

HEC MONTRÉAL

**Application empirique du modèle de Brockman et Turtle (2003) au calcul
du risque de défaut d'entreprises publiques canadiennes.**

Par

Jonathan Amar

*Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maîtrise ès sciences
(M.Sc.)*

Avril 2007

© Jonathan Amar, 2007

Sommaire

L'objectif de ce mémoire est d'appliquer la méthodologie proposée par Brockman et Turtle (2003) à un échantillon d'entreprises publiques canadiennes dont les actions sont transigées à la Bourse de Toronto. Le modèle en question a largement contribué à l'évolution de la théorie des options, introduite initialement par Merton (1974), en incorporant l'utilisation d'options à barrières. Cependant, certains économistes (Wong, Choi 2006) ont récemment décelé une erreur importante au **niveau de l'application du modèle de Brockman et Turtle (2003) dans leur propre article** qui a comme effet de biaiser le calcul des probabilités de défaut des firmes. Par conséquent, une application adéquate du modèle se doit d'estimer, au préalable, les valeurs des actifs des firmes, leur volatilité et les barrières de défaut par la procédure du maximum de vraisemblance. La modélisation proposée par Duan, Gauthier et Simonato (2004) du modèle de Brockman et Turtle sera retenue dans ce mémoire. Dans un travail parallèle, Dionne et al. (2005) ont appliqué un modèle hybride afin de calculer le risque de défaut des entreprises publiques canadiennes. Leur composante structurelle fixait la barrière de défaut égale à la valeur nominale de la dette. La même base de données sera utilisée dans ce mémoire afin d'illustrer l'impact de rendre endogène la barrière de défaut des firmes. Les résultats de cette étude démontrent que la majorité des firmes étudiées possèdent des barrières de défaut inférieures à leur endettement. Par ailleurs, les capacités prédictives des modèles hybrides présentés dans Dionne et al. (2005) sont améliorées lorsque leur composante structurelle est substituée par celle présentée dans cet ouvrage.

Mots clés : Théorie des options, options à barrières, barrières de défaut, méthode du maximum de vraisemblance, probabilités de défaut.

Remerciements

À prime abord, je tiens à remercier mon directeur de mémoire, M. Georges Dionne, pour son expertise, sa grande disponibilité et ses conseils judicieux. Je tiens à remercier également Sadok Laajimi qui m'a offert une aide inestimable au niveau de la collecte des données et de la programmation des modèles.

Je tiens à remercier les membres du jury, M. Jean-Guy Simonato et M. Nicolas A. Papageorgiou pour avoir accepté d'évaluer ce mémoire.

De plus, je suis très reconnaissant de l'aide financière qui m'a été offerte par le Centre de Recherche en e-Finance (CREF) et la Chaire de recherche du Canada en gestion des risques.

Finalement, j'aimerais remercier les membres de ma famille et mes amis pour leur soutien inconditionnel.

Table des matières

	Page
1. Introduction	1
2. Revue de littérature des modèles structurels de risque de crédit	5
Extensions du modèle de Merton :	
2.2 Le moment du défaut	7
2.3 Le taux d'intérêt sans risque	7
2.4 Le type d'option utilisé	8
2.5 Le manque d'observabilité de la valeur des actifs	11
3. Méthodologie	
3.1 Équations et hypothèses du modèle de Merton (1974)	16
3.2 Modèle de Brockman et Turtle (2003)	19
3.3 Adaptation du modèle de Brockman et Turtle (2003) par la méthode du maximum de vraisemblance	23
3.4 Spécificités de l'estimation du modèle proposé.....	25
4. Base de données	
4.1 Les entreprises ayant fait défaut.....	27
4.2 Les entreprises n'ayant pas fait défaut	29
4.3 Statistiques sur l'ensemble des entreprises conservées pour l'analyse.....	30
4.4 Décalage des données comptables	31
4.5 Le taux sans risque	32
5. Présentation des résultats	
5.1 Résultats de l'estimation du modèle de Brockman et Turtle (2003) par maximum de vraisemblance.....	34
5.2 Performance des modèles hybrides.....	41
5.3 Discussion de la différence des résultats obtenus	45
6. Conclusion	48
7. Bibliographie	49
8. Annexes	52

Liste des tableaux

	Page
1. Extrait de la table 2 de l'article de Brockman et Turtle (2003)	12
2. Valeurs retenues pour les variables clés de l'estimation	25
3. Distribution des défauts et des réorganisations avant nettoyage des données	28
4. Statistiques descriptives des 108 entreprises ayant fait défaut.....	29
5. Statistiques descriptives de toutes les entreprises listées à la Bourse de Toronto n'ayant pas fait défaut.....	29
6. Statistiques descriptives des entreprises conservées pour l'analyse	30
7. Fréquence par année des données utilisées pour le modèle final	32
8. Statistiques descriptives du taux sans risque (1984 à 2004)	33
9. Statistiques descriptives des paramètres μ et σ obtenus par l'estimation de maximum de vraisemblance	35
10. Statistiques descriptives de la barrière de défaut et du ratio barrière sur dette obtenus par l'estimation de maximum de vraisemblance	35
11. Distribution du ratio barrière-sur-dette (H/X) par percentiles	35
12. Comparaison des résultats entre la méthodologie de Brockman et Turtle (2003) et la méthodologie suivie dans ce mémoire	37
13. Statistiques descriptives des probabilités de défaut obtenues par la méthode de maximum de vraisemblance et par la composante structurelle de Dionne et al. (2005)	38
14. Tests paramétriques : Comparaisons des résultats issus de Dionne et al. (2005) et ceux issus de ce mémoire	38
15. Évolution des probabilités de défaut prédites par année.....	39
16. Comparaison des résultats des modèles hybrides à barrière endogène et à barrière exogène.....	42
17. Performance de prédiction des défauts	45

Liste des figures

	Page
1. Évolution des écarts du taux de crédit et la volatilité des actions de Siemens	2
2. L'approche KMV de Moody's	14
3. Évolution trimestrielle des probabilités de défaut (PD) prédites de la firme Discoverware Inc. (Janvier 1999 à Janvier 2001)	40
4. Évolution annuelle des probabilités de défaut (PD) prédites et de la volatilité des actions de la firme Algo Group Inc. de 1990 à 2004.....	40
5. Graphique des gains	44

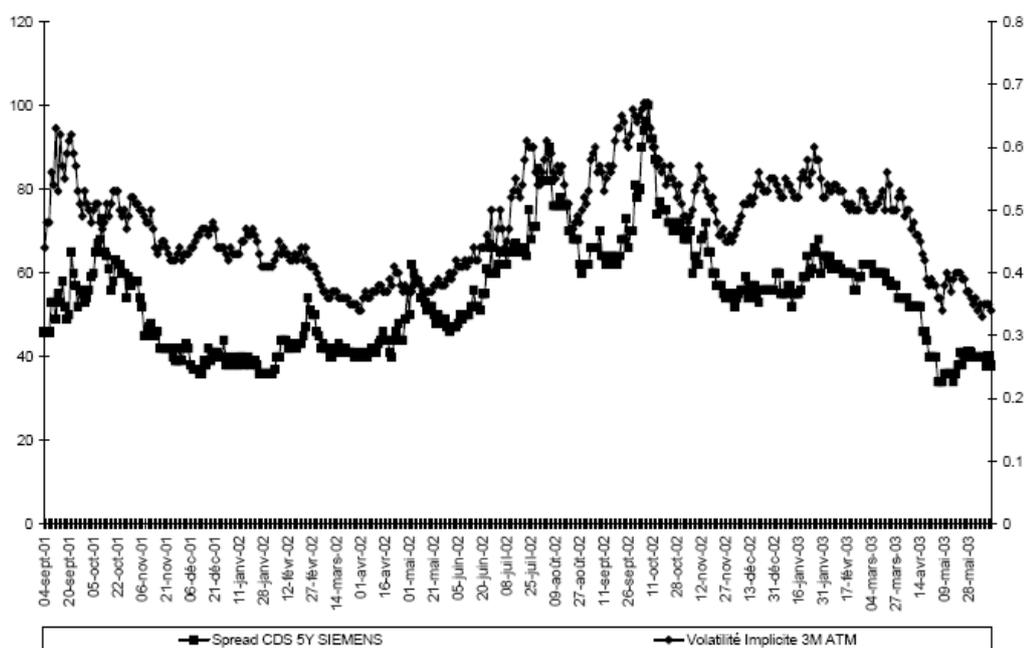
1. Introduction

Afin d'avoir une appréciation du travail qui suit, il est utile de comprendre la perspective d'un prêteur commercial, c'est-à-dire les grandes banques, sociétés de crédit et autres prêteurs. Ces derniers détiennent d'énormes portefeuilles de prêts accordés à des entreprises dont les actions sont transigées en bourse. Avant l'apparition des modèles d'évaluation du risque de crédit, les seuls outils à leur disposition pour évaluer le risque inhérent à leurs portefeuilles de prêts étaient les états financiers produits par les firmes et occasionnellement des audits effectués par les prêteurs. Si les états financiers et/ou les audits démontraient que les finances des firmes se détérioraient, les banques devaient alors effectuer un monitoring plus serré afin de limiter la possibilité que les firmes fassent défaut. Ces prêteurs cherchaient donc des outils permettant de suivre l'évolution du risque de défaut des emprunteurs, et ce, sur une base continue. C'est dans ce contexte que sont apparus les premiers modèles d'évaluation de risque de crédit.

Deux types de modèles sont utilisés dans la littérature financière pour étudier le risque de crédit: les modèles de score (Altman (1968)) et les modèles structurels de type Merton (1974). Les modèles de score utilisent des données comptables pour étudier essentiellement l'endettement et la profitabilité des firmes. Ces modèles ont l'avantage d'être très manipulables, et par conséquent, très précis. En revanche, les données comptables sont généralement disponibles qu'annuellement et sont de nature plutôt historique, c'est-à-dire qu'elles ne permettent pas d'anticiper les résultats futurs des firmes. Les modèles structurels, quant à eux, utilisent les données de marché (c'est-à-dire les prix des actions) dans leur modélisation du risque de défaut des firmes. Selon l'hypothèse d'efficience des marchés, les prix des actions résument toute l'information pertinente au sujet des firmes émettrices. Ainsi, ces modèles ont l'avantage de capter toute l'information disponible au sujet des firmes - du moins, en théorie - tout en permettant d'obtenir beaucoup plus d'observations que les modèles de score. La principale lacune de ces modèles est que l'utilisation d'hypothèses trop fortes tend à surestimer les probabilités de défaut des firmes étudiées. Finalement, on retrouve également des modèles dits hybrides qui combinent les composantes des modèles structurels et des modèles de score.

Afin d'illustrer le pouvoir prédictif des modèles structurels, la figure 1 présente l'évolution des écarts du taux de crédit sur un CDS de 5 ans de la compagnie Siemens ainsi que la volatilité à trois mois de ses actions. Un CDS est un instrument financier permettant de transférer le risque de crédit d'un actif sous-jacent à une contrepartie voulant l'assumer. Plus l'écart des taux est élevé (axe de gauche), plus l'actif sous-jacent est considéré risqué.

Figure 1. Évolution des écarts du taux de crédit du CDS 5 ans et de la volatilité implicite des actions de Siemens¹



Il est généralement reconnu que les modèles les plus performants sont les modèles hybrides tel le modèle de Moody's. Les deux composantes sont complémentaires et les modèles les incorporant identifient mieux les détresses financières (Sobehart et Stein 2000, Tudela et Young 2003) que les modèles uniquement structurels ou non. Cependant, la composante statistique des modèles de score ne peut être généralisée pour tous les prêteurs. La sélection des ratios et données comptables utilisés pour former cette composante se fait habituellement en fonction du type d'industrie étudié. Par contre, la composante structurelle est généralisable pour tous les utilisateurs tant que l'emprunteur ait émis des actions. Ceci explique pourquoi nous

¹ BRUYERE, Richard et Rama CONT (2003), « L'évaluation des produits dérivés de crédit », *Working paper, Finance Concepts*, 29 p.

retrouvons tant d'articles dans la littérature financière dédiés à l'application et l'évolution de la composante structurelle.

L'article de Brockman et Turtle (2003), dont le modèle sera appliqué dans ce travail de recherche, a incorporé une innovation importante au niveau de la modélisation du risque de défaut des firmes. Spécifiquement, ils utilisent les options à barrières plutôt que les options européennes traditionnelles afin de modéliser le fait que les prêteurs peuvent mettre en défaut les entreprises lorsqu'elles ne respectent pas certaines ententes fixées au début des contrats, et ce, à tout moment. Cependant, il a été démontré qu'ils approximaient mal la valeur marchande des actifs des firmes emprunteuses, ce qui mena à l'estimation de barrières de défaut trop élevées. Afin de résoudre ce biais d'estimation, des travaux subséquents (Wong, Choi 2006 et Duan, Gauthier, Simonato 2004) ont proposé d'estimer cette variable par le biais de la méthode du maximum de vraisemblance. Ces études démontrent que cette méthodologie produit de meilleures estimations des paramètres du modèle. Par conséquent, des probabilités de défaut plus réalistes peuvent être obtenues en suivant une telle méthodologie. Ces études mettent également le lecteur en garde car, quoi que l'application du modèle de Brockman et Turtle (2003) par le biais du maximum de vraisemblance produise des barrières de défaut positives, ces dernières ne sont pas toujours statistiquement significatives (Wong, Choi 2006).

Jusqu'à présent, il n'existe pas une application empirique du modèle Brockman et Turtle (2003) sur des données canadiennes, d'où la première motivation de ce travail. Un des résultats intéressants de l'étude de Wong et Choi (2006) est que la majorité des firmes ont démontré des barrières implicites inférieures à leur endettement. Le résultat inverse avait été trouvé dans l'étude originale de Brockman et Turtle, et ce, pour la grande majorité des firmes. Il sera intéressant de constater si cette relation sera vérifiée au terme de ce mémoire.

Dans un travail parallèle, Dionne et al. (2005) ont appliqué un modèle hybride (probit en panel) afin de calculer le risque de défaut d'entreprises publiques canadiennes. Leur composante structurelle se basait sur la modélisation offerte par Brockman et Turtle (2003) en utilisant toutefois la barrière de défaut comme variable exogène. Le présent ouvrage se veut une extension directe de ce travail de

recherche, dans la mesure où la même banque de données sera utilisée. Ainsi, cela permettra de constater comment les probabilités de défaut des entreprises peuvent varier en rendant endogène la barrière de défaut. Nous substituerons donc leur composante structurelle pour celle trouvée dans ce mémoire dans l'espoir d'obtenir un modèle hybride plus performant. Ceci constituera donc l'objectif final de ce mémoire.

Ce mémoire est organisé en quatre parties. La première consiste en la revue de la littérature des modèles structurels. La seconde partie sera consacrée à l'explication de la méthodologie retenue dans ce mémoire, soit celle de Brockman et Turtle (2003) par le biais de la méthode du maximum de vraisemblance. Les données seront ensuite examinées avant de passer à la section finale où les résultats et comparaisons à travers les différents modèles seront présentés.

