}{U''(B)(L-Q^*)^2} + \frac{1}{2}\right]. \tag{14}
$$

On remarque que lorsque la prime d'assurance est actuariellement neutre ($\lambda = 0$), on retrouve le résultat de la section 2.3. On a en effet $p_{35} = \frac{1}{2}$ qui est donc aussi égal à p_{12}. Par contre, dès que la prime d'assurance comporte un chargement, on peut tirer de l'équation (14) que $p_{35} > \frac{1}{2}$. En effet, le terme de gauche étant supérieur à l'unité et celui entre crochets étant supérieur à 1/2, le niveau total est strictement supérieur à 1/2. On a donc que le niveau de probabilité "seuil" qui égalise Cap_5 et Cap_3 est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$. La Table suivante reprend les

[8] Il est à noter que la couverture d'assurance optimale est elle aussi fonction de ce niveau de probabilité "seuil". On a: $Q^* = Q^*(p_{35})$.

différents niveaux de cette probabilité pour les trois fonctions d'utilités retenues.

	Quadratique ($\beta = 0.005$)	Exponentielle ($\rho = 0.05$)	Logarithmique
p_{25}	0.366667; 0.733333	0.217838	0.179073
p_{35}	0.642617	0.728813	0.648439

On peut aussi tirer de (14) la règle comparative suivante:

$$p_0 \lesseqgtr p_{35} \iff Cap_5 \gtreqless Cap_3.$$

On peut donc formuler la proposition suivante:

Proposition 9 *Pour un niveau de probabilité de sinistre inférieur (égal ou supérieur) à un certain seuil p_{35}, le consentement à payer d'un individu riscophobe et qui souscrit une couverture d'assurance partielle est supérieur (égal ou inférieur) au consentement à payer qui est consenti par son homologue complètement couvert.*

3 Possibilité pour l'individu d'investir en activités d'autoprotection.

Examinons maintenant la situation dans laquelle les individus supportent eux-même une partie de leur propre risque par le biais de leurs choix effectifs d'autoprotection. Nous allons montrer comment ces montants de dépenses optimaux agissent sur le choix optimal du montant préventif public. Comme précédemment, on considère un individu qui possède deux actifs: W_0 qui est non risqué et L qui est exposé à un risque de sinistre de probabilité $p(p_0; x)$. On peut par exemple considérer comme fonction de densité de probabilité une relation de type exponentiel: $p(x; p_0) = p_0 \exp^{-\mu x}$ [9]. On peut aussi utiliser une fonction de densité de Pareto de type: $p(x; p_0) = p_0 (1/x)^{\gamma+1}$ définie pour des valeurs de $x \geq 1$ [10]. Dans ce modèle, l'individu peut influencer les probabilités des événements aléatoires grâce à la variable x (le niveau de dépenses d'autoprotection) et p_0 est la probabilité "seuil" atteinte par un individu qui déciderait de ne rien investir dans x. En outre, on suppose que $p_x(p_0; x) < 0$ (plus l'individu dépense en prévention, plus la probabilité de sinistre sera faible), $p_{xx}(p_0; x) \geq 0$ ainsi que $p_{p_0}(x) \leq 1$ et $p_{p_0 x}(x) < 0$. Cet investissement en autoprotection présente un coût que nous supposerons additivement séparable par rapport à la fonction d'utilité [11]. Cette

[9] Dans ce cas, on obtient comme expressions des dérivées premières et secondes par rapport à x: $p_x(x; p_0) = -\mu p_0 \exp^{-\mu x} < 0$ ainsi que $p_{xx}(x; p_0) = \mu^2 p_0 \exp^{-\mu x} > 0$, $p_{p_0}(x) = \exp^{-\mu x} \leq 1$ et $p_{p_0 x}(x) = -\mu \exp^{-\mu x} < 0$.

