HEC MONTRÉAL

École affiliée à l'Université de Montréal

Tarification des actifs financiers et consommation : évaluation du risque de composition de la consommation

par
Jean-Charles Bouvrette

Thèse de présentée en vue de l'obtention du grade de Ph. D en administration
(option Finance)

Novembre 2013

© Jean-Charles Bouvrette, 2013

HEC MONTRÉAL

École affiliée à l'Université de Montréal

Cette thèse intitulée :

Tarification des actifs financiers et consommation : évaluation du risque de composition de la consommation

Présentée par :

Jean-Charles Bouvrette

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Pascale Valéry
HEC Montréal
Présidente-rapporteuse

Georges Dionne
HEC Montréal
Directeur de recherche

Martin Boyer
HEC Montréal
Codirecteur de recherche

Jean-Guy Simonato
HEC Montréal
Membre du jury

Stephen Gordon
Université Laval
Examinateur externe

Nhut Van The
HEC Montréal
Représentant du directeur de HEC Montréal

Résumé

Le premier chapitre de cette thèse présente le cadre d'analyse classique des modèles de tarification des actifs financiers et certaines énigmes qui y sont associées. Depuis le *Consumption asset pricing model* (CCAPM) de Lucas (1978) et Breeden (1979), le risque de consommation est directement relié à la prime de risque des actifs. Malgré son élégance, le CCAPM ne parvient pas à expliquer le niveau de la prime de risque historique du marché pour une aversion au risque raisonnable tel que souligné par Merha et Prescott (1985). De plus, Weil (1989) démontre que les modèles classiques posent également un problème pour expliquer le taux sans risque et présente une fonction d'utilité, parallèlement à Epstein et Zin (1989), basée sur le cadre de préférences de Kreps et Porteus (1978) où les préférences pour le risque sont séparées des préférences temporelles. L'utilité Epstein-Zin-Weil (ci-après EZW) ne contraint pas le coefficient d'aversion relative au risque à être l'inverse de l'élasticité de substitution intertemporelle. Malgré cette flexibilité, l'utilité EZW ne parvient pas dans le cadre d'analyse classique à résoudre l'énigme de la prime de risque.

Au chapitre 2, nous présentons une revue de modèles de tarification reposant sur une définition élargie de la consommation pour résoudre les énigmes, dont ceux de Yogo (2006), Piazzesi et *al.* (2007) où les biens non durables et les biens d'habitation sont respectivement considérés en plus des biens non durables. Malgré des avancées notables, ces modèles ne parviennent pas à résoudre les énigmes de tarification. Ils mettent cependant en lumière l'importance potentielle pour les modèles de tarification du risque de la composition de la consommation. Ainsi, la substitution ou la complémentarité des biens d'habitation ou des biens durables avec les biens non durables génère un risque de consommation supplémentaire. Aucune étude n'a cependant procédée à une analyse intégrée de la pertinence des différents types de risque de consommation. De plus, aucun modèle de tarification ne considère les trois types de biens simultanément et les risques de composition de la consommation qui en résultent.

Le chapitre 3 présente la première contribution de notre thèse où nous établissons la forme générale des facteurs d'actualisation stochastique issus de modèles avec plusieurs biens de consommation pour leur formulation non linéaire et linéaire. Nous présentons alors une nouvelle classe de modèles générales avec agent représentatif où les biens durables et d'habitation sont considérés en plus des biens non durables dans le cadre d'une fonction d'utilité. Nous considérons en particulier dans cette classe de modèles une spécification où un service domestique est produit à partir de la structure de consommation des biens durables et d'habitation. Ce service domestique fait intervenir différents risques de consommation à court et long terme associés à la composition de la consommation dans le cadre d'utilité EZW. Les modèles avec consommation structurée généralisent plusieurs modèles existants et permettent une analyse des différents types de risque de consommation ainsi qu'une interprétation économique du risque de long terme de la consommation des modèles de tarification développé par Bansal et Yaron (2004) et étendus par Hansen et *al.* (2008).

Le chapitre 4 présente la seconde contribution de notre thèse où l'estimation de plusieurs modèles fondés sur la consommation est effectuée par la méthode des moments généralisée de Hansen (1982) (ci-après GMM). Nous procédons notamment à l'estimation du modèle développé avec biens durables et d'habitation ainsi que pour les modèles de Piazzesi et *al*. (2007) et Fillat (2008) pour lesquels aucune estimation exhaustive des paramètres n'avait été effectuée. Nous présentons également une estimation des paramètres associés à la fonction d'utilité intratemporelle et la fonction de production domestique des modèles à partir de l'approche fondée sur les relations de cointégration théoriques entre les biens de consommation d'Ogaki et Park (1998). Les paramètres de ces fonctions sont difficilement identifiables dans le cadre de l'estimation générale des modèles par GMM. Nous obtenons ainsi une représentation explicite des termes des facteurs d'actualisation stochastique associés au risque de composition de la consommation pour les différents modèles que nous employons ensuite lors de l'estimation générale des modèles par GMM. L'estimation des modèles est conduite à partir de différentes spécifications de l'estimateur GMM et la distance de Hansen et Jagannathan (1997) de 1960 à 2010 et de 1960 à 2007 afin d'évaluer l'impact de la crise financière sur les résultats.

Le chapitre 5 présente la troisième contribution de notre thèse où, au-delà de la performance des modèles pour expliquer le rendement des actifs financiers, nous établissons une procédure de tests pour l'analyse de la pertinence des différents types de risques de consommation. La procédure repose sur la comparaison entre les modèles à partir du *D-test* de Newey et West (1987b), des tests de Wald sur les restrictions paramétriques ainsi qu'un test sur la différence des distances de Hansen et Jagannathan (1997) de Gospodinov et *al.* (2013). L'estimation des modèles et la procédure de test sur les différents types de risque de consommation permet d'évaluer l'adéquation des modèles pour expliquer les rendements des actifs, mais également les risques de consommation les plus importants et s'ils présentent une dimension de long terme.

Nos résultats démontrent globalement que les modèles de tarification fondés sur la consommation incorporant différents types de biens de consommation ne permettent pas d'améliorer significativement la performance des modèles classiques. Les différentes formulations du risque de composition de la consommation, dont celle générale impliquant les biens durables et d'habitation, contribuent peu à la performance des modèles qui exhibent généralement les symptômes des énigmes de tarification à travers un coefficient d'aversion au risque élevé ainsi qu'un facteur d'actualisation subjectif supérieur à un. Nous trouvons finalement peu d'évidence pour une dimension de long terme dans les risques de consommation.

Mots clés : Modèles de tarification des actifs financiers, énigmes de tarification, biens durables et d'habitation, risque de consommation, risque de composition, consommation structurée, GMM, utilité Epstein-Zin-Weil, risque de long-terme, facteur d'actualisation stochastique.

Abstract

The first chapter of this thesis presents the classical framework of consumption asset pricing models and some related puzzles. Since the Consumption capital asset pricing model (CCAPM) of Lucas (1978) and Breeden (1979), the risk of consumption has directly been related to the risk premium of assets. Despite its elegance, the CCAPM fails to explain the level of the historical risk premium of the market for a reasonable risk aversion as utlined by Merha and Prescott (1985). In addition, Weil (1989) shows that conventional models also pose a problem to explain the risk free rate. He also developed a utility function similar to the one of Epstein and Zin (1989), based on the framework of Kreps and Porteus preferences (1978) where risk preferences are separated from temporal preferences. The Epstein-Zin-Weil utility (hereafter EZW) does not constrain the coefficient of relative risk aversion to be the inverse of the intertemporal elasticity of substitution. Despite this flexibility, the EZW utility fails, in the classical analysis framework, to solve the risk premium puzzle.

Chapter 2 of our thesis presents a review of pricing models based on a broader class of consumption risk to solve the puzzles, including those of Yogo (2006), Piazzesi *et al* (2007) where non-durable goods and residential property are respectively considered in addition to non-durables. Despite significant progress, these models fail to solve the pricing puzzles. They do, however, highlight the potential importance for asset pricing models of the composition of consumption. Thus, substitution or complementarity of different goods in an asset pricing model generates additional risks of consumption. No studies, however, currently proceed to an integrated analysis of the relevance of the different types of consumption risks. In addition, no pricing model is currently considering the three types of goods simultaneously and the associated consumption composition risk.