2. Revue de littérature des modèles structurels de risque de crédit

2.1 *Modèle de Merton (1974)*

Le premier modèle structurel de risque de crédit est celui de Merton (1974). Ce modèle se basait directement sur la théorie des options introduite par Black et Scholes (1973).

Cet article fondateur démontre comment on peut évaluer des obligations corporatives en considérant le risque de défaut des entreprises émettrices. Merton nomme cette théorie le risque structurel des taux d'intérêts. Dans un premier temps, un modèle d'évaluation de base d'instruments financiers est développé selon les lignes Black-Scholes. Ce modèle est ensuite appliqué à plusieurs formes d'obligations, dont des obligations zéro coupon, des obligations conventionnelles et des obligations rachetables.

Le modèle proposé par Merton (1974) nous permet de quantifier le risque de crédit d'une firme, dont les actions sont transigées à la bourse, par le biais de sa structure de capital. Dans ce modèle, la valeur des actifs de la firme suit un processus de diffusion de type stochastique avec une volatilité constante. La firme est financée par la dette et l'équité. Les actions ne paient aucun dividende et la dette ne porte pas de coupon, c'est-à-dire que les détenteurs des obligations ne recevront qu'un seul paiement D à l'échéance T . De plus, notons que les actionnaires ne peuvent réemprunter ni racheter la dette de la firme avant son échéance.

Donc, si la valeur des actifs est supérieure au paiement obligataire promis au temps T , les détenteurs des obligations recevront D et les actionnaires conserveront la valeur résiduelle de la firme. Si au temps T , la valeur des actifs est inférieure à D , la firme ne pourra payer D aux détenteurs des obligations (elle fera défaut), et par conséquent, ces derniers prendront contrôle de la firme, ce qui est équivalent à sa liquidation. Les actionnaires, quant à eux, ne recevront rien.

Sous ces hypothèses précises, Merton avance que les actionnaires détiennent effectivement une option d'achat européenne sur les actifs de l'entreprise dont le

prix d'exercice est le paiement obligataire promis D . Les actionnaires n'exerceront l'option au temps T que si la valeur des actifs sera supérieure à D et partageront ensuite les surplus. Sinon, l'option ne pourra être exercée, l'entreprise sera en défaut et les actionnaires perdront leur investissement initial dans l'option.

Le modèle de Merton nous permet donc de considérer la valeur de l'équité de la firme comme étant équivalente à une option d'achat (européenne) sur les actifs de la firme, où le prix d'exercice correspond au paiement obligataire D . On peut alors appliquer la théorie de Black-Scholes pour dériver la probabilité que l'option ne soit pas exercée, ce qui représente la probabilité de défaut de la firme.

Ce modèle est d'une importance primordiale pour l'évaluation du risque de crédit puisqu'il permet de surmonter les lacunes des modèles de score, c'est-à-dire la nécessité d'attendre la publication d'états financiers vérifiés et le manque d'anticipation du futur retrouvé dans les données comptables. Ce modèle structurel permet une mise à jour quasi continue des probabilités de défaut des firmes puisqu'il se base sur les données de marché.

Les modèles structurels qui parurent ensuite ont comblé certaines lacunes du modèle de Merton. En ce qui concerne le présent ouvrage, nous nous attarderons essentiellement aux articles qui ont adressé et amélioré les points suivants du modèle fondateur de Merton :

1. le moment du défaut (Black et Cox (1976));
2. le taux d'intérêt sans risque est fixe (Longstaff et Schwartz (1995), Collin-Dufresne et Goldstein (2001));
3. le type d'option utilisé dans la modélisation (Brockman et Turtle (2003), Tudela et Young (2003), Dionne et al. (2005)).
4. le fait que la valeur des actifs est inobservable (Sobehart et Stein (2000), Duan (1994), Wong, Choi (2006), Duan, Gauthier et Simonato (2004)) ;

2.2 Le moment du défaut

Le concept de barrière de défaut fut introduit dans un article important de la littérature des modèles structurels par Black et Cox (1976), relaxant ainsi l'hypothèse très stricte de Merton que le défaut ne puisse se matérialiser avant l'échéance de la dette. La valeur des actifs de la firme suit toujours un processus de diffusion de type stochastique, mais la firme fait défaut immédiatement lorsque la valeur de ses actifs devient inférieure à un seuil de réorganisation spécifié.

L'analyse de ces auteurs montre qu'il est dans l'intérêt des créanciers de forcer la liquidation de la société dès que les circonstances le permettent, sans attendre la date d'échéance de la dette. La clause de protection offre ainsi une valeur plancher aux obligations, ce qui est de nature à limiter aussi les gains des actionnaires dans le mécanisme de transfert de valeur. Les créanciers sont remboursés avec certitude lorsque la valeur de marché de la société est supérieure à la dette financière.

Par ailleurs, les actionnaires perdent le contrôle dès que la valeur de l'actif économique tend vers le seuil de réorganisation spécifié dans la clause de protection. De plus, le modèle de Black et Cox (1976) permet d'éliminer la procédure de faillite lorsque la valeur de la société augmente. Tel est le cas lorsqu'une stratégie de maximisation de la valeur est mise en œuvre.

2.3 Le taux d'intérêt sans risque

Longstaff et Schwartz (1995) ont proposé une version du modèle structurel qui fait intervenir des taux d'intérêts stochastiques au modèle de Black et Cox (1976). Par conséquent, leur modèle devient capable de mesurer le risque de défaut ainsi que le risque de taux d'intérêt des entreprises.

Spécifiquement, ils postulent que le taux d'intérêt sans risque suit un processus Vasicek (1977) tout en étant corrélé avec le processus de diffusion stochastique de la valeur de la firme. Ainsi, les prix des obligations corporatives peuvent être trouvés en employant une méthode par itérations. L'apport principal de ce modèle

est que la corrélation entre la valeur de la firme et les mouvements du taux d'intérêt sans risque peut être très importante lors de l'évaluation du passif d'une firme.

Une extension importante de ce modèle fut amenée par Collin-Dufresne et Goldstein (2001) où leur modèle incorpore un ratio d'endettement stationnaire. Les auteurs permettent ainsi à la structure de capital de la firme de dévier de son niveau optimal dans un horizon court terme.

2.4 Le type d'option utilisé

Quoi que Black et Cox ont avancé en 1976 le concept de barrière de défaut et, de ce fait même, la possibilité que le défaut se matérialise avant l'échéance de la dette, les modèles structurels ont continué à utiliser la théorie des options européennes. Évidemment, certaines innovations ont été ajoutées dans les modèles subséquents, mais le fait demeure qu'un type d'option plus approprié existait pour modéliser le risque de défaut d'une firme. Il s'agissait des options à barrières. Il en existe deux types particulièrement importants pour les modèles structurels: les options *down-and-out* et *down-and-in*. Ces options sont activées (*down-and-in*) ou désactivées (*down-and-out*), c'est-à-dire créées ou annulées, dès que la valeur de l'actif sous-jacent atteint la barrière. Contrairement aux options européennes, ces options peuvent être exercées tant et aussi longtemps qu'elles sont en circulation. L'utilisation de ce type d'option dans la modélisation du risque de crédit intègre de façon naturelle les innovations de Black et Cox (1976).

Ces options ont été introduites dans la littérature financière par Brennan et Schwartz (1978), Leland (1994) et Briys et de Varenne (1997). Cependant, le premier modèle structurel à les intégrer dans l'analyse du risque de crédit était celui de Brockman et Turtle (2003). Cet article est au cœur du présent travail car, une fois adapté par la méthode du maximum de vraisemblance, il servira de modèle d'estimation des probabilités de défaut des firmes étudiées. Ses hypothèses et sa méthodologie seront étudiées dans la section suivante de ce travail. Nous nous attardons ici aux études qui ont utilisé sa logique et commentons leurs résultats.

La banque d'Angleterre a proposé un modèle hybride qui incorporait la théorie des options à barrières dans sa composante structurelle, spécifiquement l'option d'achat *down-and-out*. Les auteurs Tudela et Young (2003) appliquent leur modèle hybride à des données d'entreprises anglaises non financières sur la période 1990-2001, dont certaines d'entre elles ont effectivement fait défaut, afin de quantifier la probabilité de faillite. L'estimation de la composante structurelle est utilisée comme un indicateur avancé de la vraie faillite et les auteurs vérifient ensuite ses propriétés. En général, cet article démontre que les estimations issues de ce modèle peuvent donner un signal de faillite très fort un an avant son occurrence.

Le modèle de la banque d'Angleterre permet la faillite dès le moment où k , défini comme le ratio actif sur dette de la firme, devient inférieure à 1 (\tilde{k}). Une note importante s'impose : la valeur des actifs de la firme est inobservable, et donc, la valeur de k l'est aussi. Tout ce qui est observable est le ratio équité sur dette, $y = \frac{X}{L}$, où X représente la capitalisation boursière de la firme et L représente son passif. Similairement à la logique de Moody's (présentée plus bas), les auteurs utilisent la méthode de Nickell et Perraudin (1999) et un algorithme de résolution Newton-Raphson afin de dresser un lien entre les ratios X et k . Spécifiquement, les auteurs peuvent trouver la moyenne et l'écart type de k , et donc, la fonction de distribution de k . Il s'ensuit que la probabilité de défaut est alors définie comme la probabilité que k soit inférieure à \tilde{k} .

Les auteurs testent ensuite la performance de leur modèle en calculant les probabilités de défaut pour un échantillon de firmes non financières d'Angleterre qui inclut un certain nombre de firmes ayant réellement fait défaut. Ils font 3 types de test : (1) ils comparent leurs résultats avec les vrais défauts ; (2) ils comparent leur modèle avec d'autres modèles prédisant le défaut ; (3) ils utilisent des courbes de puissance et des ratios de précision.

Les données utilisées correspondent à 7 459 états financiers de 1990 à 2001, dont 65 d'entre eux correspondent à des firmes ayant ensuite fait défaut. La date de défaut est définie comme étant la dernière journée où l'on peut observer un mouvement du prix de l'action de la firme en question.

Afin de déterminer si le modèle prédit bien les défauts, les auteurs examinent les erreurs du type I et II. En général, la probabilité de défaut générée par ce modèle procure un très bon signal précurseur de la faillite environ un an avant son occurrence. La probabilité de défaut annuelle moyenne pour les firmes ayant fait défaut dans l'échantillon est de 47,3%, tandis qu'il est de 5,4% pour celles n'ayant pas fait défaut.

Les calculs des erreurs du type I et II suggèrent que les probabilités de défaut issues du modèle sont capables de bien discriminer entre les firmes qui ont fait défaut et celles qui ne l'ont pas fait. En utilisant un niveau de confiance de 90% et en définissant les défauts comme les firmes ayant une probabilité d'au moins 10% de faire défaut dans un an ou moins, l'erreur du type I est relativement modeste à 9,2% (avec un erreur de type II de 15%). En modifiant la définition de défaut comme les firmes ayant une probabilité de faire défaut dans 2 ans ou moins, l'erreur du type I pour le même niveau de confiance passe à 12,3% (et l'erreur du type II devient 29,9%).

Finalement, les auteurs constatent que s'ils ajoutent certaines informations financières des firmes (ex : marge de profit, ratio de dettes sur actifs, croissance des ventes, etc.) à leur modèle original, la performance du modèle augmente légèrement. Ce modèle hybride donne donc de meilleures probabilités de défaut.

Le modèle final de la banque d'Angleterre est le suivant :

$$P(\text{défaut}) = f \left[\begin{array}{l} \text{Probabilité de défaut (1 - 2 années), marges de profits,} \\ \frac{\text{dette}}{\text{actifs}}, \frac{\text{encaisse}}{\text{dette}}, \text{taux de croissance des ventes,} \\ \text{log du nombre d'employés, Produit national brut} \end{array} \right]$$

Finalement, une étude proposée par Dionne et al. (2005) applique un modèle similaire à celui de la banque d'Angleterre à des entreprises publiques canadiennes dont les actions sont transigées à la Bourse de Toronto. Leur base de données comporte 1 469 entreprises dont 130 ayant fait défaut. La période d'étude est de janvier 1988 à décembre 2004.

Les résultats de cette étude démontrent que les probabilités de défaut prédites sont significatives une fois ajoutées aux variables comptables retenues dans le modèle hybride. La mise à jour trimestrielle des probabilités de défaut amène beaucoup d'information dynamique pour expliquer l'évolution du risque de crédit des firmes canadiennes étudiées.

Il est important de remarquer que les deux derniers articles mentionnés supposent que la barrière (\tilde{k}) est fixée à 1 pour toutes les entreprises, et ce, à travers les différentes industries et années étudiées. Ceci constitue une simplification non négligeable du modèle Brockman et Turtle (2003). En rendant cette dernière variable endogène, les auteurs stipulent que cette barrière est très significative, qu'elle est souvent très différente de 1 et qu'elle évolue dans le temps. Donc, les auteurs prétendent que l'estimation de ce troisième paramètre devrait enrichir considérablement l'analyse du risque de crédit des firmes.

2.5 Le manque d'observabilité de la valeur des actifs

Brockman et Turtle (2003) mesurent la valeur marchande des actifs des firmes comme étant la somme de la valeur comptable du passif total et de la valeur marchande de l'équité. Cette approximation est conforme aux travaux de Barclay et Smith (1995a, b) et de Jung, Kim et Stulz (1996). Cependant, un récent article écrit par des économistes chinois, Wong et Choi (2006), démontre que cette approximation mène à une surestimation de la barrière de défaut, et ce, indépendamment des données empiriques utilisées.

Afin d'illustrer cette surestimation des barrières de défaut, nous reproduisons ici-bas un extrait de la Table 2 qui parut dans l'article de Brockman et Turtle (2003) où les estimés des barrières sont classifiés en fonction du niveau d'endettement des firmes.

Tableau 1 : Extrait de la table 2 de l'article de Brockman et Turtle (2003) : Classification des barrières estimées en fonction du niveau d'endettement des firmes²

	Nombre d'observations	Barrière Moyenne	Écart-type de la barrière	Statistique t de Student	P-value
<i>Moyenne des barrières estimées par niveau d'endettement</i>					
Niveau d'endettement $\leq 0,1$	476	0,2361	0,1597	32,26	0,0001
0,1 < Niveau d'endettement $\leq 0,2$	780	0,4151	0,1529	75,81	0,0001
0,2 < Niveau d'endettement $\leq 0,3$	944	0,5456	0,1441	116,33	0,0001
0,3 < Niveau d'endettement $\leq 0,4$	1064	0,6437	0,1316	159,58	0,0001
0,4 < Niveau d'endettement $\leq 0,5$	1158	0,7422	0,1268	199,12	0,0001
0,5 < Niveau d'endettement $\leq 0,6$	1338	0,8278	0,1103	274,49	0,0001
0,6 < Niveau d'endettement $\leq 0,7$	1007	0,8567	0,0896	303,37	0,0001
0,7 < Niveau d'endettement $\leq 0,8$	588	0,8816	0,0597	357,82	0,0001
0,8 < Niveau d'endettement $\leq 0,9$	293	0,9231	0,0391	404,07	0,0001
0,9 < Niveau d'endettement $\leq 1,0$	139	0,9657	0,0243	469,49	0,0001

À priori, il est important de faire la distinction entre la valeur comptable des actifs et la valeur marchande des actifs. Par construction, la valeur comptable des actifs ne peut évidemment jamais tomber en deçà de la valeur comptable de la dette. Par contre, la valeur marchande des actifs, elle, pourrait se retrouver inférieure à la dette totale d'une firme, ce qui causerait souvent la faillite ou la restructuration de cette firme.