[10] Dans ce cas, on a: $p_x(x; p_0) = -p_0 (\gamma + 1)(1/x)^{\gamma+2} < 0$ et $p_{xx}(x; p_0) = p_0 (\gamma + 1)(\gamma + 2)(1/x)^{\gamma+3} > 0$

[11] Cette hypothèse est particulière mais très utilisée (voir à ce propos Holmstrom [9], Dionne [5], Arnott et Stiglitz [1]).

hypothèse est nécessaire si l'on veut éviter le problème (étudié par Mirrlees [11] et Rogerson [14]) que pose une approche par les conditions de premier ordre qui doit impérativement identifier une solution optimale globale. La fonction de coût d'autoprotection $C(x)$ est supposée croissante et convexe (on a $C_x(x) > 0$, $C_{xx}(x) \geq 0$ avec $C(0) = C_x(0) = 0$). Afin de simplifier l'analyse, nous supposons que la prime d'assurance est actuariellement neutre, c'est à dire que le taux de chargement est nul. Si nous supposons que suite à une action publique de prévention, le niveau de la probabilité "seuil" peut être réduit cela implique que les individus sont capables de définir des niveaux de consentement à payer correspondant à cette baisse exogène du niveau "seuil". Quatre scénarios sont successivement examinés qui incluent tous la possibilité qu'à l'individu d'exercer des activités d'autoprotection. Tout d'abord, nous considérons le cas simple d'un individu neutre au risque pour ensuite introduire la notion d'aversion au risque. L'étape suivante consiste à introduire une autre stratégie de réduction du risque qui est le transfert à un assureur en échange d'une couverture d'assurance. Deux cas sont analysés, à savoir celui d'information parfaite entre assuré et assureur et d'asymétrie d'information conduisant au modèle de risque moral.

3.1 L'individu est neutre vis-à-vis du risque.

Nous supposons que cet individu a la possibilité d'effectuer des activités d'autoprotection qui réduisent sa probabilité de sinistre à un niveau inférieur à p_0. Afin de déterminer son niveau optimal de dépenses préventives qui sera noté x_1^*, l'individu est amené à résoudre le problème de maximisation par rapport à la variable x_1 de la fonction suivante:

$$\max_{x_1} EU = p(p_0, x_1)\, b W_0 + (1 - p(p_0, x_1))\, b (W_0 + L) - C(x_1)$$

la condition de premier ordre sur x_1 nous donne:

$$-p_{x_1} b L - C_{x_1} = 0. \tag{15}$$

Comme p_{x_1} est de signe négatif pour toute valeur de x_1 supérieure ou égale à zéro, l'équation (15) nous indique que x_1^* est de signe positif. Pour déterminer la valeur du consentement à payer, différentions totalement l'espérance d'utilité évaluée à l'optimum des dépenses d'autoprotection et ce, par rapport à p_0 et à W_0. On remarque que grâce à l'utilisation du théorème de l'enveloppe, les termes en $\partial x_1^*/\partial p_0$ et en $\partial x_1^*/\partial W_0$ s'éliminent. Il ne reste plus que:

$$Cap_6 = \frac{p_{p_0}(x_1^*)\, bL}{b} = p_{p_0}(x_1^*)\, L \tag{16}$$

sur base de la comparaison entre Cap_1 et Cap_6, on peut formuler:

Proposition 10 *Le consentement à payer d'un individu risconeutre qui effectue des dépenses d'autoprotection est toujours plus faible que celui octroyé par son homologue qui n'en effectue pas. On a donc:*

$$Cap_6 < Cap_1$$

En effet, on peut remarquer que pour tout $x_1^* > 0$; on a par hypothèse $p_{p_0}(x_1^*) < 1$ ce qui implique que le consentement à payer défini en (16) est plus faible que celui évalué en (1).

3.2 L'individu est riscophobe sans possibilité d'assurance.

Le deuxième cas de figure que l'on peut envisager est d'introduire l'aversion vis-à-vis du risque dans l'analyse. Un individu riscophobe qui effectue des dépenses d'autoprotection est amené à résoudre le problème de maximisation par rapport à la variable x_2 de la fonction suivante:

$$\max_{x_2} EU = p(p_0; x_2) U(W_0) + (1 - p(p_0; x_2)) U(W_0 + L) - C(x_2)$$

la condition de premier ordre sur x_2 nous donne le montant optimal préventif x_2^* tel que:

$$p_{x_2}[U(W_0) - U(W_0 + L)] - C_{x_2} = 0 \tag{17}$$

de nouveau, le théorème de l'enveloppe peut s'appliquer et nous obtenons après différentiation totale comme valeur du consentement à payer:

$$Cap_7 = \frac{p_{p_0}(x_2^*)[U(W_0 + L) - U(W_0)]}{p(p_0; x_2^*) U'(W_0) + (1 - p(p_0; x_2^*)) U'(W_0 + L)} \tag{18}$$