Chapter 3 presents the first contribution of our thesis where we establish the general form of the stochastic discount factors for models with multiple consumption goods. Then we introduce a new class of general models with representative agent where durable goods and housing are considered along with non-durable goods in the context of a EZW utility function. In this particular class of models specification, we consider a model where a domestic service is produced from the structure of consumption of durable goods and housing. The domestic service involves various risks of consumption in the short and long term associated with the composition of consumption in utility EZW. Models with structured consumption generalize several existing models and allow an analysis of different types of consumer risk and an economic interpretation of the long-term risk consumption pricing models developed by Bansal and Yaron (2004) and extended by Hansen et al. (2008).

In chapter 4 we present the second contribution of our thesis where we estimate several models based on consumption by the Generalized Method of Moments of Hansen (1982) (hereafter GMM). We proceed to estimate different specifications of the model developed with durable goods and housing as well as the models of Piazzesi et al. (2007) and Fillat

(2008) for which no full estimate of the parameters had been performed. We also present an estimate of the parameters associated with the intratemporal utility function and the domestic production function of the models from the approach of Ogaki and Park (1998) based on the theoretical cointegration relations between consumption goods. The parameters of these functions are difficult to identify in the context of the general model estimation by GMM. We obtain an explicit representation of the terms associated with the composition risk in the stochastic discount factors and proceed afterward to the general model estimation by GMM. The model estimation is conducted by using different specifications of the GMM estimator and the Hansen and Jagannathan (1997) distance from 1960 to 2010 and from 1960 to 2007 in order to assess the impact of the financial crisis on the results.

Chapter 5 presents the third main contribution of our thesis where, beyond the estimation of the models to explain the performance of financial assets, we elaborate a testing procedure for the analysis of the relevance of the different types of consumption risk. The procedure is based on different models tests such as the *D-test* of Newey and West (1987), Wald tests on parametric restrictions and a test on the difference of the distances of Hansen and Jagannathan (1997) developed by Gospodinov et al. (2013). The model estimation and testing procedure on the different types of consumption risk assesse the adequacy of the models to explain asset returns, but also, the most relevant consumption risk and if they present a long-term risk dimension.

Overall, our results show that pricing models based on consumption incorporating different types of consumer goods do not add much in improving the performance of conventional models. Different formulations of the consumption composition risk, including the general one involving durable goods and housing, contribute little to the performance of models usually exhibiting asset pricing puzzles symptoms through a coefficient of risk aversion and a subjective discount factor greater than one. Finally, we did not found significant evidence of a long-term dimension in the different forms of consumption risks.

Keywords : Asset pricing models, asset pricing puzzles, durable goods, housing, consumption risk, composition risk, structured consumption, GMM, Epstein-Zin-Weil utility, long-term risk, stochastic discount factor.

Table des matières

Résumé ..... *v*

Abstract ..... *vii*

Table des matières ..... *ix*

Liste des figures ..... *xi*

Liste des tableaux ..... *xii*

Abréviations ..... *xiv*

Remerciements ..... *xv*

Introduction *1*

1. Modèles classiques et énigmes de tarification *5*

1.1. Cadre d'analyse des modèles de tarification avec consommation 5

1.2. Énigmes de tarification 7

1.2.1. L'énigme de la prime de risque 7

1.2.2. L'énigme du taux sans risque 11

1.2.3. Utilité d'Epstein-Zin-Weil (EZW) 12

1.2.4. Le risque de long terme 15

2. Modèles de tarification et consommation *16*

2.1. Modèles avec consommation des biens durables 16

2.2. Modèle avec consommation des biens d'habitation 20

3. Généralisation des modèles de tarification avec consommation *23*

3.1. Fondement de la généralisation 23

3.1.1. L'intuition économique 23

3.1.2. Spécifications du modèle 24

3.2. Dérivation du modèle avec consommation structurée 27

3.2.1. Utilité et environnement économique du modèle 27

3.2.2. Problème de l'agent 28

3.2.3. Équations d'Euler 29

3.3. Dérivation générale du facteur d'actualisation stochastique 31

3.3.1. Représentation non linéaire 31

3.3.2. Représentation linéaire du facteur d'actualisation stochastique et modèles factoriels 33

4. Estimation du modèle de tarification avec consommation structurée *35*

4.1. Rendements des actifs 35

4.2. Données de consommation 37

4.3. Estimation des modèles de tarification par la méthode des moments généralisée (GMM) 43

4.3.1. La méthode des moments généralisée 43

4.3.2. *J-test* et *D-test* 44

4.3.3. Le choix de la matrice de pondération initiale et la matrice efficiente 45
4.3.4. Distance de Hansen et Jagannathan 46
4.3.5. Tests statistiques sur la distance de Hansen et Jagannathan 47

4.4. Estimation inconditionnelle des modèles linéaires factoriels 48

4.5. Relation de cointégration entre les données de consommation 52
4.5.1. Relation de cointégration pour les modèles avec biens d'habitation ou durables 52
4.5.2. Relation de cointégration pour les modèles avec consommation structurée 61
4.5.3. Sommaire des résultats de l'analyse par cointégration des paramètres de préférence 67

4.6. Estimation inconditionnelle des modèles non linéaires 71
4.6.1. Estimation inconditionnelle avec les portefeuilles de Fama-French et le taux sans risque . 71
4.6.2. Estimation inconditionnelle de la distance de Hansen-Jagannathan avec les portefeuilles Fama-French et le taux sans risque 76

4.7. Estimation inconditionnelle des modèles non linéaires reposant sur les relations de cointégration. 79

5. Procédure de test pour les modèles de tarification fondés sur la consommation 83

5.1. Risque de consommation sur la période 1960-2007 précédant la crise financière 87

5.2. Procédure de test et évaluation conditionnelle des modèles de tarification fondés sur la consommation 89

5.3. Sommaire des résultats des procédures de test 92

6. Conclusion 97

Bibliographie 101

Annexe A : Dérivation du modèle avec consommation structurée 106

Annexe B : Dérivation générale des facteurs d'actualisation stochastique avec plusieurs biens de consommation 109

Annexe C : Description des données de consommation 111

Annexe D : Tests statistique de Gospodinov et al. (2013) sur les modèles emboîtés 113

Annexe E : Représentation des modèles en facteurs 114

Annexe F : Statistiques descriptives des termes de composition de la consommation des facteurs d'actualisation stochastique 116

Annexe G : Procédure de test pour l'estimation des modèles sur la période 1960-2007 précédent la crise financière 118

Liste des figures

Figure 1 : Rendements d'actifs *36*
Figure 2 : Séries d'inflation pour différents indices de prix *37*
Figure 3 : Taux de croissance réel des types de consommation *40*
Figure 4 : Taux de croissance des Services d'habitation et et de la proportion des biens non durables *40*
Figure 5 : Prix et évolution relative des biens durables et d'habitation par rapport aux biens non durables *41*
Figure 6 : Prix et évolutions des stocks des biens durables et d'habitation par rapport aux biens non durables *42*
Figure 7 : Prix et évolution relative des stocks des biens durables et d'habitation *42*
Figure 8 : Biens d'habitation, biens durables et leurs prix *54*
Figure 9 : Biens et services d'habitation *57*
Figure 10 : Prix des biens et services d'habitation *57*
Figure 11 : Prix des services et des biens d'habitation *59*
Figure 12 : Biens durables, biens d'habitation et leurs prix *62*
Figure 13 : Relation de cointégration entre les biens non durables, durables et d'habitation *64*
Figure 14 : Biens non durables et consommation structurée *65*
Figure 15 : Terme de composition de la consommation des facteurs d'actualisation stochastique *68*
Figure 16 : Terme de composition de la consommation des facteurs d'actualisation pour un ESI de 0.01 et 1.5 et un coefficient d'aversion au risque de 105 ..... *70*
Figure 17 : Terme de composition de la consommation des facteurs d'actualisation pour un ESI de 0.01 et 1.5 et un coefficient d'aversion au risque de 10 ..... *70*
Figure 18 : Noyau de tarification Piazzesi et al. (2007) et Fillat (2008) *94*
Figure 19 : Noyau de tarification Yogo (2006) et stock d'habitation *95*
Figure 20 : Noyau de tarification Consommation structurée SCAPM et SCAPM7 ..... *96*