Dans le tableau 1, les niveaux d'endettement et les barrières moyennes sont exprimés en proportion de la valeur marchande des actifs totaux. On remarque que les barrières moyennes présentées sont toutes supérieures aux différents niveaux d'endettement à l'exception du dernier, soit celui compris entre 0,9 et 1,0. Une barrière de défaut supérieure à un niveau d'endettement signifie qu'une firme possédant une valeur marchande de ses actifs (ou une valeur de liquidation de ses actifs) suffisamment grande pour rembourser totalement sa dette pourrait quand même faire défaut. Ce résultat ne semble pas logique. Certes, il serait possible de constater une telle relation pour certaines entreprises mais le fait que celle-ci soit généralisée à travers les résultats démontre, selon Wong et Choi (2006), l'impact d'utiliser le proxy proposé par Brockman et Turtle.

² BROCKMAN, Paul et H.J. TURTLE (2003). « A Barrier Option Framework for Corporate Security Valuation », *Journal of Financial Economics*, vol. 67, p. 521-522.

La validité des probabilités de défaut calculées en utilisant ce mauvais proxy pourrait être compromise. Par conséquent, Wong et Choi privilégient la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les deux premiers moments de la distribution des valeurs marchandes des actifs (ainsi que la barrière de défaut) car cela produit généralement des paramètres asymptotiquement efficaces. Ils concluent cependant que les barrières de défaut trouvées sont majoritairement inférieures à l'endettement des firmes et ne sont pas toujours statistiquement significatives, ce qui contredit les résultats obtenus dans l'étude de Brockman et Turtle (2003).

L'application de la méthode du maximum de vraisemblance à l'étude du risque de crédit fut développée initialement par Duan (1994). En somme, la méthode de maximum de vraisemblance adapte le modèle de Merton pour accommoder le fait que l'on n'observe pas les valeurs de l'actif (mais seulement de l'équité), et crée une équation qui doit ensuite être maximisée afin de trouver les estimateurs de vraisemblance. Cette méthode comporte les avantages suivants : premièrement, les estimateurs trouvés sont statistiquement efficaces; deuxièmement, cette méthode permet de construire des intervalles de confiance pour les paramètres estimés; et troisièmement, nous pouvons calculer d'autres variables d'intérêt, dont la valeur implicite de l'actif, la valeur de la dette ainsi que la probabilité de défaut.

Le modèle KMV de Moody's, quant à lui, a proposé un autre procédé pour contourner le problème de manque d'observabilité des valeurs des actifs. En effet, ce modèle utilise directement les équations du modèle de Merton, en particulier, celle de l'équité³. En effet, si l'on connaît la volatilité de l'actif et on combine cette information aux observations des valeurs des actions des firmes, on peut attribuer une valeur aux actifs des firmes. C'est-à-dire, si $S_t = g(V_t; \sigma)$, alors on peut exprimer $V_t = g^{-1}(S_t; \sigma)$, où S_t et V_t représentent l'équité et l'actif respectivement. La méthode de Moody's utilise un algorithme de résolution à deux étapes, qui débute avec une valeur arbitraire de la volatilité de l'actif et qui procède par itérations. On a donc besoin que de 2 variables pour utiliser la méthode de Moody's.

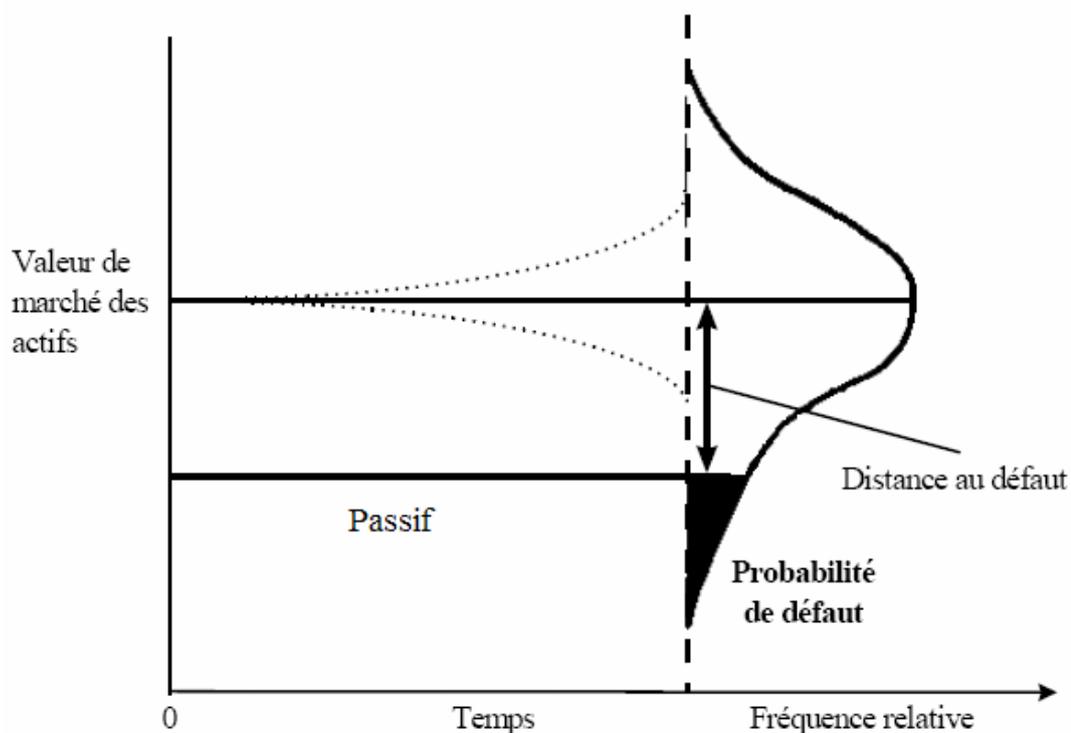
³ Voir équation 5 dans la section portant sur la méthodologie.

Si l'on suppose que les valeurs marchandes futures des actifs des firmes suivent une distribution normale, on peut facilement estimer les probabilités de défaut des firmes dans un horizon d'un an. Cette probabilité de défaut est fonction du nombre d'écart types sous lequel la valeur des actifs de la firme doit perdre avant d'atteindre le point de défaut. Cette valeur est appelée « distance au défaut », qui peut être exprimée mathématiquement comme suit:

$$\text{Distance au défaut} = \frac{\text{VMA} - \text{Point de défaut}}{\text{VMA} \cdot \sigma_A}$$

où VMA signifie la valeur marchande des actifs de la firme, σ_A représente l'écart type de la valeur des actifs de la firme et le point de défaut est égal à la somme du passif court terme et 50% du passif long terme des firmes. C'est cette « distance au défaut » qui est incluse spécifiquement dans le modèle hybride de la firme publique de Moody's (Sobehart, Stein (2000)). Le graphique suivant illustre l'approche KMV offerte par Moody's.

Figure 2. L'approche KMV de Moody's⁴



⁴ CROSBIE, Peter, « Modeling Default Risk », KMV Corporation, 1997.

Une étude de Duan, Gauthier et Simonato (2004) propose la comparaison des deux méthodes (Moody's et maximum de vraisemblance) pour ensuite conclure que les estimateurs Moody's et de maximum de vraisemblance pour la moyenne, la variance ainsi que la valeur implicite de l'actif sont quasi identiques. Cependant, puisque l'algorithme de Moody's ne fournit pas d'information quant aux propriétés des distributions des estimations, la méthode de Moody's ne peut être utilisée pour faire de l'inférence statistique.

Les deux modèles sont théoriquement équivalents, sauf dans le cas où l'on traite des modèles structurels incorporant des paramètres de structure de capital inconnus. Dans ce contexte, les auteurs démontrent que la méthode de Moody's génère des estimateurs biaisés et ne peut résoudre le biais de survie. Le biais du survivant est créé quand on n'ajuste pas la modélisation (la fonction de vraisemblance) pour le fait que l'on sait déjà que la firme n'a pas fait défaut entre deux observations quelconques. Selon les auteurs, ce biais est particulièrement important lorsque les firmes survivantes ont procédé à un ou plusieurs refinancements. Ils utilisent l'exemple de Brockman et Turtle (2003), où un troisième paramètre inconnu est introduit, soit la variable k , représentant la structure de capital de la firme. Sous ce modèle, la firme peut faire défaut à n'importe quel moment. Plus spécifiquement, elle fera défaut dès que la valeur de l'actif ira en deçà du point k .

3. Méthodologie

Le modèle de Brockman et Turtle (2003) est une extension directe de celui de Merton (1974). Ce dernier modèle a permis la transposition du modèle de Black et Scholes (1973) au domaine du risque de crédit. Il est donc essentiel de comprendre les équations principales et la logique de la théorie des options de Merton avant d'aborder le modèle faisant l'objet de cette recherche.

3.1 Équations et hypothèses principales du modèle de Merton (1974)

Dans un marché parfait, et sous plusieurs autres hypothèses, Merton propose une structure de capital simple pour la firme étudiée, c'est-à-dire qu'elle est composée que de la dette et des capitaux propres. Ainsi, la valeur de la firme peut être expliquée par l'équation suivante :

$$V_t \equiv D(V, T, t) + S(V, t) \quad (1)$$

où V , D et S représentent respectivement la valeur marchande des actifs de la firme, de la dette et de l'équité et $(T-t)$ désigne le temps restant jusqu'à la maturité de la dette. Par ailleurs, la valeur de la firme suit un processus de diffusion de type stochastique, tel :

$$dV = [\alpha V - C]dt + \sigma V dz \quad (2)$$

où α est le rendement espéré instantané par unité de temps sur la valeur de la firme ; C représente les sorties de fonds destinées aux actionnaires ou détenteurs d'obligations (c'est-à-dire les dividendes ou paiements d'intérêts) s'il est positif, ou les dollars nets reçus par la firme suite à un (des) refinancement(s) s'il est négatif ; σ est l'écart type instantané du rendement de la firme par unité de temps ; dz est un processus standard Gauss-Wiener.

Ainsi, Merton démontre que sous ces hypothèses, on peut décrire le comportement du prix du titre (action) Y sous l'équation stochastique différentielle suivante :

$$dY = [\alpha_y Y - C_y] dt + \sigma_y Y dz_y \quad (3)$$

où α_y est le rendement instantané par unité de temps du titre Y ; C_y représente les coupons payés en dollars par unité de temps ; σ_y est l'écart type instantané du rendement de Y par unité de temps ; dz_y est un processus standard Gauss Wiener. Remarquons que les paramètres du titre Y sont indicés afin de les différencier de ceux de la valeur de la firme (V).

En utilisant le lemme d'Ito et en formant ensuite un portefeuille d'arbitrage, Merton dérive une expression mathématique pour la valeur de la dette (D) qui ne dépend que de la valeur de la firme, du temps, du taux d'intérêt sans risque, de la volatilité de la valeur de la firme et du taux d'intérêt de la dette (C). Il est intéressant de noter que la valeur de F ne dépend pas du rendement espéré de la firme ni des préférences des investisseurs face au risque. Donc, deux investisseurs ayant des fonctions d'utilité différentes et possédant des opinions divergentes quant au futur d'une firme en particulier, vont attribuer la même valeur aux obligations de cette firme s'ils sont en accord quant à la volatilité de la valeur de la firme pour un certain niveau de taux d'intérêt et la valeur de la firme même.

Pour la modélisation retenue dans ce mémoire, nous supposons que les obligations ne paient aucun dividende. Dans ce contexte d'obligations zéro coupons et sachant que les valeurs de D et de S ne peuvent être inférieures à zéro, nous obtenons les conditions initiales suivantes pour la dette et l'équité à l'échéance de la dette :

$$D(V,0) = \text{Min} [V, F] \quad (4.a)$$

$$S(V,0) = \text{Max} [0, V - F] \quad (4.b)$$

où F représente le paiement obligataire promis à l'échéance aux détenteurs des obligations. Les équations (4.a) et (4.b) démontrent que seuls les détenteurs des obligations sont assurés d'obtenir un paiement à l'échéance de dette, soit le montant le plus petit entre le paiement obligataire promis ou la valeur entière de la firme. Les actionnaires, quant à eux, détiennent une option d'achat européenne sur les actifs de

la firme. Dit autrement, leur richesse est contingente à la capacité de la firme de respecter ses engagements financiers envers ses créiteurs. Donc, le modèle de Merton nous permet de considérer la valeur de l'équité de la firme comme étant équivalente à une option d'achat européenne sur les actifs de la firme, où le prix d'exercice correspond au paiement obligataire F .

En supposant la variance de la valeur des actifs comme étant constante, Merton fait intervenir les équations de Black-Scholes (1973) afin de trouver les valeurs de S et D . Ces équations sont les suivantes :

$$S(V, \tau) = V\Phi(a) - Fe^{-r\tau}\Phi(a - \sigma\sqrt{\tau}) \quad (5)$$

$$\text{où } a = \frac{\log[V/F] + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$\text{et } \tau = T - t.$$

Notons que $\Phi(x)$ signifie une fonction de distribution cumulative normale évaluée au point x . De (5) et sachant que $D = V - S$, on peut réécrire la valeur de l'obligation comme suit:

$$D[V, \tau] = Fe^{-r\tau} \left\{ \Phi[w_2(d, \sigma^2\tau)] + \frac{1}{d} \Phi[w_1(d, \sigma^2\tau)] \right\} \quad (6)$$

$$\text{où } d \equiv Fe^{-r\tau} / V$$

$$w_1(d, \sigma^2\tau) = \frac{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau - \log(d)}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$w_2(d, \sigma^2\tau) = \frac{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau + \log(d)}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Finalement, on peut déduire de ce modèle la probabilité de défaut de la firme i , soit la probabilité que la valeur de ses actifs à l'échéance de la dette soit inférieure au paiement obligataire promis, comme étant :

$$P[V_i(T_i) < F_i | D_T] = \Phi\left(\frac{\ln(F_i/V_i) - (\alpha_i - 0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \quad (7)$$

Vu autrement, c'est la probabilité que les actionnaires n'exerceront pas leur option d'achat qui leur permettrait d'acquérir les actifs de la firme au coût de F (valeur de la dette à échéance).