Afin de parvenir à établir une comparaison valable entre (2) et (18) nous supposons (comme précédemment) que l'on peut approximer la valeur de (18) en utilisant le théorème de Taylor-Lagrange afin d'obtenir:

$$U(W_0) - U(W_0 + L) = -U'(W_0 + L) L + U''(W_0 + L) \frac{L^2}{2} + \varepsilon_7$$

ainsi que:

$$E(U')_{(p_0; x_2^*)} = U'(W_0 + L) - p(p_0; x_2^*) U''(W_0 + L) L + p(p_0; x_2^*) \varepsilon_8$$

où:

$$\begin{aligned} \varepsilon_7 &= \frac{1}{6} U'''(W_7) L^3 \text{ avec } W_0 < W_7 < W_0 + L \\ \varepsilon_8 &= \frac{1}{2} U'''(W_6) L^2 \text{ avec } W_0 < W_8 < W_0 + L \end{aligned}$$

si nous supposons que Ψ_7 et Ψ_8 sont négligeables (on suppose que l'on peut approximer la fonction d'utilité par une fonction quadratique de prudence nulle comme le stipule l'hypothèse H_1), on a:

$$Cap_7 = p_{p_0}(x_2^*) L \frac{U'(W_0+L) - U''(W_0+L)\frac{L}{2}}{U'(W_0+L) - p(p_0;x_2^*)U''(W_0+L)L} \tag{19}$$

afin de comparer les valeurs données par (5) et par (19), déterminons le signe de $Cap_7 - Cap_2$:

$$L\Delta_1 \frac{U'(W_0+L)\left[p_{p_0}(x_2^*) - 1\right] - U''(W_0+L)L\left[p_0\, p_{p_0}(x_2^*) - p(p_0;x_2^*)\right]}{\Delta_2 \Delta_3} \tag{20}$$

avec:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= U'(W_0+L) - U''(W_0+L)\frac{L}{2} \\ \Delta_2 &= U'(W_0+L) - p(p_0;x_2^*)U''(W_0+L)L \\ \Delta_3 &= U'(W_0+L) - p_0 U''(W_0+L)L \end{aligned}$$

or, comme les fonctions de densité de probabilités qui ont été retenues (à savoir l'exponentielle négative ou la fonction de densité de Pareto) ont toutes deux la propriété suivante (hypothèse H_2):

$$p(p_0;x) = p_0\, p_{p_0}(x) \tag{21}$$

nous pouvons réinjecter (21) dans l'expression (20). Comme $p_{p_0}(x_2^*)$ est inférieure à l'unité, on peut conclure que (20) est de signe négatif, ce qui nous conduit à la proposition suivante:

Proposition 11 Sous les hypothèse H_1 et H_2, le consentement à payer d'un individu riscophobe qui effectue des dépenses d'autoprotection est toujours plus faible que celui consenti par son homologue qui n'en effectue pas. On a donc:

$$Cap_7 < Cap_2$$

3.3 l'individu est riscophobe avec possibilité d'assurance et information parfaite.

Le troisième scénario envisagé est celui dans lequel l'information entre assureur et assuré est parfaite et connue de tous. L'assureur peut observer à tout moment le montant de dépenses préventives octroyé par l'individu (sans aucun coût) et fixer en conséquence le prix de l'assurance. On sait que dans ce cas, il est optimal pour l'individu de souscrire une assurance complète (absence de risque moral). Lorsque l'on prend en considération les activités d'autoprotection, le problème de l'individu consiste dès lors à choisir son niveau optimal de dépenses préventives x_3^* qui maximise son espérance d'utilité à l'optimum de la couverture d'assurance ($Q^* = L$). L'individu est donc amené à résoudre le problème de maximisation suivant:

$$\max_{x_3} EU\,(Q^* = L) = U\,(W_0 + L\,(1 - p\,(p_0; x_3))) - C\,(x_3)$$

La condition de premier ordre sur x_3 nous donne:

$$-p_{x_3} LU'\,(W_0 + L\,(1 - p\,(p_0; x_3))) - C_{x_3} = 0 \qquad (22)$$

On remarque que même sous un régime de pleine assurance, l'individu peut avoir intérêt à effectuer des activités d'autoprotection qui maintiennent sa prime au niveau le plus bas possible. Comme précédemment et par application du théorème de l'enveloppe, écrivons l'expression du consentement à payer d'un individu riscophobe qui a la possibilité d'assurer totalement son actif risqué:

$$Cap_8 = \frac{p_{p_0}\,(x_3^*)\,LU'\,(W_0 + L\,(1 - p\,(p_0; x_3^*)))}{U'\,(W_0 + L\,(1 - p\,(p_0; x_3^*)))} = p_{p_0}\,(x_3^*)\,L \qquad (23)$$

de plus, on peut tirer de la comparaison entre Cap_8 et Cap_3 :

Proposition 12 Le consentement à payer d'un individu riscophobe parfaitement assuré et qui effectue des activités d'autoprotection est toujours plus faible que celui octroyé par son homologue qui n'en effectue pas. On a donc:

$$Cap_8 < Cap_3$$

En effet, on peut remarquer que pour tout $x_3^* > 0$; on a par hypothèse $p_{p_0}\,(x_3^*) < 1$ ce qui implique que le consentement à payer défini en (23) est plus faible que celui évalué en (6).

3.4 l'individu est riscophobe avec possibilité d'assurance et risque moral.

Le quatrième cas est celui du risque moral. Nous allons maintenant supposer qu'il est impossible pour l'assureur d'observer x, ce qui revient à dire que les activités d'autoprotection de l'assuré n'influencent plus le prix de l'assurance. L'individu est donc amené à résoudre dans un premier temps le problème de maximisation à Q et à π donnés, c'est à dire:

$$\begin{aligned}\max_{x_4} EU &= p\,(p_0; x_4)\,U\,(W_0 + Q - \pi\,(Q)) + \\ &\quad (1 - p\,(p_0; x_4))\,U\,(W_0 + L - \pi\,(Q)) - C\,(x_4)\end{aligned}$$

la condition de premier ordre sur x_4 nous indique que:

$$p_{x_4}\left[U\left(W_0+Q-\pi(Q)\right)-U\left(W_0+L-\pi(Q)\right)\right]-C_{x_4}=0 \tag{24}$$

on remarque immédiatement que dans un régime de pleine assurance, l'individu n'a aucune motivation à exercer des activités d'autoprotection ($x_4^* = 0$)[12]. Une couverture d'assurance partielle réduit le risque moral mais ne l'élimine pas nécessairement. Néanmoins, Shavell [16] a démontré qu'une couverture partielle d'assurance est préférable à une couverture totale sous risque moral. De plus, il est possible de démontrer que le niveau optimal des activités d'autoprotection est plus faible lorsque celles ci ne sont pas observables par la compagnie[13]. C'est l'essence même du risque moral: la couverture d'assurance n'incite pas les individus à s'autoprotéger car leur prime d'assurance n'est pas affectée par la hausse de x (même si la probabilité de sinistre s'en trouve réduite). La condition de choix de couverture est donnée par:

$$\begin{aligned}\max_Q EU &= p\left(p_0, x_4(Q)\right)U\left[W_0+Q-p\left(p_0, x_4(Q)\right)Q\right]+\\&\quad\left(1-p\left(p_0, x_4(Q)\right)\right)U\left[W_0+L-p\left(p_0, x_4(Q)\right)Q\right]-C\left[x_4(Q)\right]\end{aligned}$$

si l'on pose:

$$\begin{aligned}A &= W_0+Q-p\left(p_0, x_4(Q)\right)Q\\B &= W_0+L-p\left(p_0, x_4(Q)\right)Q\end{aligned}$$

la condition de premier ordre est égale à:

$$\begin{aligned}&p_{x_4}x_4'(Q)\left[U(A)-U(B)\right]-C_{x_4}x_4'(Q)+\\&p\left(p_0, x_4(Q)\right)U'(A)\left[1-p_{x_4}x_4'(Q)Q-p\left(p_0, x_4(Q)\right)\right]+\\&\left[1-p\left(p_0, x_4(Q)\right)\right]U'(B)\left[-p_{x_4}x_4'(Q)Q-p\left(p_0, x_4(Q)\right)\right]=0\end{aligned}$$

ce qui peut se simplifier à l'équilibre en utilisant la condition de premier ordre sur x_4 (24) pour avoir :

$$p\left(p_0, x_4(Q)\right)U'(A)=E\left(U'\right)\left[p_{x_4}x_4'(Q)Q+p\left(p_0, x_4(Q)\right)\right].$$

On remarque immédiatement que lorsqu'il n'y a pas de risque moral ($p_{x_4} = 0$), on obtient l'égalité $U'(A) = E(U')$ qui implique nécessairement la solution de pleine assurance $Q^* = L$. On peut montrer qu'à l'optimum et en présence de

[12] En effet, si $Q = L$, le terme entre crochets de (24) s'annule ce qui implique que $C_{x_4} = 0$: La seule possibilité est donc que x_4^* soit égal à zéro.

[13] Il suffit en effet de différentier totalement l'expression (24) et de montrer que $\frac{dx_4}{dQ} = x_4'(Q)$ est inférieur à zéro.

risque moral, on se situe bien en situation d'assurance partielle[14]. De plus, si on évalue la condition de premier ordre en $Q = 0$, celle-ci a une valeur positive ce qui indique que la couverture est positive. Il est important de noter que le risque moral ne détruit pas l'assurance. Afin de déterminer le consentement à payer, on différentie totalement l'espérance d'utilité en $x_4(Q^*)$ par rapport à p_0 et à W_0 et on obtient grâce au théorème de l'enveloppe [15]:

$$Cap_9 = \frac{p_{p_0}(x_4^*)\,[U(B) - U(A)]}{p(p_0;x_4^*)\,U'(A) + (1 - p(p_0;x_4^*))\,U'(B)} + p_{p_0}(x_4^*)\,Q^*. \qquad (25)$$

Si on effectue des approximations de Taylor, on peut reformuler (25) de la manière suivante en utilisant:

$$U(A) - U(B) = -U'(B)(L - Q^*) + U''(B)\frac{(L - Q^*)^2}{2} + \varepsilon_9$$

ainsi que

$$E(U')_{(p_0;x_4^*)} = U'(B) - p(p_0;x_4^*)\,U''(B)(L - Q^*) + p(p_0;x_4^*)\,\varepsilon_{10}$$

où

$$\begin{aligned}\varepsilon_9 &= \frac{1}{6}U'''(W_9)(L - Q^*)^3 \text{ avec } A < W_9 < B\\ \varepsilon_{10} &= \frac{1}{2}U'''(W_{10})(L - Q^*)^2 \text{ avec } A < W_{10} < B\end{aligned}$$

comme précédemment, sous l'hypothèse 1 on peut négliger les termes ε_9 et ε_{10} et réécrire (25) par:

$$p_{p_0}(x_4^*)(L - Q^*)\left[\frac{U'(B) - U''(B)\frac{(L - Q^*)}{2}}{U'(B) - p(p_0;x_4^*)\,U''(B)(L - Q^*)}\right] + p_{p_0}(x_4^*)\,Q^*. \qquad (26)$$

On peut remarquer la similarité de cette dernière équation avec celle qui fournit le consentement à payer dans le cas de la section 2.4.2 (assurance partielle sans possibilités d'autoprotection).

---

[14] En effet, on a:

$$\begin{aligned} & p(p_0;x_4(Q))\,[U'(A) - E(U')]\\ = \; & p_{x_4}x_4'(Q)\,Q\,E(U').\end{aligned}$$

Comme le terme de droite est positif, le terme de gauche doit l'être lui aussi, ce qui implique que $U'(A) > E(U')$ et donc que $Q^* < L$.