Liste des tableaux

Tableau 1 : Modèle et restrictions paramétriques 26
Tableau 2 : Statistiques descriptives des biens de consommation et des rendements 39
Tableau 3 : Estimation inconditionnelle des modèles factoriels 50
Tableau 4 : Test de stationnarité des séries pour le modèle avec biens durables 54
Tableau 5 : Test de stationnarité des séries pour le modèle avec biens durables 55
Tableau 6 : Test Dickey-Fuller augmenté sur les résidus des relations de cointégration pour le modèle avec bien d'habitation et le modèle avec biens durables 56
Tableau 7 : Estimation de l'élasticité intratemporelle (ESA) pour le modèle avec bien d'habitation et le modèle avec bien durable 56
Tableau 8 : Test de stationnarité Dickey-Fuller augmenté sur les prix des biens et services d'habitation 58
Tableau 9 : Test Dickey-Fuller augmenté sur la relation de cointégration entre les prix des biens et des services d'habitation 58
Tableau 10 : Test de stationnarité Dickey-Fuller augmenté sur la différence des biens non durables et le service d'habitation et le prix des services d'habitation 59
Tableau 11 : Test de cointégration sur la différence entre les biens non durables et le service d'habitation et leur prix 60
Tableau 12 : Test de stationnarité Dickey-Fuller augmenté sur la différence entre les biens durables et les biens d'habitations et la différence de leurs prix 62
Tableau 13: Test de cointégration sur la différence entre le bien durable et le bien d'habitation et la différence de leurs prix 63
Tableau 14 : Test de cointégration sur les biens non durables et d'habitation 64
Tableau 15: Estimation de l'élasticité intratemporelle (ESA) et du facteur de proportionnalité pour le modèle avec consommation structurée contraint 64
Tableau 16 : Test de stationnarité Dickey-Fuller augmenté sur la différence des biens non durables et la consommation structurée 66
Tableau 17 : Test de cointégration sur les biens non durables et la consommation structurée 66
Tableau 18 : Sommaire des résultats de l'analyse par cointégration pour les paramètres de la fonction d'utilité intratemporelle et la fonction de production domestique 67
Tableau 19 : Estimation inconditionnelle par GMM en une et deux étapes, 6 portefeuilles Fama-French 1960-2010 73
Tableau 20 : Estimation inconditionnelle par GMM une et deux étapes, 25 portefeuilles Fama-French 1960-2010 75
Tableau 21 : Estimation inconditionnelle GMM distance Hansen-Jagannathan et deux étapes, 6 portefeuilles Fama-French 1960-2010 76
Tableau 22 : Estimation inconditionnelle GMM distance Hansen-Jagannathan et deux étapes, 25 portefeuilles Fama-French 1960-2010 78
Tableau 23 : Estimation inconditionnelle GMM distance Hansen-Jagannathan et deux étapes, 25 portefeuilles Fama-French 1960-2010 avec les paramètres de cointégration 80

Tableau 24 : Estimation inconditionnelle GMM pour la distance de Hansen-Jagannathan, 25 portefeuilles Fama-French 1960-2010 et les paramètres de cointégration pour les spécifications avec utilité EZW et puissance des modèles 84
Tableau 25 : Test de différence sur les modèles emboîtés (D-Test) 85
Tableau 26 : Test de Wald sur les modèles emboîtés 85
Tableau 27 : Test sur la différence des distances de Hansen-Jagannathan des modèles emboîtés 86
Tableau 28 : Estimation inconditionnelle GMM pour la distance de Hansen-Jagannathan, 25 portefeuilles Fama-French 1960-2007 précédant la crise financière et les paramètres de cointégration pour les spécifications avec utilité EZW et puissance des modèles 88
Tableau 29 : Estimation conditionnelle GMM pour la distance de Hansen-Jagannathan, 25 portefeuilles Fama-French 1960-2010 et les paramètres de cointégration pour les spécifications avec utilité EZW et puissance des modèles 90
Tableau 30 : Test de différence sur les modèles emboîtés (D-Test) pour l'estimation conditionnelle 91
Tableau 31 : Test de Wald sur les modèles emboîtés pour l'estimation conditionnelle ... 91
Tableau 32 : Test sur la différence des distances de Hansen-Jagannathan des modèles emboîtés pour l'estimation conditionnelle 92
Tableau 33 : Structure des facteurs d'actualisation stochastique fondés sur la consommation pour le modèle de Piazzesi et al. (2007) et de Fillat (2008) 93
Tableau 34 : Structure des facteurs d'actualisation stochastique fondés sur la consommation pour le modèle de Yogo (2006) et pour le modèle avec stock d'habitation 95
Tableau 35 : Structure des facteurs d'actualisation stochastique fondés sur la consommation pour le SCAPM et pour le SCAPM7 96
Tableau 36 : séries de consommation 111
Tableau 37 : Statistiques descriptives pour les termes de composition de la consommation des facteurs d'actualisation pour un ESI de 0.01 et un coefficient d'aversion au risque de 105 116
Tableau 38 : Statistiques descriptives pour les termes de composition de la consommation des facteurs d'actualisation pour un ESI de 1.5 et un coefficient d'aversion au risque de 105 116
Tableau 39 : Statistiques descriptives pour les termes de composition de la consommation des facteurs d'actualisation pour un ESI de 0,01 et un coefficient d'aversion au risque de 10 117
Tableau 40 : Statistiques descriptives pour les termes de composition de la consommation des facteurs d'actualisation pour un ESI de 1.5 et un coefficient d'aversion au risque de 10 117
Tableau 41 : Test de Wald sur les modèles emboîtés Test de différence sur les modèles emboîtés (D-Test) pour la période 1960-2007 118
Tableau 42 : Test de Wald sur les modèles emboîtés pour la période 1960-2007 118
Tableau 43 : Test sur la différence des distances de Hansen-Jagannathan des modèles emboîtés pour la période 1960-2007 118

Abréviations

BEA : *U.S. Department of Commerce* et du *Bureau of Economic Analysis*
CAPM : *Capital asset pricing model*
CCAPM : *Consumption Capital asset pricing model*
CD : Fonction d'utilité et de production Cobb-Douglas
CES : Fonction d'utilité avec élasticité de substitution constante
CRSP : *Center of Research in Security Prices*
DCAPM : *Durable Capital asset pricing model*
D-test : Test de différence sur les statistique *J*
DHJ : Distance de Hansen-Jagannathan (ci-après)
ESA : Élasticité de substitution intratemporelle
ESI : Élasticité de substitution intertemporelle
EZW : Fonction d'utilité Epstein-Zin-Weil
GMM : Méthode des moments généralisés
HCAPM : *Housing Capital asset pricing model*
ICAAP : Intertemporal capital asset pricing model
IPC : Indice des prix à la consommation
J-stat : Statistique *du J-Test*
J-test : Test de sur-identification
NBER : *National Bureau of Economic Research*
NIPA : Tables des comptes nationaux Américains
MAE : Valeur absolue des erreurs (SCAPM)
SCAPM7 : Modèle de tarification avec consommation structurée non contraint
SCAPM : Modèle de tarification avec consommation structurée contraint

Remerciements

Je tiens à remercier ma famille pour leur support et leurs encouragements.

Je tiens également à remercier mes codirecteurs, Georges Dionne et Martin Boyer pour leur support, leur engagement et leur patience.

Introduction

Le processus de prise de décisions de consommation et d'investissement des individus au cours de leur vie est un sujet d'étude central pour l'économie et la finance. En comprenant comment les gens posent leur choix de consommation et d'épargne et la façon dont l'épargne est allouée à travers les différentes classes d'actifs dans le temps, il est possible de construire des stratégies de portefeuilles répondant mieux à leurs besoins. De plus, la compréhension de la dynamique intertemporelle de la consommation et des investissements mène, à l'équilibre, à la compréhension des prix des actifs financiers.

Markowitz (1952) a élaboré l'analyse quantitative de sélection de portefeuilles fondée sur la moyenne et la variance des actifs dans un cadre statique. Si l'on considère un certain type de fonction d'utilité pour les investisseurs ou encore une distribution normale pour le prix des actifsque les prix, le cadre d'analyse moyenne-variance est justifié et mène à l'équilibre au *Capital asset pricing model* (CAPM) de Sharp (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966). Samuelson (1969) et Merton (1969, 1971) étendent l'analyse du choix de portefeuilles à un cadre dynamique. Lorsque le marché est complet, les investisseurs peuvent assurer leur revenu d'emploi et leur portefeuille demeure inchangé au cours de leur vie. Dans ce cadre d'analyse, le *Intertemporal capital asset pricing model* (ICAAP) émerge comme modèle de tarification tel que démontré par Merton (1973). Les travaux de Lucas (1978) et Breeden (1979) ont par la suite mené au *Consumption capital asset pricing model* (CCAPM), selon lequel l'ensemble des facteurs de risque se réduit au risque de consommation.