Techniquement, on ne peut utiliser le modèle de Merton pour estimer la valeur de l'équité que si l'on dispose de la valeur de l'actif non observée ainsi que les paramètres du modèle (α et σ).

3.2 Modèle de Brockman et Turtle (2003)

Le but de cet article était de différencier les titres financiers (actions ordinaires, obligations) des options standard européennes afin de mieux modéliser le comportement des titres financiers. Par conséquent, ce modèle permettrait d'évaluer avec une meilleure précision la valeur des titres financiers ainsi que la probabilité de défaut des firmes émettrices.

La valeur des options standards européennes ne dépend pas directement du cours suivi par l'actif sous-jacent (*path-independent security*) puisque ce n'est qu'à l'échéance que leur valeur sera établie. Cela signifie que les options demeurent « vivantes » indépendamment de l'appréciation ou de la dépréciation de l'actif sous-jacent. La théorie des options classique s'applique donc mal aux titres financiers car la valeur de ceux-ci est directement liée au cours suivi par l'actif sous-jacent (ex : la valeur de la firme), et ce, à tout moment.

Deux types d'options à barrière sont utilisés par les auteurs pour modéliser le comportement des titres financiers, soit les options d'achat *down-and-out* et *down-*

and-in. Les auteurs postulent que les actions de la firme sont équivalentes à des options d'achats *down-and-out* sur les actifs de la firme tandis que les obligations sont équivalentes à un portefeuille de dette sans risque, d'une position courte sur une option de vente sur les actifs de la firme ainsi qu'une position longue dans une option d'achat *down-and-in* sur les actifs de la firme.

Prenons l'exemple des actionnaires : si la valeur des actifs de la firme émettrice tombe en deçà d'un niveau prescrit (habituellement lié à l'endettement de la firme), les actions peuvent perdre leur valeur entière dû à la faillite de la firme (*down-and-out*). Inversement, les options à barrière des détenteurs de la dette seront activées (*down-and-in*) à la faillite de la firme. Conceptuellement, la position de ces derniers leur donne le droit de forcer la faillite de la firme lorsque la valeur des actifs devient insuffisante. En ignorant l'existence de telles barrières, la théorie traditionnelle de Merton (1974) surévalue l'équité de la firme et sous évalue la dette corporative par un montant égal à la valeur de l'option d'achat *down-and-in*. Cette intuition conceptuelle nous mène à tester l'hypothèse que les barrières sont quantifiées en pratique.

Par ailleurs, ce modèle s'avère d'une grande souplesse car il permet de s'adapter aux différentes lois de faillite rencontrées dans le monde, dont celle du Canada. Par exemple, il permet de tenir compte de la possibilité que les actionnaires reçoivent néanmoins un certain montant d'argent lors du défaut de la firme. Pour des fins de simplification, nous ferons abstraction de cette caractéristique du modèle et nous nous concentrerons davantage sur le droit que détiennent les créanciers de forcer la liquidation d'une entreprise avant l'échéance de sa dette.

Selon le modèle de Brockman et Turtle (2003), la valeur de l'équité de la firme est représentée par l'équation suivante :

$$S(V, \tau) = V\Phi(a) - Fe^{-r\tau}\Phi(a - \sigma\sqrt{\tau}) - V\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta}\Phi(b) + Fe^{-r\tau}\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\Phi(b - \sigma\sqrt{\tau}) \quad (8)$$

$$a = \begin{cases} \frac{\ln(V/F) + (r + (\sigma^2/2))\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} & \text{quand } F \geq H, \\ \frac{\ln(V/H) + (r + (\sigma^2/2))\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} & \text{quand } F < H, \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} \frac{\ln(H^2/VF) + (r + (\sigma^2/2))\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} & \text{quand } F \geq H, \\ \frac{\ln(H/V) + (r + (\sigma^2/2))\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} & \text{quand } F < H, \end{cases}$$

$$\eta \equiv \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2},$$

où S , V , F , H , τ , Φ et r représentent respectivement l'équité de la firme, la valeur marchande des actifs de la firme, le paiement obligataire promis à l'échéance de la dette, la valeur des actifs qui déclenche la faillite de la firme (ceci est la « barrière »), le temps restant jusqu'à l'expiration de l'option, la distribution normale cumulative et le taux sans risque continuellement composé.

Parallèlement, l'option d'achat *down-and-in* que les créiteurs détiennent parmi leur portefeuille, tel que décrit précédemment, peut être exprimée comme suit :

$$(5) - (8) = V\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta} \Phi(b) - Fe^{-r\tau} \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2} \Phi(b - \sigma\sqrt{\tau}) \quad (9)$$

quand $F \geq H$, et

$$\begin{aligned} &= V\Phi\left(\frac{\ln(V/F) + (r + (\sigma^2/2))\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\ &- Fe^{-r\tau}\Phi\left(\frac{\ln(V/F) + (r - (\sigma^2/2))\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - V\Phi(a) + Fe^{-r\tau}\Phi(a - \sigma\sqrt{\tau}) \\ &+ V\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta} \Phi(b) - Fe^{-r\tau} \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2} \Phi(b - \sigma\sqrt{\tau}) \end{aligned}$$

quand $F < H$. L'équation (9) est simplement la différence entre la valeur d'une option européenne standard (équation 5) moins la valeur de l'option d'achat *down-and-out* (équation 8) que possèdent les actionnaires. Cette option *down-and-in* demeure inactive tant que la valeur des actifs de la firme est supérieure à la barrière prédéterminée. Si la valeur des actifs devient égale ou inférieure à la barrière, l'option est « activée » et peut être exercée immédiatement.

Il est intéressant de remarquer que l'équation (8) se réduit à l'équation (5) lorsque la valeur « barrière » des actifs est nulle ($H=0$). Donc, les deux derniers termes de l'équation (8) ajustent l'équation d'équité de Merton (1974) afin de tenir compte de la possibilité que la valeur des actifs tombe en deçà de la barrière de défaut avant l'échéance de la dette.

Ainsi, une approche structurelle à l'évaluation du risque de crédit d'une firme pourrait adopter la méthodologie suivante, soit :

- *Hypothèse nulle* : les barrières sont nulles;
- *Hypothèse alternative* : les barrières sont strictement supérieures à zéro.

Si l'hypothèse nulle ne peut être rejetée, le modèle standard de Merton serait appliqué. Advenant le rejet de l'hypothèse nulle, la modélisation de Brockman et Turtle (2003) serait mieux appropriée. Cette combinaison des modèles est intéressante car les barrières pour une même firme peuvent parfois s'avérer significatives, et ensuite ne plus l'être. Cette méthodologie permettrait donc de calculer des probabilités de défaut indépendamment de l'existence des barrières de défaut. Un exemple de cette méthodologie est offert par Hao (2006).

Une fois la barrière de défaut estimée (H), nous pouvons utiliser l'équation (8) afin de dériver la probabilité de défaut d'une firme comme suit :

$$\text{Probabilité de défaut} = \Phi\left(\frac{(\ln(H) - \ln(V)) - (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

$$+ \exp\left(\frac{2(r - \sigma^2/2)(-\ln(V))}{\sigma^2}\right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{-(\ln(H) - \ln(V)) - (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right] \quad (10)$$

L'équation (10) représente la probabilité risque neutre que la valeur des actifs tombe en deçà de la barrière dans l'intervalle temporel $[0, T]$.⁵

3.3 Adaptation du modèle de Brockman et Turtle (2003) par la méthode du maximum de vraisemblance

Afin de résoudre le problème du manque d'observabilité des actifs des firmes, ce mémoire privilégiera la méthode du maximum de vraisemblance, telle qu'elle a été exposée dans Duan (1994) et reprise dans Duan, Gauthier et Simonato (2004). La logique qui suit présente d'abord la fonction de vraisemblance du modèle de Merton (1974) pour ensuite présenter celle de Brockman et Turtle (2003) car la première fait partie intégrante de la seconde.

Rappelons que dans le cadre Merton (1974) avec de la dette zéro coupon, la valeur marchande des actifs de la firme, représentée par V , est supposée suivre un mouvement Brownien géométrique :

$$d \ln V_t = \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \sigma dW_t \quad (11)$$

où μ et σ représentent respectivement le rendement espéré et l'écart type de la valeur de l'actif, tandis que dW_t est un processus du type Wiener. En supposant l'observabilité des valeurs marchandes des actifs des firmes, on peut utiliser les équations du modèle Black et Scholes (1973) pour dériver la fonction de vraisemblance du modèle de Merton (1974) :

⁵ Nous présentons en annexe 4, la formule de la probabilité de défaut physique ainsi que les probabilités de défaut résultantes pour les firmes étudiées dans ce mémoire.

$$L^V(\mu, \sigma; V_0, V_h, V_{2h}, \dots, V_{nh}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2 h) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\left(R_k - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h\right)^2}{\sigma^2 h} - \sum_{k=1}^n \ln V_{kh} \quad (12)$$

où $R_k = \ln\left(\frac{V_{kh}}{V_{(k-1)h}}\right)$ ⁶. La variable h représente une journée ouvrable exprimée en année⁷. Cette fonction de vraisemblance suppose qu'il n'y ait pas eu de défaut durant la période en question.

Mais puisque l'on n'observe pas les différentes valeurs des actifs, nous devons les inférer à partir du modèle de Merton et des capitalisations boursières des firmes (S), qui elles sont observables. La fonction de vraisemblance du modèle de Merton prend donc la forme suivante :

$$L^S(\mu, \sigma; S_0, S_h, \dots, S_{nh}) = L^V(\mu, \sigma; \hat{V}_0(\sigma), \hat{V}_h(\sigma), \dots, \hat{V}_{nh}(\sigma)) - \sum_{k=1}^n \ln(\Phi(\hat{d}_{kh}(\sigma))) \quad (13)$$

$$\text{où } \hat{V}_{kh}(\sigma) = g^{-1}(S_{kh}; \sigma) \text{ et } \hat{d}_{kh}(\sigma) = \frac{\ln(\hat{V}_{kh}(\sigma)/F) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - kh)}{\sigma\sqrt{T - kh}}$$

Il est donc possible de retrouver les estimés de maximum de vraisemblance des paramètres μ et σ en maximisant l'équation (13).

Finalement, l'équation (14) ici-bas représente la fonction de vraisemblance complète correspondant au modèle de Brockman et Turtle (2003) contingente à l'observation des valeurs marchandes des capitalisations boursières des firmes.

⁶ Le troisième terme de l'équation (12), qui serait égal à une inutile constante si les valeurs de V étaient observables, doit être conservé pour les manipulations subséquentes car V est justement inobservable.

⁷ Par exemple, s'il y a 260 jours par année où la bourse de Toronto est ouverte, h prendra la valeur de $1/260$.

$$\begin{aligned}
& L_{BT}^S(\mu, \sigma, H; S_0, S_h, S_{2h}, \dots, S_{nh}) = \\
& L^V(\mu, \sigma; \hat{V}_0, \hat{V}_h, \hat{V}_{2h}, \dots, \hat{V}_{nh}) + \sum_{j=1}^n \ln \left(1 - \exp \left(- \frac{2}{\sigma^2 h} \ln \frac{\hat{V}_{(j-1)h}}{H} \ln \frac{\hat{V}_{jh}}{H} \right) \right) \\
& - \ln \left[\Phi \left(\frac{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})nh - \ln \frac{H}{\hat{V}_0}}{\sqrt{nh}\sigma} \right) - \exp \left(\frac{1}{\sigma^2} (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \ln \frac{H}{\hat{V}_0} \right) \Phi \left(\frac{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})nh + \ln \frac{H}{\hat{V}_0}}{\sqrt{nh}\sigma} \right) \right] \quad (14) \\
& - \sum_{j=1}^n \ln \left| \frac{\partial g(\hat{V}_{jh}(\sigma, H); \sigma, H)}{\partial \hat{V}_{jh}} \right|
\end{aligned}$$

3.4 Spécificités de l'estimation du modèle proposé

Afin de procéder à l'estimation des paramètres et des probabilités résultantes, un choix devait s'imposer au niveau de certaines variables clés de l'estimation, soit du nombre d'observations boursières à utiliser (la « fenêtre » d'estimation), l'échéance des options (τ) ainsi que les valeurs de départ des paramètres μ , σ et H . Pour répondre à ces choix et pour s'assurer que la méthodologie proposée soit efficace, quelques simulations ont été exécutées et les résultats de ces dernières sont présentés en annexe 1. Ces exercices consistaient essentiellement à simuler des valeurs d'actifs qui obéissaient à certaines valeurs des paramètres μ , σ et H pour ensuite tester la capacité de l'algorithme à retrouver ces valeurs. Le tableau 2 présente les valeurs retenues pour les 5 variables en question.

Tableau 2 : Valeurs retenues pour les variables clés de l'estimation.

Variabes	Valeurs retenues
Fenêtre d'observations	2 années
Durée de vie des options	10 années
μ (valeur de départ)	0
σ (valeur de départ)	0,1
H (valeur de départ)	la valeur de la dette

Pour chaque fenêtre de données des entreprises, la fonction « fzero » de Matlab utilise les valeurs de départ proposées pour inférer les valeurs des actifs des firmes (V) qui annulent la différence entre les valeurs des capitalisations boursières observées et l'équation (8), soit :

$$S - \left(V\Phi(a) - Fe^{-r\tau}\Phi(a - \sigma\sqrt{\tau}) - V\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta}\Phi(b) + Fe^{-r\tau}\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\Phi(b - \sigma\sqrt{\tau}) \right) \quad (15)$$

Une fois les valeurs de V trouvées, les trois paramètres et la valeur des actifs sont insérées dans l'équation (14). La fonction *fminsearch* de Matlab est ensuite utilisée afin de maximiser l'équation (14), c'est-à-dire que l'algorithme tente d'obtenir une valeur supérieure de la fonction de vraisemblance (équation 14) en utilisant de différentes valeurs pour les trois paramètres μ , σ et H . Une fois l'optimum trouvé, les paramètres estimés et les valeurs des actifs peuvent être utilisés afin de calculer les probabilités de défaut des firmes (équation (10)).

4. Base de données

La base de données qui est utilisée pour calculer les barrières de défaut et les probabilités de faillite résultantes provient d'un travail de Dionne et al. (2005) présenté à la Banque du Canada dans le cadre d'une application d'un modèle hybride à des entreprises publiques canadiennes. Ces données sont reprises intégralement dans ce travail afin de pouvoir comparer les probabilités de défaut produites et, plus spécifiquement, la capacité des modèles à identifier correctement les firmes qui ont fait défaut. Nous présentons dans cette section les données brutes ainsi que les statistiques importantes sur les entreprises en question.

La base de données originale comportait 1 339 entreprises n'ayant pas fait défaut et 130 ayant fait défaut, pour un total de 1 469 entreprises publiques canadiennes. Les capitalisations boursières ont une fréquence quotidienne, tandis que les valeurs de la dette sont observées annuellement.

Le nettoyage et la fusion des données ont été réalisés à l'aide de SAS version 9.1.