[15] A des fins de simplifications dans la notation, on pose:

$$p(p_0;x_4(Q^*)) = p(p_0;x_4^*)$$

4 Comparaison des consentements à payer avec possibilité d'autoprotection.

A ce niveau de l'analyse, il serait intéressant de comparer entre eux les différents niveaux de consentements à payer dégagés dans la section 3. Pour ce faire, nous devons dans un premier temps comparer les différents niveaux optimaux d'autoprotection entre eux qui conditionnent le niveau du consentement à payer.

4.1 Risconeutre vs. riscophobe sans assurance.

Comparons dans un premier temps les niveaux x_1^* et x_2^* déterminés respectivement par les conditions de premier ordre (15) et (17). Si on évalue (15) en x_2^*, on obtient l'expression suivante dont il faut déterminer le signe

$$-p_{x_2^*}\beta L - C_{x_2^*} \tag{27}$$

par (17), on peut isoler la valeur de $C_{x_2^*}$ que l'on substitue dans (27) pour avoir après division par L :

$$-p_{x_2}\left[\beta - \left(\frac{U(W_0+L) - U(W_0)}{L}\right)\right] \gtrless 0.$$

Le signe de cette expression dépend du rapport entre d'une part la pente de la droite d'utilité de l'individu risconeutre et d'autre part de la pente de la droite passant par les points de coordonnées $(W_0; U(W_0))$ et $(W_0 + L; U(W_0 + L))$. On a donc la règle de comparaison suivante qui s'applique:

$$\beta \gtrless Tg(\alpha) \iff x_1^* \gtrless x_2^*.$$

Il est intéressant de noter que la prédominance d'un niveau optimal d'autoprotection sur l'autre ne dépend que des paramètres du modèle, à savoir $\beta; W_0$ et L. A titre d'exemple, la figure suivante illustre le cas pour lequel (27) est de signe négatif, ce qui conduit à $x_1^* < x_2^*$.

Sous l'hypothèse 1, les deux valeurs des consentements à payer définies respectivement par (16) et (19) peuvent dès lors être comparées. Pour ce faire, déterminons le signe de $Cap_5 - Cap_6$ qui est égal au signe de:

$$\begin{aligned} & U'(W_0+L)\,L\,[p_{p_0}(x_1^*) - p_{p_0}(x_2^*)] - \\ & U''(W_0+L)\,L^2\left[p(p_0;x_2^*)\,p_{p_0}(x_1^*) - \frac{1}{2}\,p_{p_0}(x_2^*)\right]. \end{aligned} \tag{28}$$

Le signe de (28) dépend d'une part des grandeurs relatives des deux dépenses optimales d'autoprotection et d'autre part de la probabilité de sinistre $p(p_0; x_2^*)$. Le tableau suivant résume ces différentes situations.

	$x_1^* < x_2^*$	$x_1^* = x_2^*$	$x_1^* > x_2^*$
$p(p_0; x_2^*) < 1/2$	?	$Cap_6 < Cap_7$	$Cap_6 < Cap_7$
$p(p_0; x_2^*) = 1/2$	$Cap_6 > Cap_7$	$Cap_6 = Cap_7$	$Cap_6 < Cap_7$
$p(p_0; x_2^*) > 1/2$	$Cap_6 > Cap_7$	$Cap_6 > Cap_7$	?

4.2 Risconeutre vs. riscophobe pleinement assuré.

Afin de comparer les niveaux x_1^* et x_3^* déterminés respectivement par les conditions de premier ordre (15) et (22), on évalue (15) en x_3^* pour obtenir l'expression suivante que l'on doit signer:

$$-p_{x_3^*} bL - C_{x_3^*} \tag{29}$$

par (22), on peut isoler la valeur de $C_{x_3^*}$ que l'on substitue dans (29) pour avoir:

$$-p_{x_3}\left[b - U'\left(W_0 + L\left(1 - p\left(x_3^*; p_0\right)\right)\right)\right] \gtreqless 0.$$

Le signe de cette dernière expression dépend de la différence des deux termes situés entre crochets: On a en effet:

$$b \gtreqless U'\left(W_0 + L\left(1 - p\left(x_3^*; p_0\right)\right)\right) \Longleftrightarrow x_1^* \gtreqless x_3^*.$$

Ceci nous conduit à la comparaison des valeurs respectives de (1) et (6) qui sont reprises dans la Table ci après:

$x_1^* < x_3^*$	$x_1^* = x_3^*$	$x_1^* > x_3^*$
$Cap_6 > Cap_8$	$Cap_6 = Cap_8$	$Cap_6 < Cap_8$

On obtient par exemple que dans le cas le où un risconeutre sans assurance investit plus en activités d'autoprotection qu'un riscophobe pleinement assuré, son consentement à payer sera moins important que celui octroyé par ce dernier.