Malgré leur élégance, ces modèles de tarification classiques ne parviennent pas à expliquer le niveau de la prime de risque historique du marché tel que souligné par Merha et Prescott (1985). Weil (1989) démontre que les modèles classiques posent également un problème quant à l'explication du taux sans risque et présente une fonction d'utilité basée sur le cadre de préférences de Kreps et Porteus (1978) où le coefficient d'aversion relative au risque n'est plus l'inverse du coefficient d'élasticité de substitution intertemporelle. Cette distinction par rapport à la fonction d'utilité puissance du cadre de préférences de von Neumann et Morgenstern permet de séparer les préférences pour le risque des préférences temporelles. Epstein et Zin (1989) élaborent de façon indépendante une fonction d'utilité similaire.

Certains éléments cruciaux semblent donc échapper à notre compréhension du comportement des investisseurs ou encore de l'environnement dans lequel ils prennent leurs décisions de consommation, d'épargne et d'investissement. L'énigme de la prime de risque trouve naturellement écho dans la littérature sur les choix intertemporels de portefeuilles. Puisque la prime de risque historique sur les actions est élevée, les investisseurs devraient investir considérablement dans les actions au cours de leur vie. Les études empiriques tendent à démontrer un faible taux de participation des ménages sur les marchés ainsi qu'une faible allocation dans les actions, et pour les jeunes ménages en particulier.

Depuis ces études fondatrices, la littérature sur la tarification des actifs financiers et le choix de portefeuilles s'est concentrée sur la façon dont les investisseurs considèrent le risque en explorant différentes théories et fonctions d'utilité, le relâchement des hypothèses sur l'environnement économique telles l'absence de friction, la complétude des marchés ou leur prédictibilité et plus récemment, en délaissant l'hypothèse d'information complète pour y introduire de l'incertitude.

Au cours des dernières années, les modèles de tarification cherchant à bonifier le risque de consommation ont connu une recrudescence. Différents types de consommation ont été utilisés pour caractériser un risque de consommation permettant de justifier la prime de risque historique sur les actions. Yogo (2006) présente un modèle de tarification selon lequel la consommation des biens durables est considérée en plus de la consommation des biens non durables dans une fonction d'utilité d'Epstein-Zin-Weil (ci-après EZW). En séparant la préférence temporelle de la préférence pour le risque, il parvient à résoudre l'énigme du taux sans risque. Cependant, bien que le modèle explique adéquatement le comportement du rendement des actions, il ne parvient pas à résoudre l'énigme de la prime de risque. Piazzesi *et al.* (2007) analysent pour leur part un modèle de tarification où la consommation des biens d'habitation est considérée en plus de la consommation des biens non durables avec une fonction d'utilité puissance. Leur modèle permet de générer une prime de risque cohérente avec les données historiques, mais au coût d'un taux sans risque élevé et volatil pour la période d'après-guerre. Comme le soulignent Piazzesi *et al.* (2007), l'utilisation de plus d'un type de consommation met en relief un canal de risque supplémentaire associé à la composition de la consommation.

La pertinence des biens durables et d'habitation pour comprendre les rendements des actions s'explique en partie par leur caractère procyclique; c'est-à-dire leur tendance à fluctuer fortement avec les cycles économiques. De plus, puisque ces biens sont non séparables dans le temps, leur persistance, ou plutôt leur horizon de consommation, est susceptible de présenter un canal de risque important pour les investisseurs. La distinction entre le risque de consommation de court terme et de long terme a été exploitée par Bansal et Yaron (2004) et Hansen *et al.* (2008) à partir d'un modèle reposant sur une utilité EZW et la consommation des biens non durables. Fillat (2008) présente un modèle où l'intégration des biens d'habitation augmente le risque de consommation de long terme. La prise en compte du risque de consommation de long terme permettrait ainsi d'augmenter la performance des modèles de tarification. Bien que certaines dimensions du modèle demeurent controversées, leur analyse temporelle du risque de consommation marque un pas important dans l'analyse du risque des modèles de tarification reposant sur la consommation. Cette caractérisation temporelle du risque de consommation est cependant inhérente à la fonction d'utilité EWS et varie selon le type de consommation considéré dans le modèle.

L'ajout des biens durables ou des biens d'habitation dans la modélisation du problème de consommation, d'épargne et d'investissement des individus a permis des améliorations notables par rapport aux modèles précédents dans le cadre classique avec marché complet et agents rationnels. De plus, l'utilisation d'une fonction EZW semble également donner de meilleurs résultats, puisqu'elle permet de séparer les types de préférence et de

considérer le risque de long terme. Ces résultats nous permettent de mieux cerner la complexité du risque de consommation auquel les individus sont exposés. En fait, il est probablement plus juste de parler *des* risques de consommation auxquels les individus sont exposés. En effet, en utilisant plusieurs types de consommation, le risque de composition de la consommation s'ajoute au risque usuel de la croissance de la consommation. De plus, selon les caractéristiques des biens de consommation et la fonction d'utilité considérées, une dimension temporelle au risque de consommation émerge. L'ensemble de ces aspects du risque global de consommation devrait idéalement être considéré dans un modèle de tarification. Malgré ces avancées, à notre connaissance, aucune étude n'a cependant procédée à une analyse intégrée de la pertinence des différents types de risque de consommation. De plus, aucun modèle de tarification ne considère les trois types de biens simultanément ainsi que les risques de composition de la consommation qui en résultent.

La consommation des individus est un phénomène complexe où les différents biens de consommation jouent des rôles spécifiques et interdépendants. Pour bien comprendre le risque global de consommation des individus, il est important de comprendre comment la consommation est structurée dans le temps, à court, moyen et long terme. À partir d'une meilleure compréhension du risque que comporte la structure de consommation des individus, il est alors possible d'envisager une meilleure compréhension des décisions d'investissement des individus et de la valeur des actifs financiers.

Afin de réaliser cet objectif, la première contribution importante de notre thèse est le développement d'un cadre d'analyse général des facteurs d'actualisation stochastique issus de modèles avec plusieurs biens de consommation, tant pour leur formulation linéaire que non linéaire. Nous présentons alors une nouvelle classe de modèles générale avec agent représentatif où les biens durables et d'habitation sont considérés en plus des biens non durables dans le cadre d'une fonction d'utilité. Nous considérons en particulier dans cette classe de modèles une spécification où un service domestique est produit à partir de la structure de consommation des biens durables et d'habitation. Ce service domestique fait intervenir différents risques de consommation à court et long terme associés à la composition de la consommation dans le cadre d'utilité EZW. Nous proposons ainsi dans notre thèse une analyse intégrée de la pertinence des différents risques de consommation dans les modèles de tarification à partir notamment du développement de modèles où la structure de consommation dans le temps fait intervenir dans une fonction d'utilité EZW, à la fois les biens non durables, les biens durables et les biens d'habitation.

La seconde contribution principale de notre thèse est l'estimation exhaustive de plusieurs modèles fondés sur la consommation à partir entre autre de la méthode des moments généralisée de Hansen (1982) (ci-après GMM). Nous procédons notamment à l'estimation du modèle développé avec biens durables et d'habitation ainsi que pour les modèles de Piazzesi et *al*. (2007) et Fillat (2008) pour lesquels aucune estimation complète des paramètres n'avait été effectuée. Nous présentons également une estimation des paramètres associés à la fonction d'utilité intratemporelle et la fonction de production domestique des modèles à partir de l'approche fondée sur les relations de cointégration théoriques entre les biens de consommation d'Ogaki et Park (1998). Les

paramètres de ces fonctions sont difficilement identifiables dans le cadre de l'estimation générale des modèles par GMM. Nous obtenons ainsi une représentation explicite des termes des facteurs d'actualisation stochastique associés au risque de composition de la consommation pour les différents modèles que nous employons ensuite lors de l'estimation générale des modèles par GMM. L'estimation des modèles est conduite à partir de l'estimateur GMM et la distance de Hansen et Jagannathan (1997) de 1960 à 2010 et de 1960 à 2007 afin d'évaluer l'impact de la crise financière sur les résultats.