4.1 Les entreprises ayant fait défaut

Les données sur les compagnies ayant fait défaut ont été retrouvées dans le *Financial Post Predecessors & Defunct, Cancorp Financials (Corporate Retriever)* et *Stock Guide*. Les capitalisations boursières quotidiennes sont extraites de la série DEAD.LLT de DATASTREAM. De 1990 à 2004, il y a eu 130 entreprises qui ont fait défaut, dont 112 ayant déclaré faillite et 18 qui ont été (ou demeurent en) réorganisation. Le tableau 3 permet de visualiser la distribution des défauts par année. On remarque que le début des années 90 et les années après 2001 sont celles qui présentent le plus de défauts.

Tableau 3 : Distribution des défauts et des réorganisations avant nettoyage des données.

Année	Faillite	Réorganisation	Total de défauts
1990	9	4	13
1991	10	2	12
1992	10	1	11
1993	8	1	9
1994	7	0	7
1995	8	0	8
1996	4	0	4
1997	5	1	6
1998	5	0	5
1999	9	0	9
2000	6	3	9
2001	7	3	10
2002	8	2	10
2003	10	1	11
2004	6	0	6
Total	112	18	130

La base de données comporte 436 observations dynamiques (entreprise-année) concernant les données comptables, soit 378 pour les entreprises ayant fait défaut et 58 pour les entreprises en réorganisation. Dit autrement, chaque entreprise possède en moyenne 3,4 observations comptables annuelles.

Cependant, 22 entreprises ayant fait défaut ont été éliminées de la base de données en raison d'un manque de données (comptables et/ou de marché) ou en raison d'un décalage trop grand entre la date de publication du dernier état financier et de la date effective du défaut. En effet, plusieurs de ces entreprises présentent d'importants décalages entre ces deux dates. Ceci s'explique par le fait que la majorité des firmes ne publient pas leurs états financiers durant la dernière année précédant leur faillite. Une autre explication réside dans la lente procédure de mise en défaut de certaines entreprises. Ainsi, Dionne et al. (2005) ont éliminé les entreprises présentant un décalage supérieur à 18 mois. Les entreprises conservées ont donc fait défaut entre 12 à 18 mois après la dernière publication de leurs états financiers.

Le tableau 4 présente les statistiques descriptives pour les 108 entreprises en question.

Tableau 4 : Statistiques descriptives des 108 défauts (en millions de \$ CA)

Mesure statistique	Capitalisation boursière	Passif
Moyenne	335,04	250,86
Médiane	14,57	20,75
Mode	22,00	317,00
Écart-Type	1 301,36	1 135,30
Coefficient d'asymétrie	6,00	10,60
Kurtosis	40,06	126,58
Nombre d'observations	60 331	380

La base finale des défauts possède 60 331 observations quotidiennes des valeurs des capitalisations boursières des firmes ayant fait défauts contre 380 observations comptables annuelles. Évidemment, une fois les deux variables fusionnées (elles proviennent de sources différentes), les observations des données comptables se répètent de façon à concorder avec les observations de marché. La base de données des défauts présente donc un nombre total de 60 331 observations.

4.2 Les entreprises n'ayant pas fait défaut

Les données comptables sur les entreprises n'ayant pas fait défaut proviennent de Stock Guide pour les années de 1984 à 2004. Les valeurs des capitalisations boursières quotidiennes sont prises de DARASTREAM de la série FTORO.LLT. Le tableau 5 présente les statistiques descriptives pour toutes les entreprises listées à la Bourse de Toronto qui n'ont pas fait défaut.

Tableau 5 : Statistiques descriptives de toutes les entreprises listées à la Bourse de Toronto n'ayant pas fait défaut (en millions de \$ CA)

Mesure statistique	Capitalisation boursière
Moyenne	854,93
Médiane	59,03
Mode	285,38
Écart-Type	4 758,10
Coefficient d'asymétrie	26,12
Kurtosis	1 188,95
Étendue	366 400,00
Intervalle interquartile	255,77
Nombre d'observations	3 109 201

Nous possédons 3 109 201 observations quotidiennes des valeurs des capitalisations boursières des firmes n'ayant pas fait défaut, avec une moyenne de 854,93 millions de dollars canadiens. L'écart type de la capitalisation boursière s'élève à 4 758,10 millions de dollars canadiens, reflétant l'inclusion de firmes possédant de très grandes valeurs de capitalisation boursière.

4.3 Statistiques sur l'ensemble des entreprises conservées pour l'analyse

Les entreprises financières ont été éliminées de la base de données puisque celles-ci ne possèdent généralement pas la même structure d'états financiers que les entreprises non financières. De plus, 51 entreprises ayant fait défaut ont été éliminées car celles-ci ne possédaient pas d'états financiers suffisamment complets pour créer les variables financières incluses dans les modèles hybrides. Ainsi, la base de données finale comporte un total de 684 entreprises publiques canadiennes non financières, dont 57 d'entre elles ont fait défaut. Le tableau suivant présente les statistiques descriptives des entreprises conservées pour l'analyse.

Tableau 6 : Statistiques descriptives des entreprises conservées pour l'analyse (en millions de \$ CA)

Mesure statistique	Non-Défauts		Défauts	
	Capitalisation Boursière	Passif	Capitalisation Boursière	Passif
Moyenne	922,30	809,93	415,73	289,99
Médiane	67,92	42,59	15,98	30,15
Mode	5,27	3,55	2,20	-
Écart-Type	4 838,35	2 914,00	1 456,95	930,16
Coefficient d'asymétrie	32,36	7,75	5,18	5,40
Kurtosis	1 535,67	80,09	28,92	36,14
Étendue	250 432,42	53 466,00	9 855,19	8 103,00
Intervalle interquartile	394,48	258,19	59,65	68,33
Nombre d'observations	1 885 707	5 339	47 311	281

4.4 Décalage des données comptables

Comme l'on fait Dionne et al. (2005), et à l'instar de Vassalou et Xing (2003), ce mémoire ne considère que les états financiers disponibles aux investisseurs puisque les dates fiscales des états financiers des firmes ne correspondent jamais avec la date de publication réelle. En général, les entreprises publient leurs états financiers 3 à 4 mois après leur date fiscale, et par conséquent, il serait imprudent de ne pas décaler les données comptables de cette même période, faute de quoi, le pouvoir discriminant du modèle structurel serait surestimé. Puisque la base de données comporte les dates de publication des états financiers, il est possible de décaler les données comptables. Par exemple, les informations comptables d'une entreprise présentant une date fiscale du 30 juin 1994 ne pourront être utilisées qu'à partir du 30 octobre 1994, et ce, pour les 12 mois qui suivront.

De plus, il a été nécessaire d'avancer la date de défaut d'un an pour les entreprises ayant fait défaut car sinon, la composante du modèle de score n'aurait pu être calculée lors de la dernière observation. Ceci explique le fait que des défauts sont observés pour les années 1988 et 1989, alors que dans l'échantillon initial, les défauts débutaient en 1990. Le tableau 7 illustre la fréquence annuelle des données utilisées pour les modèles hybrides (régressions probit).

Tableau 7 : Fréquence par année des données utilisées pour le modèle final⁸

Année	0: Non défaut 1: Défaut	Nombre total	Pourcentage	Nombre de défauts initiaux
1988	0	99	97,06%	0
	1	3	2,94%	
1989	0	111	95,69%	0
	1	5	4,31%	
1990	0	132	99,25%	13
	1	1	0,75%	
1991	0	149	98,68%	12
	1	2	1,32%	
1992	0	150	98,04%	11
	1	3	1,96%	
1993	0	177	98,33%	9
	1	3	1,67%	
1994	0	185	97,37%	7
	1	5	2,63%	
1995	0	229	99,13%	8
	1	2	0,87%	
1996	0	280	100,00%	4
	1	0	0,00%	
1997	0	328	98,50%	6
	1	5	1,50%	
1998	0	381	99,22%	5
	1	3	0,78%	
1999	0	427	99,30%	9
	1	3	0,70%	
2000	0	462	98,72%	9
	1	6	1,28%	
2001	0	505	98,44%	10
	1	8	1,56%	
2002	0	563	99,12%	10
	1	5	0,88%	
2003	0	588	99,49%	11
	1	3	0,51%	
2004	0	66	100,00%	6
	1	0	0,00%	
Total	0	4766	98,82%	130
	1	57	1,18%	

4.5 Le taux sans risque

Le modèle retenu dans ce mémoire requière également l'inclusion du taux sans risque comme variable. Le taux retenu est celui des bons du Trésor canadien provenant de la base de données *International Financial Statistics* (IMF). Ils définissent ce taux comme étant la moyenne pondérée des rendements sur achat de

⁸ DIONNE, Georges et al. (2005). « Estimation of the Default Risk of Publicly Traded Companies », working paper, Bank of Canada, p.29.

bons avec une maturité de 3 mois. À titre de référence, le tableau 8 présente l'évolution de ce taux pour les années étudiées.

Tableau 8 : Statistiques descriptives du taux sans risque (1986 à 2004).

Statistique	Taux hors risque
Moyenne	0,0598
Écart-type	0,0289
Minimum	0,0220
Médiane	0,0534
Maximum	0,1205

5. Résultats

Cette section portant sur les résultats des estimations comporte trois grandes parties. Premièrement, des statistiques descriptives des probabilités de défaut et des paramètres estimés par le biais de la composante structurelle sont exposées. Dans un second temps, ces probabilités de défaut seront insérées dans les modèles hybrides proposés par Dionne et al. (2005) afin de déterminer si le fait de rendre endogène la barrière de défaut permet de mieux prédire le défaut des firmes. Finalement, cette section se termine avec une discussion des raisons qui pourraient justifier les différents résultats obtenus entre l'étude de Dionne et al. (2005), de Brockman et Turtle (2003) et ceux de ce mémoire.

5.1 Résultats de l'estimation du modèle de Brockman et Turtle (2003) par maximum de vraisemblance

Les tableaux 9 et 10 présentent les statistiques descriptives des paramètres μ , σ et H ainsi que le ratio de barrière-sur-dette. À priori, il est intéressant de constater que les firmes ayant fait défaut présentent, en moyenne, un paramètre μ considérablement inférieur à celui des firmes survivantes (-0,1978 vs 0,1600 respectivement)⁹. Toutes choses étant égales par ailleurs, un rendement espéré inférieur au niveau de la valeur des actifs (μ) devrait coïncider avec une probabilité supérieure d'atteindre la valeur critique H , et donc, déclencher la faillite de la firme en question. De plus, on constate que les défauts démontrent une volatilité supérieure avec un sigma moyen de 0,8169 vs 0,5196 pour les entreprises survivantes.

⁹ De tels résultats négatifs ont déjà été documentés dans l'étude de Hao (2006).

Tableau 9 : Statistiques descriptives des paramètres μ et σ obtenus par l'estimation de maximum de vraisemblance (D et ND signifient respectivement Défaut et Non-Défaut)

	mu		sigma	
	D	ND	D	ND
Moyenne	-0,1978	0,1600	0,8169	0,5196
Mediane	-0,0146	0,1193	0,6592	0,4269
Mode	0,0000	0,2455	0,0000	0,1806
Ecart-type	1,0084	0,5470	0,5344	0,4397
Erreur moy std	0,0855	0,0089	0,0453	0,0071
Skewness	0,0290	1,8006	1,5022	7,7512
Kurtosis	9,4333	33,1845	3,0682	113,5273
Min	-5,4124	-3,7697	0,0956	0,0347
Max	4,7766	9,4173	3,2835	8,3467

Tableau 10 : Statistiques descriptives de la barrière de défaut (en milliers de \$ CA) et du ratio barrière sur dette obtenus par l'estimation de maximum de vraisemblance (D et ND signifient respectivement Défaut et Non-Défaut)

	Barrière		Barrière/Dette	
	D	ND	D	ND
Moyenne	77 881,4	324 911,0	2,3682	2,8335
Mediane	5 797,0	15 276,0	0,5193	0,5157
Mode	-	344,3	-	12,4463
Ecart-type	290 260,0	1 283 027,0	7,0359	16,9852
Erreur moy std	24 619,5	20 791,6	0,5989	0,2752
Skewness	6,0641	10,9298	5,2526	19,0589
Kurtosis	42,1818	192,4888	29,8588	483,5882
Min	5,8928E-07	5,1834E-08	2,5904E-11	2,7267E-11
Max	2,5260E+06	3,4688E+07	4,9338E+01	5,1893E+02

Au niveau de la barrière de défaut, on remarque des moyennes assez élevées, notamment une moyenne du ratio de barrière sur dette de 2,3682 et de 2,8335 pour les défauts et non défauts respectivement. Cependant, ces statistiques sont quelque peu trompeuses puisque l'échantillon utilisé comporte des entreprises possédant un niveau d'endettement très faible. Par conséquent, leur ratio de barrière sur dette est très élevé, ce qui fait augmenter la moyenne considérablement. Par conséquent, ce ratio est présenté, au tableau 11, en fonction des percentiles.

Tableau 11 : Distribution du ratio barrière-sur-dette (H/X) par percentiles

	Nb Obs	Centiles des H/X					Proportion où H<X
		5%	25%	50%	75%	95%	
Défauts	139	0,0000	0,1297	0,5193	1,5723	9,5008	0,6667
Non-défauts	3808	0,0000	0,0598	0,5157	1,2328	8,0190	0,7297
Toutes	3947	0,0000	0,0631	0,5158	1,2397	8,1816	0,7275

Les résultats de cette étude confirment donc une des conclusions avancées par l'étude de Wong et Choi (2006), soit que la majorité des firmes présentent des barrières de défaut inférieures à leur niveau d'endettement, ce qui contredit évidemment les résultats obtenus dans l'étude de Brockman et Turtle (2003). En effet, on constate que 72,75% de toutes les firmes étudiées dans cette recherche présentent un ratio de barrière sur dette inférieur à 1 quand on estime la barrière avec la méthodologie suivie dans ce mémoire. On aperçoit également des ratios de barrière sur dette très élevés au niveau du 95^e centile, ce qui reflète l'impact des entreprises possédant un niveau d'endettement très faible.

Afin d'illustrer l'impact de rendre endogène la barrière de défaut et d'obtenir des ratios de barrière-sur-dette majoritairement inférieurs à 1, les probabilités de défaut de certaines firmes sont calculées selon la méthodologie exacte de Brockman et Turtle (2003). Ces probabilités sont ensuite comparées à celles obtenues dans ce mémoire pour les mêmes firmes et années de prédiction. Ceci permet d'observer l'impact sur les probabilités de défaut d'utiliser le mauvais proxy proposé par Brockman et Turtle (2003).