4.3 Riscophobe sans assurance vs. riscophobe pleinement assuré.

Il nous reste à comparer entre eux les deux niveaux x_2^* et x_3^* déterminés par les conditions de premier ordre (17) et (22). Pour ce faire, on évalue (17) en x_3^* pour obtenir l'expression suivante que l'on doit signer:

$$-p_{x_3^*}\left[U\left(W_0 + L\right) - U\left(W_0\right)\right] - C_{x_3^*}. \tag{30}$$

Par (22), on peut isoler la valeur de $C_{x_3^*}$ que l'on substitue dans (30) pour avoir:

$$-p_{x_3}\left[U\left(W_0 + L\right) - U\left(W_0\right) - LU'\left(W_0 + L\left(1 - p\left(x_3^*; p_0\right)\right)\right)\right] \gtreqless 0$$

qui, lorsque l'on divise cette expression par L; dépend du rapport entre $Tg(\alpha)$ et $U'(W_0 + L(1 - p(x_3^*; p_0)))$. On a:

$$Tg(\alpha) \gtreqless U'(W_0 + L(1 - p(x_3^*; p_0))) \iff x_2^* \gtreqless x_3^*.$$

Come précédemment, sous l'hypothèse 1, les deux valeurs des consentements à payer définies respectivement par (19) et (23) peuvent dès lors être comparées. Pour ce faire, déterminons le signe de $Cap_7 - Cap_6$ qui est égal au signe de:

$$\begin{aligned} & U'(W_0 + L) L \left[p_{p_0}(x_3^*) - p_{p_0}(x_2^*)\right] - \\ & U''(W_0 + L) L^2 \left(p(p_0; x_2^*) p_{p_0}(x_3^*) - \frac{1}{2} p_{p_0}(x_2^*)\right). \end{aligned} \tag{31}$$

Le signe de (31) dépend d'une part des grandeurs relatives des deux dépenses optimales d'autoprotection et d'autre part de la probabilité de sinistre $p(p_0; x_2^*)$. La Table suivante résume ces différentes situations.

	$x_2^* < x_3^*$	$x_2^* = x_3^*$	$x_2^* > x_3^*$
$p(p_0; x_2^*) < 1/2$	$Cap_8 < Cap_7$	$Cap_8 < Cap_7$	?
$p(p_0; x_2^*) = 1/2$	$Cap_8 < Cap_7$	$Cap_8 = Cap_7$	$Cap_8 > Cap_7$
$p(p_0; x_2^*) > 1/2$	?	$Cap_8 > Cap_7$	$Cap_8 > Cap_7$

4.4 Riscophobe pleinement assuré vs. Riscophobe sous risque moral.

On a comme expression de la différence $Cap_8 - Cap_9$ la valeur suivante:

$$\begin{aligned} & U'(B) L \left[p_{p_0}(x_3^*) - p_{p_0}(x_4^*)\right] - \\ & U''(B)(L - Q^*) \left[\begin{array}{l} L \left(p(p_0; x_4^*) p_{p_0}(x_3^*) - \frac{1}{2} p_{p_0}(x_4^*)\right) - \\ Q^* \left(p(p_0; x_4^*) p_{p_0}(x_4^*) - \frac{1}{2} p_{p_0}(x_4^*)\right) \end{array}\right]. \end{aligned}$$

On suppose que x_4^* est inférieur à x_3^* ce qui implique que $p_{p_0}(x_3^*) < p_{p_0}(x_4^*)$. On obtient dans ce cas la règle comparative suivante:

$$p(p_0; x_4^*) = \frac{1}{2} \Rightarrow Cap_8 < Cap_9$$

la prise en considération du risque moral augmente le consentement à payer.