La troisième contribution importante de notre thèse est l'établissement d'une procédure de tests pour l'analyse de la pertinence des différents types de risques de consommation. La procédure repose sur la comparaison entre les modèles à partir du *D-test* de Newey et West (1987b), des tests de Wald sur les restrictions paramétriques ainsi qu'un test sur la différence des distances de Hansen et Jagannathan (1997) de Gospodinov et *al.* (2013). L'estimation des modèles et la procédure de test sur les différents types de risque de consommation permettent d'évaluer l'adéquation des modèles pour expliquer les rendements des actifs, mais également les risques de consommation les plus importants, et de déterminer s'ils présentent une dimension de long terme. Par ailleurs, l'utilisation de rendements très corrélés pour estimer des modèles de tarification crée fréquemment des problèmes de singularité dans la matrice de poids de l'estimateur GMM et dans son utilisation pour les tests statistiques. Nous portons ainsi une attention particulière à ces problèmes lors de l'estimation par GMM.

Le reste de la thèse est divisé de la façon suivante : le chapitre 1 présente le cadre d'analyse des modèles de tarification classiques et différentes énigmes de tarification qui y sont associées. Le chapitre 2 présente une revue de modèles basés sur la consommation. Le chapitre 3 développe la classe de modèles qui généralise les modèles précédents et expose les fondements du modèle avec consommation structurée. Une analyse détaillée des facteurs d'actualisation stochastique qui caractérisent les différents modèles considérés est également présentée. Le chapitre 4 présente les données financières et de consommation et procède à l'estimation des modèles dont les modèles à consommation restreinte par GMM. Le chapitre 5 présente la procédure de test des différents risques de consommation et les résultats des différents tests statistiques. Finalement, le chapitre 6 conclut et présente différentes pistes de recherches futures, notamment au niveau de l'utilisation des modèles général avec consommation pour le choix intertemporel de portefeuilles.

1. Modèles classiques et énigmes de tarification

1.1. Cadre d'analyse des modèles de tarification avec consommation

Depuis la représentation intertemporelle des choix de consommation développée par Irving Fisher, plusieurs modèles sont venus enrichir notre compréhension du cycle de la consommation des individus. Les théories du cycle de vie de Modigliani et du revenu permanent de Friedman nous ont permis de mieux comprendre pourquoi les individus tendent à lisser leur consommation dans le temps à travers l'épargne et l'investissement ainsi que les causes de la variation de la consommation.

À partir des travaux de Modigliani et Friedman, Hall (1978) conclut que lorsque les individus fondent leurs choix optimaux de consommation de façon rationnelle, la variation de leur consommation doit être reliée aux chocs aléatoires sur leur richesse, ce qui implique que leur consommation suit une marche aléatoire. Par conséquent, aucune variable autre que la consommation de la période courante ne devrait permettre de prévoir la consommation future. Le modèle est vérifié de façon générale pour les retards d'ordre supérieur à un pour la consommation des services et des biens non durables. Par ailleurs, en testant l'effet du retard de la richesse sur la consommation, Hall (1978) utilise comme approximation de la richesse un indice boursier et note que les premiers retards semblent permettre de prévoir la consommation future. Ce dernier résultat reliant la consommation et le marché boursier est précurseur du CCAPM développé par Lucas (1978) et Breeden (1979).

Dans une économie de marché caractérisée par un agent représentatif rationnel, un bien de consommation jouant le rôle de numéraire et N actifs financiers, l'agent maximise son bien-être à partir de la fonction objective (1) en déterminant sa consommation c_t et le choix de détention $B_{t,t+1}$ des N actifs de l'économie où β représente son facteur d'actualisation subjectif. Cette maximisation est sujette à la contrainte budgétaire intertemporelle (2) qui stipule que la consommation à chacune des périodes et les choix de détention B_t pour la période dans les actifs au prix P_t de la période courante ne doivent pas excéder la valeur du portefeuille incluant le dividende D_t :

(1) $$MAX_{\{c_t, B_{i,t+1}\}} \quad E_0[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)] \quad , \ \forall \ i = 1,...,N \quad , \quad \forall \ t = 0,...,\infty$$

(2) $$t.q. \quad c_t + P_t^{'} B_{t,t+1} \leq \left(P_t + D_t\right)^{'} B_t \quad , \forall \quad t = 0,...,\infty$$

Ce problème de maximisation implique les conditions de premier ordre nécessaires et suffisantes à une solution optimale dont celles présentées à l'équation (3) où R est le rendement d'un actif :

(3) $$U'(c_t) = \beta E_t[U'(c_{t+1})(1 + R_{i,t+1})] \ , \forall \ i = 1,...,N \quad , \quad \forall \ t = 0,...,\infty$$

La solution optimale implique donc que le rendement de chacun des actifs doit satisfaire

l'équation (3) de façon à ce que l'utilité marginale d'une unité de consommation délaissée aujourd'hui égale l'utilité marginale espérée de la période suivante (ou de toutes autres périodes) en tenant compte du facteur d'actualisation subjectif. Ces conditions de premier ordre sont fréquemment désignées comme équations d'Euler.

À partir de l'équation (3), l'équation (4) démontre que la valeur d'équilibre espérée de tout rendement actualisé par le terme M_{t+1} composé du produit du ratio de l'utilité marginale entre deux périodes, c'est-à-dire le taux marginal de substitution, et du facteur d'actualisation subjectif doit être égale à un. Ce terme est fréquemment désigné comme le facteur d'actualisation stochastique ou comme le cœur ou le noyau d'un modèle de tarification. Le noyau prend donc différentes formes selon le type de consommation et la fonction d'utilité considérés par un modèle de tarification.

(4) $$E_t[M_{t+1}(1+R_{i,t+1})]=1 \text{ , où}$$

(5) $$M_{t+1}=\beta\frac{\mathrm{U}'(c_{t+1})}{\mathrm{U}'(c_t)}$$

Nous pouvons remarquer que l'actualisation sera plus importante à mesure que l'utilité marginale de la consommation à la période suivante est inférieure à celle de la période courante. Puisque les équations précédentes s'appliquent à tous les actifs, nous pouvons obtenir directement l'expression à l'équilibre pour la prime de risque entre deux actifs telle que présentée à l'équation (6), dont la prime de risque entre un actif risqué et un actif sans risque :

(6) $$E_t[M_{t+1}(R_{i,t+1}-R_{j,t+1})]=0$$

Dans le cas de l'actif sans risque, l'équation (4) peut être reformulée afin d'obtenir l'équation (7) qui permet d'apprécier la relation étroite entre le noyau de tarification et le rendement sans risque. L'espérance du noyau d'un modèle est ainsi directement reliée à celles du taux sans risques d'équilibre du modèle.

(7) $$E_t[M_{t+1}]=\frac{1}{E_t[1+R_{f,t+1}]}$$

La relation entre le noyau de tarification et les actifs risqués est plus complexe. À partir de l'équation (4) et les propriétés de la covariance, nous obtenons l'équation (8) :

(8) $$E_t[M_{t+1}]E_t[(1+R_{i,t+1})]+\mathrm{cov}(M_{t+1},R_{i,t+1})=1$$

Celle-ci fait intervenir la covariance dans la relation d'équilibre entre le facteur d'actualisation stochastique et le rendement d'un actif risqué. Par exemple, si la covariance entre le rendement de l'actif et le ratio de l'utilité marginale est nulle, le rendement espéré nécessaire à l'équilibre devra seulement être suffisant pour combler le déficit intertemporel d'utilité de la consommation et la préférence temporelle subjective.

Nous obtenons ainsi l'actif sans risque dont la relation avec le noyau est présentée à l'équation (7). Cependant, pour une covariance négative, un rendement supplémentaire est attendu. En utilisant les équations précédentes, nous obtenons l'équation (9) pour la prime de risque où le rôle de la covariance est alors explicite.

(9) $$E_t[R_{i,t+1} - R_{f,t+1}] = -(1 + R_{f,t+1})\operatorname{cov}(M_{t+1}, R_{i,t+1})$$

L'équation (9) renferme l'essence du CCAPM et de façon plus générale, celle des modèles de tarification des actifs fondés sur la relation entre la consommation et l'investissement issue du programme d'optimisation intertemporel défini aux équations (1) et (2). Nous pouvons remarquer que le sens de la covariance entre le noyau et le rendement détermine le signe de la prime de risque. Ainsi, lorsque l'utilité marginale de la consommation est élevée à la période suivante relativement à l'utilité marginale actuelle, mais que le rendement d'un actif y est faible, la covariance est négative et la prime de risque augmente. Autrement dit, les actifs qui procurent en moyenne un rendement faible lorsque l'utilité marginale est élevée commandent une prime de risque plus élevée.