Cependant, en raison du calcul de la volatilité des actifs des firmes proposé par ces auteurs, cette analyse ne peut s'effectuer que pour un sous-échantillon des firmes n'ayant pas fait défaut. Voici comment ces auteurs calculent la volatilité des actifs : « Pour mesurer la volatilité des actifs, nous calculons d'abord la variance trimestrielle des variations en pourcentage des valeurs marchandes des actifs pour chaque firme avec un minimum de 10 années d'observations. Notre mesure annuelle de la volatilité, σ , est ensuite trouvée en prenant la racine carrée de quatre fois la variance trimestrielle. » (Brockman et Turtle, 2003, p.518). Afin d'obtenir au moins cinq probabilités de défaut pour chaque firme, seules les firmes présentant un minimum de 15 années d'observations sont conservées, ce qui exclu totalement les entreprises ayant fait défaut. Le sous échantillon regroupe 170 firmes et permet de calculer 1 267 probabilités de défaut. Le tableau suivant compare les probabilités de défaut (et autres paramètres) issues des deux méthodologies pour les firmes et années en question.

Tableau 12 : Comparaison des résultats entre la méthodologie de Brockman et Turtle (2003) et la méthodologie suivie dans ce mémoire (barrière de défaut, valeur des actifs et de la capitalisation boursière toutes présentées en millions de \$ CA).

	Moyenne	Médiane	Écart Type	Erreur standard	Minimum	Maximum
<i>Brockman et Turtle (2003)</i>						
Probabilité de défaut	26,80%	15,62%	28,68%	0,81%	0,00%	99,76%
Barrière de défaut	1 685,00	205,99	4 042,09	113,56	0,06	34 077
Valeur marchande des actifs	2 450,54	357,57	5 586,34	156,94	3,26	44 700,00
Sigma	0,354	0,281	0,288	0,008	0,057	5,119
<i>Maximum de vraisemblance</i>						
Probabilité de défaut	6,42%	0,00%	15,77%	0,44%	0,00%	100,00%
Barrière de défaut	541,71	32,55	1 699,42	47,74	0,00	22 531
Valeur marchande des actifs	1 861,05	240,16	4 474,23	125,80	2,40	40 788,00
Sigma	0,438	0,328	0,385	0,011	0,025	8,184
<i>Variabes en commun</i>						
Dette	881,18	113,65	2093,77	58,82	29,00	23 900,00
Capitalisation boursière	1344,44	141,92	3435,33	96,51	0,54	34 800,00
Taux sans risque	3,83%	3,70%	0,97%	0,03%	2,20%	6,67%

Les probabilités de défaut diffèrent grandement entre les deux méthodologies. En effet, celles de Brockman et Turtle (2003) présentent une moyenne des probabilités de défaut des firmes de 26,8% contre une de 6,42% pour la méthodologie suivie dans ce mémoire. Cette différence est due, notamment, à une valeur de la barrière de défaut considérablement plus élevée dans la méthodologie de Brockman et Turtle (2003) par rapport à celle issue de la méthode du maximum de vraisemblance. Le ratio de la valeur marchande des actifs sur la barrière de défaut est de 1,45 versus 3,44 pour les méthodologies de Brockman et Turtle (2003) et du maximum de vraisemblance respectivement. Il n'est pas surprenant de constater que la probabilité de défaut est une fonction croissante de la distance qui existe entre la valeur marchande des actifs et la valeur critique des actifs (la barrière de défaut). Les résultats indiquent donc que le proxy de la valeur marchande des actifs proposé par Brockman et Turtle (2003) surestime non seulement la valeur des actifs mais également la barrière de défaut.

Finalement, le tableau 13 permet de comparer la totalité des probabilités de défaut obtenues dans ce mémoire versus celles obtenues par la composante structurelle présentée dans l'étude de Dionne et al. (2005). Le modèle estimé dans ce mémoire a généré des probabilités de défaut et des écarts-types inférieurs pour les deux types

d'entreprises tandis que la médiane et le coefficient d'asymétrie varient très peu entre les deux études.

Tableau 13 : Statistiques descriptives des probabilités de défaut obtenues par la méthode de maximum de vraisemblance et par la composante structurelle de Dionne et al. (2005) (D et ND signifient respectivement Défaut et Non-Défaut)

	Probabilités de défaut			
	Max. Vraisemblance		Dionne et al. (2005)	
	D	ND	D	ND
Moyenne	0,3256	0,0705	0,3568	0,0880
Mediane	0,2720	0,0001	0,2226	0,0001
Mode	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Ecart-type	0,2909	0,1614	0,3649	0,2050
Erreur moy std	0,0248	0,0026	0,0236	0,0029
Asymétrie	0,6353	2,8994	0,6563	2,8422
Kurtose	-0,7272	8,6047	-1,0946	7,5192
Min	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Max	0,9850	1,0000	1,0000	1,0000

Des tests paramétriques sur la variance et la moyenne démontrent que la variance est statistiquement différente entre les deux études pour les deux types d'entreprises tandis que la moyenne des probabilités de défaut est statistiquement différente que pour les entreprises n'ayant pas fait défaut. Le tableau 14 résume les tests paramétriques effectués. Notons que ces tests se basent sur d'hypothèses très fortes, dont l'indépendance des échantillons qui eux, suivent des distributions normales.

Tableau 14 : Tests paramétriques : Comparaisons des résultats issus de Dionne et al. (2005) et ceux issus de ce mémoire

Test de l'égalité de la variance des probabilités de défauts moyennes					
Population	Paramètre	DL Numérateur	DL Dénominateur	Statistique F	Pr > F
Défauts	Variance	238	138	1,5735	0,0018
Non-défauts	Variance	4831	3807	1,6132	<0,0001

Tests de l'égalité des moyennes des probabilités de défauts					
Population	Paramètre	Variances	Degrés de liberté	Statistique-t	Pr > t
Défauts	Moyenne	Différentes	342,8	0,8612	0,3897
Non-défauts	Moyenne	Différentes	8640,0	4,3177	<0,0001

Le tableau 15 présente l'évolution par année des probabilités de défaut prédites pour les entreprises n'ayant pas fait défaut et celles l'ayant fait. Il est intéressant de noter que les années à proximité des deux dernières récessions au Canada (1991 et 2001) présentent des probabilités de défaut prédites les plus élevées.

Tableau 15. Évolution des probabilités de défaut prédites par année

Année	Probabilité de défaut des entreprises n'ayant pas fait défaut	Probabilité de défaut des entreprises qui ont fait défaut
1988	10,22%	24,34%
1989	3,90%	29,35%
1990	5,37%	23,07%
1991	11,02%	36,24%
1992	9,87%	49,90%
1993	8,50%	45,47%
1994	3,58%	21,65%
1995	5,86%	28,34%
1996	3,26%	33,94%
1997	2,65%	21,22%
1998	5,80%	24,75%
1999	11,66%	29,61%
2000	8,55%	27,05%
2001	9,44%	36,90%
2002	7,70%	41,55%
2003	8,24%	44,95%
2004	4,27%	16,87%
Moyenne	7,05%	32,56%

Les figures suivantes présentent des exemples de l'évolution des probabilités de défaut prédites pour deux firmes en particulier. Quoique, dans ce travail, les probabilités de défaut aient été calculées en fréquence annuelle seulement, il est possible de calculer des probabilités de défaut sur une fréquence trimestrielle. Il s'agit de fixer le point de départ de la fenêtre d'estimation sur le trimestre voulu et de s'assurer que cette fenêtre s'étende sur les huit trimestres suivants. La figure 3 présente l'exemple de la firme Discoverware Inc., qui avait fait défaut le 1^{er} janvier 2001. La modélisation des probabilités de défaut de cette entreprise semble cohérente avec le modèle puisque le défaut se matérialise au point où les probabilités de défaut prédites sont très élevées. En effet, la majorité des défauts présentent une évolution des probabilités de défaut similaires. Cependant, certaines entreprises présentent des résultats qui sembleraient, à priori, inconsistants avec le modèle, et ce, particulièrement pour les entreprises n'ayant pas fait défaut. À titre

d'exemple, les probabilités de défaut de l'entreprise Algo Group Inc. sont présentées dans la figure 4, ainsi que la volatilité de ses actions. Cet exemple démontre la sensibilité du modèle utilisé dans ce mémoire à la volatilité des actions de la firme.

Figure 3 : Évolution trimestrielle des probabilités de défaut (PD) prédites de la firme Discoverware (Janvier 1999 à Janvier 2001)

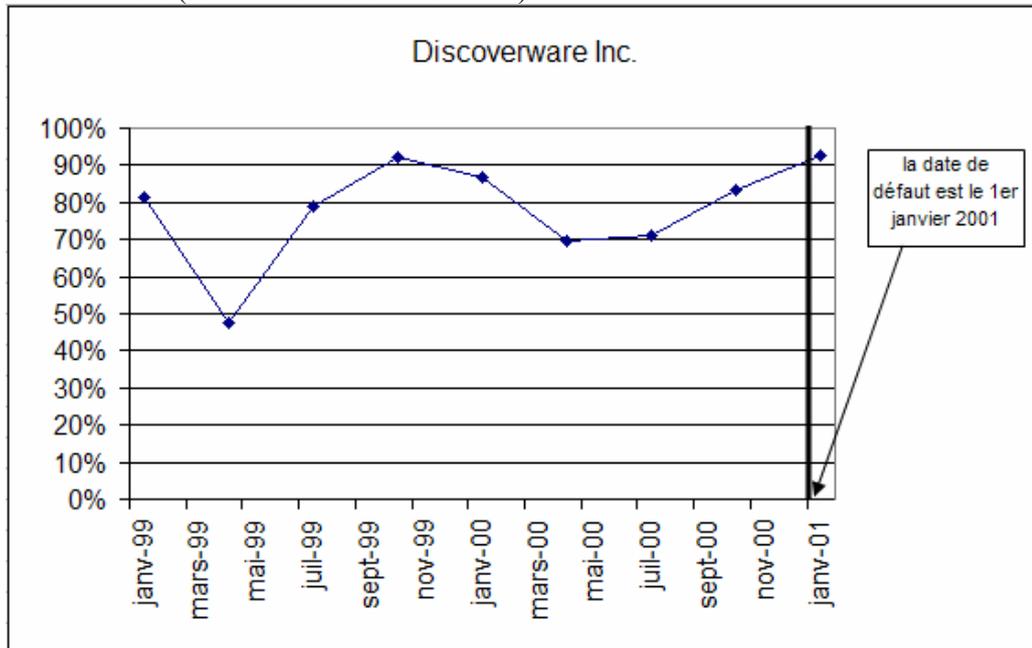
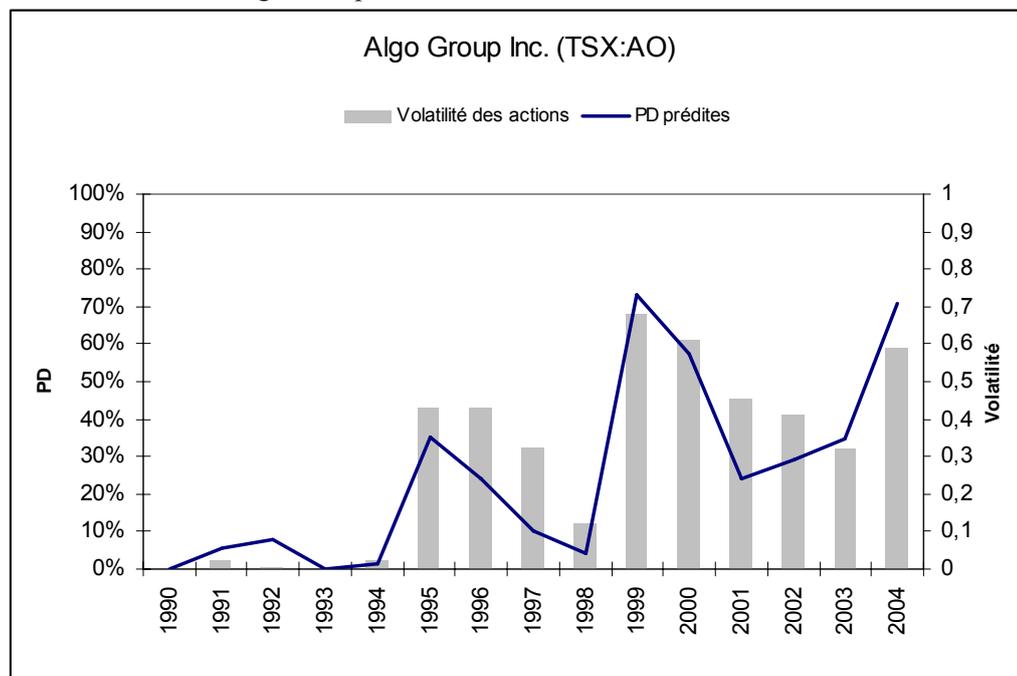


Figure 4 : Évolution annuelle des probabilités de défaut (PD) prédites et de la volatilité des actions de la firme Algo Group Inc. de 1990 à 2004.



5.2 Performance des modèles hybrides

Dans l'étude de Dionne et al. (2005), les auteurs estiment des modèles probit en panel qui incluent certains ratios financiers et la composante structurelle. La variable dépendante (et dichotomique) prend la valeur unitaire lorsque le défaut se produit ou la valeur nulle sinon. L'objectif était d'observer si la composante structurelle avait une valeur ajoutée une fois incluse dans le modèle hybride. Si le coefficient de la composante structurelle (les probabilités de défaut estimées) est statistiquement différente de zéro une fois incluse dans le modèle, son addition au modèle non-structurel retenu est justifiée. La méthodologie complète du modèle probit en panel, telle qu'elle a été présentée dans Dionne et al. (2005), est incluse en annexe 3.

Les auteurs présentent plusieurs variantes des variables retenues dans le probit et utilisent différents tests afin de classifier les modèles. Les auteurs retiennent trois modèles en particulier, et ensemble, ces modèles incluent des variables comptables qui permettent de qualifier la liquidité, la profitabilité et la solvabilité des firmes étudiées.

Il est important de mentionner que la méthodologie retenue dans ce mémoire produit moins d'estimations de probabilités de défaut que celle retenue dans Dionne et al. (2005). En effet, la méthodologie suivie dans ce mémoire requiert que la fenêtre d'estimation contienne 500 jours ouvrables dans deux années consécutives. Ceci diffère de la méthodologie retenue dans Dionne et al. (2005) où une fenêtre d'estimation de 522 jours ouvrables consécutifs était utilisée pour ensuite avancer cette fenêtre quotidiennement et calculer des probabilités de défaut moyennes pour chaque année. Ainsi, il se pouvait que cette fenêtre d'estimation s'étale sur 3 années différentes. Par exemple, une fenêtre d'estimation débutant en mi-2002 se terminerait en mi-2004. Par conséquent, une comparaison adéquate des résultats des deux études doivent s'effectuer sur un pied d'égalité. Ainsi, nous reproduisons les résultats des modèles hybrides de l'étude de Dionne et al. (2005) avec leur propre composante structurelle, mais seulement pour les estimations produites par la

composante structurelle dans ce mémoire¹⁰. Ensuite, les mêmes modèles sont estimés de nouveau, mais en utilisant les probabilités de défaut calculées dans ce mémoire. Le tableau 16 présente cette comparaison des résultats pour les 3 modèles hybrides retenus dans Dionne et al. (2005). Les résultats des probits non-temporels sont présentés en annexe 2.