5 Conclusions.

On a comme premier résultat que le consentement à payer d'un individu risconeutre est toujours égal à celui d'un riscophobe complètement assuré. Ce résultat est intuitif et indique que l'individu pleinement assuré n'a en quelque sorte "plus à s'occuper" de son risque. Un deuxième résultat est que le consentement à payer d'un individu complètement assuré peut être supérieur à celui d'un riscophobe qui n'a pas la possibilité de s'assurer. Par contre, le consentement à payer d'un individu partiellement assuré dont la prime est ndépendante de la probabilité de sinistre peut être inférieur à celui d'un individu complètement assuré, tout comme peut l'être le consentement à payer d'un individu partiellement assuré dont la prime est dépendante de la probabilité de sinistre. En ce qui concerne la comparaison avec les individus n'ayant pas la possibilité de s'assurer, le consentement à payer d'un individu partiellement assuré dont la prime est indépendante de la probabilité de sinistre est toujours inférieur à celui d'un individu non assuré. Mais le consentement à payer d'un individu partiellement assuré dont la prime est dépendante de la probabilité de sinistre peut être supérieur à celui d'un individu non assuré.

De plus, nous avons pu déterminer que lorsque l'individu a la possibilité d'investir dans des activités d'autoprotection, à situation égale, il consentira à payer moins que son homologue qui n'en effectue pas. Le risque moral fait baisser le niveau de la volonté à payer. Par contre, les comparaisons entre les différents niveaux de consentements à payer établis sur base de la possibilité offerte ou pas de s'assurer est plus délicate. Elle est en effet intimement liée à la comparaison des niveaux optimaux consentis en activités d'autoprotection.

References

[1] Arnott, R and J. Stiglitz. (1983) : "Moral Hazard and Optimal Commodity Taxation," Cahier de recherche #500, Queen's University.

[2] Belhadji, E.B. (1994) : "Etudes sur la valeur de la vie et de la sécurité: théorie et application au transport," Thèse de Doctorat, Université de Montréal, Publication CRT-94-62.

[3] Dionne, G. (1981). "Le risque moral et la sélection adverse: une revue critique de la littérature," L'Actualité économique 57, 193-225.

[4] Dionne, G and L. Eeckhoudt. (1985) : "Self-Insurance, Self-Protection and Increased Risk Aversion," Economics Letters 17, 39-42.

[5] Dionne, G. (1982) : "Moral Hazard and State-Dependent Utility Function," Journal of Risk and Insurance 49, 405-423.

[6] Eeckhoudt, L and Ph. Godfroid and C. Gollier. (1997) : "Willingness to Pay, the Risk Premium and Risk Aversion," A paraître dans Economics Letters.

[7] Ehrlich, I and G. Becker. (1972) : "Market Insurance, Self-insurance and Self-Protection," Journal of Political Economy 40, 623-648.

[8] Godfroid, Ph. (1996) : "Deux essais sur la valeur économique de la prévention," Thèse de Doctorat, Facultés Universitaires Catholiques de Mons et Université des Sciences Sociales de Toulouse.

[9] Holmstrom, B. (1979) : "Moral Hazard and Observability," Bell Journal of Economics 10, 74-91.

[10] Jones-Lee, M. (1974). "The Value of Changes in the Probability of Death or Injury," Journal of Political Economy 82, 835-849.

[11] Mirrlees, J. A. (1975). "The Theory of Moral Hazard and Unobservable Behaviour," mimeo. Nuffield College, Oxford.

[12] Mossin, J. (1968) : "Aspects of Rational Insurance Purchasing," Journal of Political Economy 76, 553-568.

[13] Pratt, J and R. Zeckhauser. (1987) : "Proper Risk Aversion", Econometrica 55, 143-154.

[14] Rogerson, W. (1985). "The First-Order Approach to Principal-Agent Problems," Econometrica 53, 1357-1368.

[15] Scarmure, P. (1992) : "Essais sur la demande d'assurance en présence de risques multiples," Thèse de Doctorat, Université des Sciences Sociales de Toulouse.

[16] Shavell, S. (1979). "On Moral Hazard and Insurance," Quarterly Journal of Economics 93, 541-562.

[17] Smith, V. (1968). "Optimal Insurance Coverage," Journal of Political Economy 76, 68-77.