En définissant un actif dont le rendement R_c est parfaitement corrélé avec celui de la consommation, nous pouvons finalement obtenir l'équation (10) du CCAPM dérivé en temps continu par Breeden (1979).

(10) $$E_t[R_{i,t+1} - R_{f,t+1}] = \beta_{i,c}\left(E_t[R_{c,t+1}] - R_{f,t+1}\right) \text{ , } où$$

(11) $$\beta_{i,c} = \frac{\operatorname{cov}(R_{i,t+1}, c_{t+1})}{\operatorname{var}(c_{t+1})}$$

La relation entre la prime de risque et la covariance du rendement avec la consommation est mise en évidence par le bêta de consommation (11). Contrairement à l'expression précédente, la relation entre la consommation et le rendement est directe. Cependant, l'interprétation fondamentale ne change pas. Une covariance positive entre la consommation de la période suivante et le rendement implique un haut rendement en moyenne au moment où la consommation est élevée (faible utilité marginale) ce qui est moins désirable et fait augmenter la prime de risque. Nous pouvons encore une fois constater que le rendement exigé d'un actif est directement relié à sa capacité à optimiser le bien-être des individus à travers leur consommation. Il s'agit d'une approche théorique élégante fondée sur un principe économique fondamental : le bien-être tiré de la consommation dépend de la nécessité de cette consommation.

1.2. Énigmes de tarification

1.2.1. L'énigme de la prime de risque

L'énigme de la prime de risque est reliée dans un premier temps à une évidence empirique : la prime de risque moyenne historique aux États-Unis définie par le

rendement excédentaire des actifs risqués par rapport au rendement sans risque est élevée, trop élevée si l'on considère le cadre analytique du CCAPM. Pour réussir à soutenir cette observation, le modèle nécessite un niveau d'aversion relative au risque élevé, c'est-à-dire bien au-delà du seuil raisonnable fixé à dix[1] par Mehra et Prescott (1985) où l'énigme de la prime de risque a explicitement été formulée à partir du rendement du S&P500 et des bons du Trésor américains. Bien qu'il s'agisse de la première étude caractérisant de façon précise le phénomène, ce denier avait déjà été observé dans quelques études antérieures.

La première observation du phénomène peut être attribuée à Grossman et Shiller (1981). En analysant la volatilité des rendements boursiers à partir de la condition de premier ordre du CCAPM et d'une fonction d'utilité puissance, ils concluent que le facteur d'actualisation stochastique varie dans le temps. Ils constatent que pour arriver à générer la volatilité observée de l'indice boursier, le coefficient d'aversion relative au risque doit être d'au moins quatre, soit le coefficient qu'ils utilisent pour générer le comportement de l'indice à partir de la condition de premier ordre. Dans leur conclusion, ils évoquent des résultats préliminaires quant à l'évaluation empirique du coefficient d'aversion relative au risque. Ils soulignent ainsi que leurs premières estimations font état d'un coefficient anormalement élevé. Ce résultat a également été confirmé par Hansen et Singleton (1982).

Afin de présenter l'énigme de la prime de risque, nous allons utiliser une fonction d'utilité puissance présentée à l'équation (12). L'une des propriétés de cette fonction d'utilité est de présenter un coefficient d'aversion relative au risque γ constant dans le temps et les niveaux de richesse. Ainsi, l'équation (4) prend la forme spécifiée à l'équation (13).

(12) $$U(c) = \frac{C^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$$

(13) $$E_t[M_{t+1}(R_{i,t+1} - R_{j,t+1})] = 0 \ , \ \forall \quad i = 1,...,N \ \ où$$

(14) $$M_{t+1} = \beta(\frac{c_{t+1}}{c_t})^{-\gamma}$$

Une hausse de l'aversion au risque diminue ainsi le facteur d'actualisation stochastique (14) et augmente la prime de risque lorsque la croissance de la consommation est positive. Si l'on pose l'hypothèse supplémentaire que la consommation et les rendements sont homoscédastiques et que leurs distributions sont log-normales, il est possible de réécrire la condition de premier ordre (13) sous la forme présentée aux équations (15) et (16)[2] où le terme qui s'ajoute à la prime de risque est un facteur de correction pour

[1] Par exemple, à partir d'une fonction d'utilité puissance présentée plus bas à l'équation (12), un individu avec une richesse nulle pouvant participer à une loterie avec une chance sur deux de gagner 50000$ ou 100000$ sera prêt à renoncer à participer en échange d'un montant de 75000$ s'il est risque neutre (γ = 0), 70711$ pour l'utilité logarithmique (γ = 1), 58566$ (γ = 5), 53991$ (γ = 10), 51858 (γ = 20) et 51 209$ (γ = 30). Le montant demandé apparaît rapidement contre-intuitif pour les valeurs supérieures à dix.

[2] La variable $r_{i,t}$ est le log-rendement et Δc_t le taux de croissance logarithmique de la consommation.

l'inégalité de Jensen due à l'hypothèse de log-normalité.

(15) $$E_t r_{i,t+1} + \ln \beta - \gamma E_t \Delta c_{t+1} + 0{,}5\left(\sigma_i^2 + \gamma^2 \sigma_c^2 - 2\gamma\sigma_{ic}\right) = 0$$

(16) $$E_t\left[r_{it+1} - r_{f,t+1}\right] + \tfrac{\sigma_i^2}{2} = \gamma\sigma_{ic}$$

À partir de cette formulation développée initialement par Hansen et Singleton (1983), nous pouvons constater encore une fois à partir de l'équation (16) que la prime de risque d'un actif augmente proportionnellement à sa covariance avec le taux de croissance de la consommation $\sigma_{i,c}$ ainsi qu'avec le coefficient d'aversion relative au risque. De plus, en décomposant le terme de covariance, nous pouvons constater à l'équation (17) que la prime de risque augmente avec la volatilité du rendement et du taux de croissance de la consommation ainsi que leur coefficient de corrélation.

(17) $$E_t\left[r_{i,t+1} - r_{f,t+1}\right] + \tfrac{\sigma_i^2}{2} = \gamma\sigma_i\sigma_c\rho_{ic}$$

Campbell (2003) utilise ce cadre d'analyse pour étudier l'énigme de la prime de risque. Le rendement moyen annuel du S&P500 entre 1948 et 1998 est de 8,1 % alors que le rendement moyen sur les bons du Trésor est de 0,9 % pour des écarts-types respectifs de 15,7 % et 1,8 %. La prime de risque est donc de 7,2 % et son écart-type de 15,3 %. Le taux de croissance moyen de la consommation américaine des biens non durables[3] est pour sa part de 1,96 % et peu volatil avec un écart-type de 2 %. Le coefficient de corrélation entre le taux de croissance moyen de la consommation et de la prime de risque du S&P500 est relativement faible à 0,20.

Compte tenu de ces valeurs dans l'équation (16), le coefficient d'aversion relative au risque doit être supérieur à 200 pour vérifier l'équation. Ce coefficient peut nous laisser perplexes à première vue. L'estimation sur la période 1970-1998 génère également un coefficient élevé de près de 150. Campbell (2003) reproduit l'analyse pour différents pays occidentaux. Le résultat est moins spectaculaire pour le Canada et le Japon avec respectivement des coefficients de l'ordre de 60 et de 80 alors que l'Angleterre affiche également un coefficient élevé de plus de 185. Le scénario est similaire pour les autres pays considérés à l'exception de quelques pays européens où le coefficient est négatif. De façon générale, les pays occidentaux où la capitalisation du marché boursier est importante relativement à la richesse totale du pays présentent tous une énigme de la prime de risque.

L'équation (17) permet d'isoler l'effet de la volatilité du rendement de celle de la croissance de la consommation et de leur corrélation sur l'estimation du coefficient d'aversion relative au risque. Dans la section précédente, nous avons souligné l'impact de la covariance entre la consommation et les rendements sur le niveau de ces derniers. Même avec une corrélation unitaire, Campbell (2003) estime un coefficient d'environ 50 pour les États-Unis et généralement entre 8 et 30 pour les autres pays. Cette analyse

[3] Nous utiliserons l'expression «biens non durables» pour signifier les biens non durables et les services à moins d'indication contraire.

permet de souligner que l'énigme de la prime de risque est reliée, entre autres, à la faible volatilité de la consommation. Par exemple, pour obtenir un coefficient inférieur à 10 avec une corrélation unitaire, la volatilité de la croissance de la consommation devrait être environ cinq fois plus élevée, alors que pour un coefficient de corrélation de 0,20, elle devrait être du même ordre que celui des rendements boursiers, voire légèrement supérieure.