Afin de faciliter la discussion qui suit, les modèles utilisant les probabilités de défaut calculées dans ce mémoire seront désignés « les modèles à barrière endogène », tandis que les modèles de Dionne et al. (2005) seront appelés « les modèles à barrière exogène ».

Tableau 16. Comparaison des résultats des modèles hybrides à barrière endogène et à barrière exogène

Les coefficients estimés sont sur la première ligne, les *p-values* sur la seconde.

Paramètre	Modèles à barrière endogène			Modèles à barrière exogène		
	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3
Constante	-4,1528 <,0001	-3,3222 <,0001	-2,7220 <,0001	-4,5512 <,0001	-3,2620 <,0001	-2,5796 <,0001
Moyenne annuelle PD 1 an	3,2771 <,0001	2,1128 <,0001	1,7477 0,0010	1,6321 0,0922	0,7271 0,0480	0,4248 0,2745
Encaisse			0,0081 0,0860			0,0078 0,1214
Actif à court terme			-0,0091 0,0150			-0,0100 0,0123
Passif à court terme			0,0030 0,1527			0,0031 0,1734
Bénéfice non réparti			-0,0076 0,0038			-0,0093 0,0014
Valeur nette			-0,0110 0,0021			-0,0129 0,0008
Passif total			-0,0064 0,0041			-0,0072 0,0031
Actif total			0,0070 0,0019			0,0079 0,0011
Profitabilité < 0		1,3663 <,0001	1,0751 0,0002		1,6796 <,0001	1,3351 <,0001
0% < Profitabilité < 6%		0,4312 0,1873	0,3888 0,2516		0,4495 0,1877	0,4046 0,2582
Valeur nette/passif total		-0,6861 <,0001	-0,5526 0,0006		-0,8235 <,0001	-0,6382 0,0002
Bénéfice non réparti/passif total		-0,0840 0,0056	-0,0559 0,0483		-0,1234 0,0003	-0,0820 0,0090
ρ	0,6824 0,0324	0,4754 0,1424	0,3981 0,2216	0,9711 0,0003	0,5834 0,0813	0,5156 0,1146
-2 Log Likelihood	381,0	298,7	262,2	398,3	329,6	283,1
AIC	387,0	312,7	290,2	404,3	343,6	311,1
AUC	0,825	0,950	0,963	0,744	0,923	0,950

¹⁰ Spécifiquement, le nombre d'observations utilisé dans le probit passe de 4 889 à 3940. Cependant, le même nombre d'observations des défauts (où la variable dépendante prend la valeur unitaire) est conservé.

À priori, seul le modèle 1 à barrière endogène comporte un coefficient de la composante structurelle significatif, et ce, à tous les niveaux de confiance envisageables. En effet, ce coefficient s'élève à 3,2771 avec une *p-value* inférieure à 0,0001 tandis que le modèle 1 à barrière exogène présente un coefficient pour le même paramètre significatif qu'à un niveau de confiance de 90%.

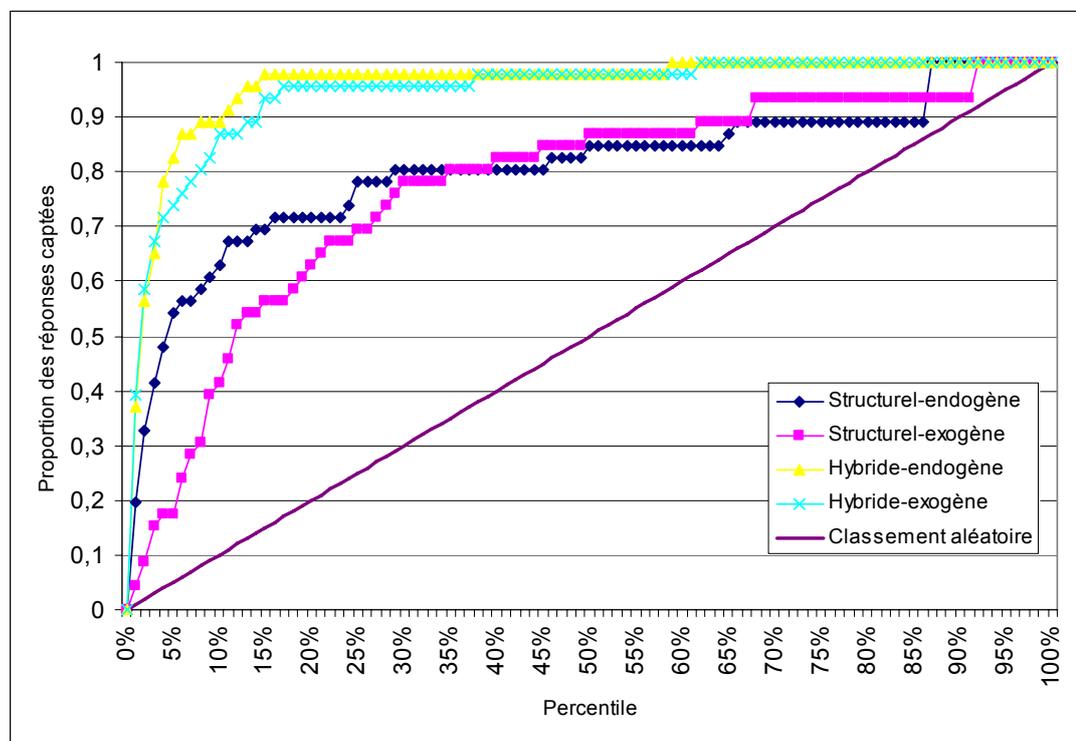
Le modèle 2 ajoute certaines variables comptables à la composante structurelle, et l'on trouve que pour les deux études, le coefficient de la composante structurelle est significativement différente de zéro à un niveau de confiance de 95%, quoi que celle du modèle à barrière endogène est largement plus significative avec une *p-value* encore inférieure à 0,0001. Finalement, seule le coefficient de la composante structurelle du modèle 3 est statistiquement différente de zéro avec un coefficient de 1,7477 et une *p-value* de 0,001.

De plus, on remarque que le coefficient de corrélation (ρ) est significativement différent de zéro que dans les modèles 1, où seule la composante structurelle est désignée comme variable explicative, si l'on considère un niveau de confiance de 95%. Cependant, seul le modèle 1 à barrière exogène présente un coefficient de corrélation significatif à un niveau de confiance de 99%. Ceci permet de conclure que les probabilités de défaut calculées par la composante structurelle sont corrélées dans le temps.

En somme, il y a deux grandes conclusions à retenir au niveau des modèles hybrides présentés ci-haut. Premièrement, les 3 modèles retenus présentent des coefficients de la composante structurelle ayant une significativité supérieure lorsque la barrière de défaut est traitée comme étant endogène. Par conséquent, la significativité des 3 modèles se voit améliorée quand la composante structurelle est celle présentée dans ce mémoire. Finalement, on peut également remarquer que les coefficients des variables comptables des 3 modèles demeurent sensiblement les mêmes (leur significativité ne change pas) indépendamment que la barrière soit endogène ou exogène.

Afin de mieux visualiser la performance des modèles hybrides ci-haut, la figure suivante présente le graphique des gains des modèles 1 et 3, et ce, quand la barrière de défaut est endogène et exogène (Dionne et al. (2005)). Chaque modèle voit ses probabilités de défaut prédites classées en ordre décroissant et regroupées en percentiles (axe des abscisses). Le graphique des gains mesure le nombre de défauts réels dans chaque percentile des probabilités de défaut prédites. Un modèle parfait contiendrait la totalité des défauts dans le percentile le plus élevé, tandis qu'un modèle purement aléatoire afficherait une courbe à 45%. Que ce soit dans le cas des modèles structurels ou hybrides, on remarque que la courbe dominante est toujours celle où la barrière de défaut est endogène.

Figure 5 : Graphique des gains



Finalement, nous analysons les erreurs de type I et type II des quatre modèles présentés dans le graphique des gains. À priori, un choix plutôt arbitraire doit s'effectuer au niveau de la probabilité de défaut prédite qui déterminera si le modèle prédit le défaut ou non des firmes. Le taux retenu est celui calculé à partir des estimés des coefficients probit, tout comme l'on fait Dionne et al. (2005). Une fois les observations classées, l'on peut comparer les prédictions avec la réalité pour déterminer le nombre d'erreurs de type I (prédire qu'une firme ne fasse pas défaut

quand elle le fait réellement) et de type II (prédire qu'une firme fasse défaut quand elle ne le fait pas réellement) que le modèle en question a commis. Le tableau 17 démontre que les deux modèles à barrière endogène produisent moins d'erreurs de type I et type II que les modèles à barrières exogènes respectifs. Ceci démontre une fois de plus l'avantage de rendre endogène la barrière de défaut des firmes.

Tableau 17 : Performance de prédiction des défauts (*= erreur de type I et ** = erreur de type II)

Prédiction du modèle	Défauts effectifs	Non défauts effectifs
<i>Modèle 3 à barrière endogène</i>		
<i>Seuil: Moyenne des probabilités de défauts prédites = 0,859%</i>		
Défauts	51 89,47%	365 9,40%**
Non défauts	6 10,53%*	3518 90,60%
Total	57	3883
<i>Modèle 3 à barrière exogène</i>		
<i>Seuil: Moyenne des probabilités de défauts prédites = 0,881%</i>		
Défauts	49 85,96%	417 10,74%**
Non défauts	8 14,04%*	3466 89,26%
Total	57	3883
<i>Modèle 1 à barrière endogène</i>		
<i>Seuil: Moyenne des probabilités de défauts prédites = 0,628%</i>		
Défauts	30 52,63%	301 7,75%**
Non défauts	27 47,37%*	3582 92,25%
Total	57	3883
<i>Modèle 1 à barrière exogène</i>		
<i>Seuil: Moyenne des probabilités de défauts prédites = 0,663%</i>		
Défauts	19 33,33%	349 8,99%**
Non défauts	38 66,67%*	3534 90,01%
Total	57	3883

5.3 Discussion de la différence des résultats obtenus

Nous terminons ce travail en soulignant brièvement les principales différences qui existent entre ce mémoire et l'étude de Brockman et Turtle (2003) ainsi que celles qui existent entre ce mémoire et l'étude de Dionne et al. (2005).

Comparativement au modèle original de Brockman et Turtle (2003), ce mémoire a privilégié la méthode du maximum de vraisemblance afin de ne pas utiliser le proxy que ces auteurs proposent pour calculer la valeur marchande des actifs. Il a été démontré au tableau 12 que, pour les 170 firmes étudiées, la méthode de Brockman et Turtle (2003) produit des barrières de défaut et valeurs des actifs supérieures à celles produites par la méthode de maximum de vraisemblance. De plus, notre exemple a montré que le ratio de la valeur marchande des actifs sur la barrière de défaut est plus grand quand on utilise la méthode de maximum de vraisemblance, ce qui génère des probabilités de défaut moindres que celles obtenues par la méthodologie de Brockman et Turtle (2003).

Par rapport à l'étude de Dionne et al. (2005), les principales différences sont :

1. Le fait que la barrière de défaut n'est plus fixée à une valeur quelconque. Plutôt, la barrière est considérée comme étant endogène et la méthode de maximum de vraisemblance permet de l'estimer. Quoique l'impact de rendre endogène la barrière de défaut ne s'observait pas directement au niveau des moyennes des probabilités de défaut, la variance des probabilités de défaut a diminué. Par conséquent, lorsque les modèles hybrides de Dionne et al. (2005) incluent les probabilités de défaut calculées avec la méthode du maximum de vraisemblance, leurs capacités prédictives augmentent.
2. Par ailleurs, ce mémoire considérait la dette entière des firmes, tandis que l'étude de Dionne et al. (2005) définissait la dette des firmes comme étant la somme du passif à court terme et la moitié du passif à long terme.
3. Finalement, quoique les deux études utilisent une fenêtre d'estimation de deux années, la méthodologie proposée dans ce travail nécessitait que les observations soient contenues dans 2 années de calendrier consécutives. Ceci diffère de la méthodologie retenue dans Dionne et al. (2005) où une fenêtre d'estimation de 522 jours ouvrables consécutifs était utilisée pour ensuite avancer cette fenêtre quotidiennement et calculer des probabilités de défaut moyennes pour chaque année. Ainsi, il se pouvait que cette fenêtre d'estimation s'étale sur 3 années

différentes. Par exemple, une fenêtre d'estimation débutant en mi-2002 se terminerait en mi-2004. Par conséquent, leur méthodologie permet d'obtenir un plus grand nombre d'estimations des probabilités de défaut.

6. Conclusion

L'objectif de ce mémoire était d'appliquer la méthodologie proposée par Brockman et Turtle (2003) à un échantillon d'entreprises publiques canadiennes dont les actions sont transigées à la Bourse de Toronto. Ce modèle se devait d'être étendu à la méthode du maximum de vraisemblance afin de résoudre le problème du manque d'observabilité de la valeur marchande des actifs et pour rendre endogène la barrière de défaut des firmes. Pour ce faire, nous avons retenu la modélisation proposée par Duan, Gauthier et Simonato (2004) du modèle de Brockman et Turtle (2003).

La base de données utilisée dans ce mémoire était identique à celle utilisée dans une étude de Dionne et al. (2005) où ils étudiaient la capacité de modèles hybrides à calculer le risque de défaut d'entreprises publiques canadiennes. Cependant, leur composante structurelle fixait la barrière de défaut égale à la valeur nominale de la dette.

Les résultats de cette étude ont démontré, dans un premier temps, que la majorité des firmes étudiées possèdent des barrières de défaut inférieures à leur endettement, ce qui vient démentir un des résultats de l'étude de Brockman et Turtle (2003). De plus, les capacités prédictives des trois modèles hybrides présentés dans Dionne et al. (2005) sont améliorées lorsque leur composante structurelle est substituée par celle présentée dans cet ouvrage. Les coefficients des probabilités de défaut deviennent significativement différents de zéro à un niveau de confiance de 99%, et ce, à travers les trois modèles. Finalement, le graphique des gains ainsi qu'un examen des erreurs de type I et II ont aussi confirmé l'avantage de rendre endogène les barrières de défaut des firmes.

Dans un travail ultérieur, il serait intéressant de tester la sensibilité du modèle appliqué dans ce mémoire à la durée de vie des options. En effet, ce paramètre fut fixé arbitrairement dans ce travail et une analyse de sensibilité permettrait d'illustrer l'impact de la durée de vie des options aux probabilités de défaut calculées.