Une autre façon d'aborder l'équation (17) est d'évaluer la volatilité des rendements boursiers associée à un coefficient d'aversion au risque de 10 et une corrélation unitaire. Étant donné la faible volatilité de la croissance de la consommation et du rendement des bons du Trésor, la volatilité du marché devrait alors quadrupler pour satisfaire l'équation (17). Autrement dit, une aversion au risque à un seuil raisonnable exige une prime de risque de l'ordre de celle observée sur cette période seulement si les rendements sont parfaitement corrélés avec la consommation et qu'ils présentent un écart-type de l'ordre de 60%.

L'analyse précédente repose sur un modèle utilisant différentes hypothèses sur les distributions des rendements et de la croissance de la consommation. Afin d'illustrer l'énigme sans avoir recours à des hypothèses sur les distributions, il est possible d'analyser directement les propriétés du facteur d'actualisation stochastique et plus particulièrement sa volatilité. La condition de premier ordre de la prime de risque peut être reformulée inconditionnellement pour obtenir l'équation (18) en utilisant la propriété de l'espérance conditionnelle emboîtée. En développant le terme de covariance de la prime de risque et du noyau, nous pouvons obtenir l'équation (19) qui permet d'arriver à la relation (20) pour le ratio de Sharpe à partir de l'intervalle des valeurs possibles du terme de corrélation.

(18) $$E[M(R_i - R_f)] = 0$$

(19) $$E[M\ (R_i - R_j)] + \rho_{if,m}\sigma_{if}\sigma_M = 0$$

(20) $$\frac{\sigma_M}{E[M]} \geq \frac{E[(R_i - R_f)]}{\sigma_{if}}$$

Cette approche a été développée initialement par Shiller (1982) dans la foulée de l'analyse de la volatilité des rendements initiée par Grossman et Shiller (1981) et ensuite généralisée par Hansen et Jagannathan (1991). Elle est maintenant désignée comme la borne inférieure pour le facteur d'actualisation stochastique ou la frontière de Hansen-Jagannathan. Ainsi, la volatilité du facteur d'actualisation stochastique normalisée par son espérance doit être supérieure au ratio de Sharpe du marché. Puisque le rendement sans risque est faible, la valeur du rendement brut du taux sans risque de près de un; ce qui signifie que la volatilité du facteur d'actualisation stochastique doit être au minimum du même ordre que celle du ratio de Sharpe, soit environ 50 % pour les États-Unis.

Le facteur d'actualisation stochastique étant constitué à partir du ratio de l'utilité marginale de la consommation, le cadre d'analyse des préférences et la caractérisation de

la consommation doivent permettre d'expliquer une telle volatilité. Dans le cadre d'analyse classique de l'utilité espérée où la consommation est indépendante, cette volatilité doit nécessairement être générée à partir d'un niveau d'aversion relative au risque très élevé puisque les données historiques de consommation sont peu volatiles.

Certains auteurs ont remis en question le seuil raisonnable de dix pour le coefficient d'aversion relative au risque. Cependant, considérer un niveau d'aversion relative au risque élevé dans le cadre du modèle classique fait apparaître une autre énigme reliée cette fois au taux sans risque.

1.2.2. L'énigme du taux sans risque

L'énigme du taux sans risque a été relevée par Weil (1989). Afin d'illustrer cette énigme dans le cadre du modèle classique, nous pouvons simplement utiliser la relation entre le facteur d'actualisation stochastique et le taux sans risque à l'équation (7) qui établit qu'à l'équilibre, le rendement sans risque brut est l'inverse du facteur d'actualisation stochastique. Ainsi, dans le cadre du modèle classique avec une fonction d'utilité puissance, nous obtenons l'équation (21) et l'équation (22) dans le cadre log-normal.

(21) $$(1+R_{f,t+1}) = E_t\left[\beta(\frac{c_{t+1}}{c_t})^{\gamma}\right]$$

(22) $$r_{f,t+1} = -\ln\beta - 0{,}5\gamma^2\sigma_c^2 + \gamma E_t\Delta c_{t+1}$$

Nous pouvons constater qu'une hausse du coefficient d'aversion relative au risque fait augmenter le taux sans risque dans la mesure où la croissance de la consommation est plus importante que l'effet du terme associé à la variance de la consommation. L'incertitude associée à la consommation fait augmenter la demande d'épargne et baisser le taux sans risque, alors que la croissance de la consommation a l'effet contraire. Les deux phénomènes sont amplifiés par l'aversion au risque.

Ainsi, un niveau d'aversion au risque plus élevé implique donc généralement un rendement sans risque élevé et, comme nous l'avons déjà constaté, une prime de risque élevée. À l'inverse, si le niveau d'aversion relative au risque est faible, le taux sans risque est faible, mais la prime de risque l'est également. En d'autres termes, le cadre d'analyse classique ne permet pas à la fois d'obtenir à la fois une prime de risque élevée et un taux sans risque faible tels que nous l'observons.

Pour les fonctions d'utilité puissance, le coefficient d'aversion relative au risque est également l'inverse du coefficient d'élasticité de substitution intertemporelle (ci-après ESI) de la consommation définie à l'équation (23) de façon générale et pour l'utilité puissance (12).

(23) $$\frac{d(\frac{C_{t+1}}{C_t})\frac{U_{c_{t+1}}}{U_{c_t}}}{d(\frac{U_{c_{t+1}}}{U_{c_t}})\frac{C_{t+1}}{C_t}} = -\frac{d\ln(\frac{C_{t+1}}{C_t})}{d\ln(\frac{U_{c_{t+1}}}{U_{c_t}})} \quad \textit{et pour } (12) \quad -\frac{d\ln(\frac{C_{t+1}}{C_t})}{d\ln(\frac{U_{c_{t+1}}}{U_{c_t}})} = \frac{1}{\gamma}\frac{d\ln(\frac{C_{t+1}}{C_t})}{d\ln(\frac{C_{t+1}}{C_t})} = \frac{1}{\gamma}$$

À partir de l'équation (7) de la relation entre le taux sans risque et le facteur d'actualisation stochastique, nous pouvons ainsi interpréter l'ESI comme la variation de la croissance de la consommation en pourcentage pour une certaine augmentation du taux sans risque en pourcentage. Une faible ESI signifie donc qu'un individu diffère peu sa consommation à la suite d'une hausse des taux d'intérêt ou, autrement dit, qu'il est peu enclin à substituer sa consommation dans le temps[4]. L'équation (22) démontre cette relation lorsque le coefficient d'aversion relative au risque est remplacé par l'inverse de l'ESI.

D'un point de vue théorique, l'aversion au risque et la propension d'un individu à substituer sa consommation dans le temps n'ont pas à être liées. Il est en effet possible d'imaginer un individu possédant une faible aversion au risque et une très faible propension à substituer sa consommation dans le temps, ce qui est impossible avec une fonction d'utilité puissance.

Une économie caractérisée par des individus possédant une faible ESI implique un faible niveau d'épargne et donc un taux sans risque élevé à l'équilibre. Dans le modèle classique, cette faible élasticité est associée avec un niveau d'aversion au risque élevé et donc à un taux sans risque élevé, ce qui est cohérent, mais ne permet pas de réconcilier le modèle avec le faible taux sans risque observé. Ainsi, si les individus sont peu enclins à substituer leur consommation dans le temps, nous devrions observer un taux sans risque moyen élevé.

Les énigmes de tarification semblent donc reliées en partie dans le cadre d'analyse classique à la réciprocité entre le coefficient d'aversion relative au risque et l'ESI. Weil (1989) démontre que l'énigme de la prime de risque est en fait uniquement reliée au coefficient d'aversion relative au risque et que l'énigme du taux sans risque est indissociable de ce dernier. Il développe une fonction d'utilité qui permet de distinguer les préférences par rapport au risque de celles par rapport au temps. Une fonction similaire a été développée de façon indépendante par Epstein et Zin (1989). La fonction d'utilité Epstein-Zin-Weil (ci-après EZW) marque un pas important dans l'évolution des solutions mises de l'avant pour résoudre les énigmes de tarification en permettant de dissocier les deux paramètres afin d'obtenir à la fois un faible taux sans risque et une prime de risque élevée.