Bibliographie

-
- ALTMAN, E. I. « Financial Ratios, Discriminant Analysis and Prediction of Corporate Bankruptcy », *The Journal of Finance*, vol. 23 (4), p. 589–609.
- BARCLAY, M. et C.W. SMITH Jr. (1995a). « The Maturity Structure of Corporate Debt », *Journal of Finance*, vol. 50, p. 609-631.
- BARCLAY, M. et C.W. SMITH Jr. (1995b). « The Priority Structure of Corporate Liabilities », *Journal of Finance*, vol. 50, p. 899-917.
- BLACK, Fischer et Myron SCHOLLES (1973). « Pricing of Options and Corporate Liabilities », *The Journal of Political Economy*, vol. 81 (3), p. 637–654.
- BLACK, Fischer et John C. COX (1976). « Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indentures Provisions », *The Journal of Finance*, vol. 31, p. 351–367.
- BRENNAN, M.J. et E.S. SCHWARTZ (1978). « Corporate Income Taxes, Valuation and the Problem of Optimal Capital Structure », *The Journal of Business*, vol. 51, p. 103-114.
- BRYIS E. et F. de VARENNE (1997). « Valuing Risky Fixed Rate Debt; An Extension », *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 32, p. 239–248.
- BROCKMAN, Paul et H.J. TURTLE (2003). « A Barrier Option Framework for Corporate Security Valuation », *Journal of Financial Economics*, vol. 67, p. 511-529.
- COLLIN-DUFRESNE, Pierre et Robert S. GOLDSTEIN (2001). « Do Credit Spreads Reflect Stationary Leverage Ratios? », *The Journal of Finance*, vol. 61, p. 1929-1957.
- DIONNE, Georges, Sadok LAAJIMI, Sofiane MEJRI et Madalina PETRESCU (2005). Estimation of the Default Risk of Publicly Traded Companies », working paper, Bank of Canada, 63 pages.
- DUAN, J.C. (1994). « Maximum Likelihood Estimation Using Price Data of the Derivative Contract », *Mathematical Finance*, vol. 10 (4), p. 461-462.
- DUAN, Jin-Chuan, Geneviève GAUTHIER, Jean-Guy SIMONATO et Sophia ZAANOUN (2003). « Estimating Merton's Model by Maximum Likelihood with Survivorship Consideration », University of Toronto working paper, 24 p.

- DUAN, Jin-Chuan, Geneviève GAUTHIER et Jean-Guy SIMONATO (2004). « On the Equivalence of the KMV and Maximum Likelihood Methods for Structural Credit Risk Models », mimeo, HEC Montréal, 19 p.
- GESKE, Robert (1977). « The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 12, p. 541–552.
- HAO, Hui (2006). « Measuring Firms' Credit Risk Within Structural Models », *Queen's School of Business*, 38 pages.
- HO EOM, Young, Jean HELWEGE et Jing-Zhi HUANG (2004). « Structural Models of Corporate Bond Pricing: An Empirical Analysis », *The Review of Financial Studies*, vol.17, p. 499-544.
- JUNG, K., Y.-C. KING et R. STULZ (1996). « Timing, Investment Opportunities, Managerial Discretion and the Security Issue Decision », *Journal of Financial Economics*, vol. 42, p. 159-185.
- LELAND, Hayne E. (1994). « Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure », *Journal of Finance*, vol. 49, p. 987-1019.
- LELAND, Hayne E. et Klaus Bjerre TOFT (1996). « Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads », *Journal of Finance*, vol. 51, p. 987-1019.
- LONGSTAFF, Francis A. et Eduardo S. SCHWARTZ (1995). « A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt », *The Journal of Finance*, vol. 50, p. 789-820.
- NICKELL, P. et W. PERRAUDIN (1999). « How Much Bank Capital is Needed to Maintain Financial Stability », <http://www.econ.bbk.ac.uk/respap/>, Bank of England, mimeo.
- MERTON, Robert C. (1974). « On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates », *The Journal of Finance*, vol. 29, p. 449–470.
- SOBEHART, Jorge R. et Roger M. STEIN (2000). « Moody's Public Firm Risk Model: A Hybrid Approach to Modeling Short Term Default Risk », *Moody's Investors Service*, Mars 2000, 26 p.
- TUDELA, Merxe. et Garry YOUNG (2003). « A Merton-model Approach to Assessing the Default Risk of UK Public Companies », Bank of England, working paper no.194, 41 p.
- VASICEK, O. (1977). « An Equilibrium Characterization of the Term Structure », *The Journal of Financial Economics*, vol. 5, p. 177-188.
- VASSALOU, M. et XING Y.H. (2004). « Default Risk in Equity Returns », *Journal of Finance*, vol. 59 (2), p. 831-868.

WONG, Hoi Ying, Tsz Wang (2006), "Estimating default barriers from market information », Working paper, Chinese University of Hong Kong, 25 p.

Annexes

Annexe 1 : Résultats de la simulation Monte Carlo.

	Mu	Sigma	H
Vraie	0,1	0,3	5000
Moyenne	0,081	0,300	4976,479
Médiane	0,108	0,300	4982,770
Écart type	0,351	0,034	1137,749
Err. Moy. Std.	0,016	0,002	50,882

« Vraie » fait référence aux vraies valeurs des paramètres qui ont été utilisées afin de générer les valeurs des actifs. Au total, il y a eu 500 simulations représentant chacune les résultats d'une fenêtre d'estimation de 500 jours ouvrables. Les autres valeurs utilisées dans la simulation sont : valeur initiale de la firme = 10 000, valeur de la dette = 6 000, taux sans risque = 0,05 et les valeurs de départ des paramètres mu, sigma et la barrière sont : 0, 0.2 et la valeur de la dette respectivement.

Annexe 2 : Comparaison des probits non-temporels des modèles 1 à 3 issus de l'étude de Dionne et al. (2005).

Paramètre	Duan, Gauthier, Simonato			Banque du Canada		
	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3
Constante	-2,6843 <0,0001	-2,5971 <0,0001	-2,2838 <0,0001	-2,4315 <0,0001	-2,3753 <0,0001	-2,0325 <0,0001
Moyenne annuelle PD 1 an	2,1304 <0,0001	1,5496 <0,0001	1,4021 <0,0001	1,1763 <0,0001	0,5003 0,0417	0,3422 0,2052
Encaisse			0,0064 0,0563			0,0058 0,0806
Actif à court terme			-0,0071 0,0075			-0,0071 0,0053
Passif à court terme			0,0024 0,1100			0,0023 0,1277
Bénéfice non réparti			-0,0060 0,0008			-0,0067 0,0002
Valeur nette			-0,0088 0,0003			-0,0094 <0,0001
Passif total			-0,0052 0,0008			-0,0053 0,0005
Actif total			0,0056 0,0003			0,0058 <0,0001
Profitabilité < 0		1,0641 <0,0001	0,8683 <0,0001		1,2300 <0,0001	1,0185 <0,0001
0% < Profitabilité < 6%		0,3422 0,1345	0,3433 0,1820		0,3112 0,1464	0,3385 0,1653
Valeur nette/passif total		-0,5290 <0,0001	-0,4483 0,0002		-0,5966 <0,0001	-0,4925 <0,0001
Bénéfice non réparti/passif total		-0,0657 0,0170	-0,0469 0,0643		-0,0915 0,0008	-0,0661 0,0081
-2 Log Likelihood	396,369	302,093	264,591	468,233	335,121	287,342
AIC	400,369	314,093	290,591	472,233	347,121	313,342
AUC	0,825	0,950	0,963	0,744	0,923	0,950

Annexe 3 : Méthodologie du modèle hybride

Le texte qui suit traduit intégralement la méthodologie des modèles probit du texte de Dionne et al. (2005).¹¹

3.1 Le modèle probit non temporel

Dans le modèle probit, la variable dépendante est une variable dichotomique prenant la valeur 1 si un événement se produit et la valeur 0 sinon. Dans notre cas, la variable peut prendre les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} y_i &= 1 \text{ si un défaut se produit dans une entreprise;} \\ y_i &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Le vecteur des valeurs des variables explicatives (ratios financiers et autres variables financières ou conjoncturelles) pour une entreprise donnée est défini par x_i tandis que β représente le vecteur des paramètres à estimer. Le modèle probit suppose qu'il existe une variable réponse qualitative (y_i^*) définie par la relation suivante :

$$y_i^* = \beta' x_i + \varepsilon_i \quad (1)$$

En pratique toutefois, y_i^* est une variable latente non observable. Nous observons plutôt la variable dichotomique telle que :

$$\begin{aligned} y_i &= 1 \text{ si } y_i^* > 0 ; \\ y_i &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned} \quad (2)$$

Dans cette formulation, $\beta' x_i$ n'est pas $E(y_i / x_i)$, comme dans le modèle linéaire simple, mais bien $E(y_i^* / x_i)$. À partir des équations (4) et (5), nous obtenons :

¹¹ DIONNE, Georges et al. (2005), « Estimation of the Default Risk of Publicly Traded Companies », working paper, Bank of Canada, p.27 à 30.

$$\text{Prob}(y_i = 1) = \text{Prob}(\varepsilon_i > -\beta' x_i) = 1 - F(\beta' x_i) \quad (3)$$

où F est la fonction de distribution cumulative de ε_i .

Dans ce cas, les valeurs observées de y sont simplement les réalisations d'un processus binomial dont la probabilité est donnée par (6) et qui varie d'observation en observation (selon x_i). La fonction de vraisemblance peut donc être définie comme :

$$\ell = \prod_{y_i=0} F(-\beta' x_i) \prod_{y_i=1} (1 - F(-\beta' x_i)), \quad (4)$$

et les estimations des paramètres β sont donc celles qui maximisent ℓ .

La forme fonctionnelle de F dans (7) dépend des hypothèses qui sont faites sur la distribution des erreurs résiduelles ε_i dans (4). Le modèle probit suppose que ces erreurs sont indépendantes et identiquement distribuées et suivent une loi normale centrée réduite $N(0,1)$. La forme fonctionnelle peut donc être définie comme suit :

$$F(-\beta' x_i) = \int_{-\infty}^{-\beta' x_i} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt. \quad (5)$$

3.2 Le modèle probit avec données de panel

Ce modèle sert à tenir compte des corrélations potentielles entre les différentes observations d'une même entreprise à différents moments dans le temps (différents états financiers annuels). Il peut être défini par la régression suivante :

$$y_{it}^* = \beta' x_{it} + \varepsilon_{it} \quad (6)$$

et la variable dichotomique observée est telle que :

$$y_{it} = 1 \text{ si } y_{it}^* > 0; \quad (7)$$

$$y_{it} = 0 \text{ sinon.}$$

où i représente l'entreprise et t représente la date de l'état financier de l'entreprise i . Pour tenir compte des corrélations temporelles via un modèle à effets aléatoires, il faut décomposer l'erreur en 2 termes :

$$\varepsilon_{it} = v_{it} + \mathcal{G}_i \quad (8)$$

avec $v_{it} \sim N(0,1)$ (l'erreur aléatoire) et $\mathcal{G}_i \sim N(0, \sigma_u^2)$ (l'erreur associée à i), de telle façon que les deux composantes (v_{it} et \mathcal{G}_i) sont distribuées normalement avec une moyenne 0 et sont indépendantes l'une de l'autre. La variance du terme d'erreur ε_{it} peut alors être définie comme suit :

$$\text{var}(\varepsilon_{it}) = \sigma_v^2 + \sigma_g^2 = 1 + \sigma_g^2 \quad (9)$$

et la corrélation comme suit :

$$\text{corr}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{is}) = \rho = \frac{\sigma_g^2}{1 + \sigma_g^2} \quad (10)$$

Le nouveau paramètre libre est donc :

$$\sigma_g^2 = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (11)$$

C'est précisément ce paramètre qui permettra de mesurer s'il existe une corrélation entre les différentes observations (états financiers) d'une même compagnie à travers le temps.

Annexe 4 : Probabilités de défauts physiques.

Dans le présent travail, l'équation ayant servi au calcul des probabilités de défaut faisait intervenir le taux sans risque (équation (10)). Par conséquent, les probabilités de défaut obtenues sont dites risque neutres. Nous présentons ici la formule des probabilités de défaut physiques qui ne fait pas intervenir le taux sans risque.

$$\begin{aligned} \text{Probabilité de défaut} &= \Phi\left(\frac{\ln(H) - \ln(V) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\ &+ \exp\left(\frac{-2\mu(\ln(V) - \ln(H))}{\sigma^2}\right) \cdot N\left(\frac{\ln(H) - \ln(V) + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \text{ si } H \geq F, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &= \Phi\left(\frac{\ln(F) - \ln(V) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\ &+ \exp\left(\frac{-2\mu(\ln(V) - \ln(H))}{\sigma^2}\right) \cdot N\left(\frac{\ln(V) - \ln(F) + 2 \cdot \ln(H) + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \text{ si } F > H \end{aligned}$$

où V , F , H , τ , Φ , μ et σ représentent respectivement la valeur marchande des actifs de la firme, le paiement obligataire promis à l'échéance de la dette, la valeur des actifs qui déclenche la faillite de la firme (ceci est la « barrière »), le temps restant jusqu'à l'expiration de l'option, la distribution normale cumulative, le rendement espéré de la valeur de l'actif et l'écart type de la valeur de l'actif.

Les tableaux suivants présentent les statistiques descriptives des probabilités de défaut physiques pour toutes les entreprises étudiées ainsi que le résultat des modèles hybrides résultants. En somme, l'on remarque que les probabilités de défaut obtenues sont beaucoup plus élevées que celles obtenues avec l'équation risque neutre et les modèles hybrides sont moins performants que ceux utilisant les probabilités de défaut risque neutres.

Statistiques descriptives des probabilités de défaut physiques obtenues par la méthode de maximum de vraisemblance.

	PD physiques	
	D	ND
Moyenne	0,5943	0,2300
Mediane	0,7982	0,0118
Mode	1,0000	1,0000
Ecart-type	0,4077	0,3444
Erreur moy std	0,0346	0,0056
Asymétrie	-0,4902	1,2773
Kurtose	-1,5093	0,0601
Min	0,0000	0,0000
Max	1,0000	1,0000

Modèles hybrides (barrières endogènes) utilisant les probabilités de défaut physiques

Paramètre	Probabilités de défaut physiques		
	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3
Constante	-8,2095 <,0001	-3,4903 <,0001	-2,7628 <,0001
Moyenne annuelle PD 1 an	0,9093 0,0165	0,8384 0,0060	0,7082 0,0183
Encaisse			0,0080 0,1207
Actif à court terme			-0,0100 0,0117
Passif à court terme			0,0031 0,1896
Bénéfice non réparti			-0,0090 0,0012
Valeur nette			-0,0128 0,0006
Passif total			-0,0075 0,0019
Actif total			0,0081 0,0006
Profitabilité < 0		1,5314 <,0001	1,1960 <,0001
0% < Profitabilité < 6%		0,3396 0,3220	0,3457 0,3175
Valeur nette/passif total		-0,7465 <,0001	-0,5669 0,0008
Bénéfice non réparti/passif total		-0,1200 0,0003	-0,0780 0,0097
ρ	0,9700 0,0146	0,5788 0,0699	0,4766 0,1252
-2 Log Likelihood	393,5	324,2	278,0
AIC	399,5	338,2	306,0
AUC	0,783	0,935	0,952