1.2.3. Utilité d'Epstein-Zin-Weil (EZW)

L'utilité EZW est issue du cadre théorique des préférences de Kreps et Porteus (1978). Contrairement au cadre théorique des préférences von Neumann-Morgenstern, le cadre

[4] L'ESI est donc concrètement reliée à l'efficacité de différentes politiques gouvernementales, dont la politique monétaire.

théorique de préférences Kreps-Porteus n'impose pas l'agrégation statique des loteries temporelles; ce qui permet de différencier les attitudes face au moment de la résolution de l'incertitude associée à une succession de paiements aléatoires. L'utilité EZW est construite récursivement et implique une fonction d'agrégation temporelle F sur l'utilité de la consommation courante et l'utilité de la consommation future.

$$U_t = F\left(c_t, E_t\left[U_{t+1}\right]\right) \tag{24}$$

Weil (1989) ainsi que Epstein et Zin (1989) proposent comme fonction d'agrégation une fonction d'utilité avec élasticité de substitution constante[5] (ci-après CES). La fonction CES combine la consommation courante avec l'équivalent certain de l'utilité future espérée évaluée à partir d'une fonction d'utilité puissance[6] :

$$U_t = \left\{(1-\beta)c_t^{1-\frac{1}{\rho}} + \beta\left(E_t\left[U_{t+1}^{1-\gamma}\right]^{\frac{1}{\kappa}}\right)\right\}^{\frac{\rho}{\rho-1}},\ \rho \geq 0,\ \gamma > 0,\ \beta \in (0,1)\ ,\ \kappa = \frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\rho}} \tag{25}$$

Le paramètre ρ est l'ESI alors que le paramètre γ est le coefficient d'aversion relative au risque. Le paramètre β est le facteur d'actualisation subjectif dans un cadre d'analyse non stochastique. Le paramètre gouvernant l'aversion au risque est donc distinct dans l'utilité EZW du paramètre définissant la propension à substituer la consommation dans le temps. Cette séparation permet de caractériser la préférence pour la résolution hâtive ou tardive de l'incertitude dans un contexte de décisions dynamiques de consommation et d'investissement. Une résolution hâtive (tardive) de l'incertitude est préférée lorsque κ est plus petit (plus grand) que un. Lorsque l'ESI est égale à l'inverse du coefficient d'aversion relative au risque, l'aversion au risque associée à la consommation future est exactement compensée par la propension à substituer la consommation dans le temps.

L'expression du facteur d'actualisation stochastique associée à l'utilité EWZ est donnée à l'équation (26). Le facteur contient un terme supplémentaire associé au ratio de la valeur de l'utilité future et de son équivalent certain.

$$M_{t+1} = \left[\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\frac{1}{\rho}}\left(\frac{U_{t+1}}{E_t\left[U_{t+1}{}^{1-\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}}\right)^{\frac{1}{\rho}-\gamma}\right] \tag{26}$$

Ce terme permet ainsi de capter le risque prospectif de la consommation. La séparation entre l'ESI et le coefficient d'aversion relative au risque permet également de constater que le terme associé à la croissance de la consommation de la période suivante est

[5] La fonction d'utilité CES converge vers une fonction d'utilité Cobb-Douglas lorsque son coefficient d'élasticité de substitution ρ tend vers un, vers une fonction d'utilité de Leontief lorsqu'il tend vers zéro (complémentarité parfaite) et vers une fonction linéaire lorsqu'il tend vers l'infini (substitution parfaite).

[6] Les formulations utilisées par Weil (1989) et Epstein et Zin (1989) sont légèrement différentes. Cette représentation de l'utilité EZW est dans l'esprit de celle préconisée par Epstein et Zin (1989).

gouverné par l'ESI. Pour une croissance positive, une faible propension à substituer la consommation dans le temps augmente le risque et donc la prime de risque.

La richesse optimale associée à l'utilité EZW est caractérisée par le ratio de la valeur de continuation de l'utilité et l'utilité marginale de la consommation. Cette relation permet de remplacer l'utilité future dans le noyau pour obtenir la formulation alternative (27) où apparaît le rendement de la richesse totale R_W[7]. Les expressions de la prime de risque et du rendement sans risque dans le cadre log-normal sont pour leur part présentées aux équations (28) et (29).

(27) $$M_{t+1} = \left[\beta^{\kappa} \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{\frac{\kappa}{\rho}} \left(1 + R_{W,t+1}\right)^{(\kappa-1)} \right]$$

(28) $$E_t\left[r_{i,t+1} - r_{f,t+1}\right] + \tfrac{\sigma_i^2}{2} = \frac{\kappa}{\rho}\sigma_{i,c} + (1-\kappa)\sigma_{i,W}$$

(29) $$r_{f,t+1} = -\ln\beta - 0{,}5(1-\kappa)\sigma^2{}_W - 0{,}5\frac{\kappa}{\rho^2}\sigma_c^2 + \frac{1}{\rho}E_t\Delta c_{t+1}$$

La prime de risque est désormais influencée par la covariance du rendement de l'actif avec la croissance de la consommation et par sa covariance avec le rendement du marché selon les pondérations κ et (1-κ). Nous pouvons remarquer que lorsque le coefficient d'aversion au risque est l'inverse de l'ESI, κ est alors égal à un et nous retrouvons les expressions du noyau et de la prime de risque associées à la fonction d'utilité puissance et au CCAPM. Lorsque le coefficient d'aversion relative au risque est égal à un, κ est alors égal à zéro et nous obtenons l'utilité logarithmique et l'expression associée au CAPM où la covariance du rendement d'un actif avec le rendement du marché détermine sa prime de risque. Par ailleurs, le taux sans risque à l'équation (29) augmente avec la croissance espérée de la consommation. L'effet est amplifié par une faible ESI. La demande d'épargne de précaution augmente également pour une faible ESI si les individus préfèrent une résolution hâtive et que κ est positif. Une préférence pour une résolution hâtive augmente de plus l'épargne de précaution avec la volatilité du rendement du marché. Le risque de long terme associé au marché augmente ainsi la demande pour l'actif sans risque. Cependant, l'évaluation empirique d'Epstein et Zin (1991) par la méthode des moments généralisée (ci-après GMM) présente des résultats mitigés et le modèle est généralement rejeté. L'inverse de l'ESI et le coefficient d'aversion au risque sont cependant généralement statistiquement significatifs, ce qui démontre la pertinence de la flexibilité de l'utilité EZW.

L'incertitude temporelle associée à l'utilité EZW est canalisée à travers l'équivalent certain de l'utilité future où interviennent l'aversion au risque et l'ESI. Cette particularité de l'utilité EZW se reflète dans son facteur d'actualisation stochastique. L'utilité EZW permet ainsi d'évaluer l'impact du risque de consommation sur différents horizons pour

[7] Le rendement du marché est utilisé par Epstein et Zin (1991) et Weil (1989) comme approximation du rendement de la richesse totale. L'évaluation empirique du modèle EZW utilisant cette spécification est ainsi sujette similairement à l'évaluation du CAPM à la critique de Roll (1977).

la tarification des actifs. L'utilité EZW fait donc intervenir directement le risque de long terme de la consommation lors de la valorisation des actifs. Cette caractéristique de l'utilité EZW a été soulignée et mise à profit par Bansal et Yaron (2004) afin de solutionner les énigmes de tarification.

1.2.4. Le risque de long terme

Bansal et Yaron (2004) élaborent un modèle de tarification avec une utilité EZW où la croissance de la consommation des biens non durables est caractérisée par une composante de court terme et de long terme. Cette spécification de la consommation diffère donc substantiellement de la formulation classique de Hall (1978) où la consommation suit simplement une marche aléatoire. Bansal et Yaron (2004) modélisent la composante de long terme à partir d'une variable d'état latente très persistante qui affecte le niveau et la volatilité de la croissance de la consommation. Les chocs associés à cette variable se répercutent donc sur la consommation à court terme, mais également sur la consommation à long terme et son incertitude. Un risque de consommation de long terme est donc généré et canalisé à travers l'utilité EZW où le risque de la consommation future intervient comme nous l'avons vue précédemment.

Pour activer le risque de long terme, le modèle nécessite une ESI supérieure à un. À partir d'un exercice de calibration et de simulations, ils obtiennent un niveau et une volatilité pour la prime de risque et le taux sans risque qui cadrent avec les données historiques. Cependant, l'estimation de l'ESI est généralement faible et fait l'objet d'un débat académique. Les résultats obtenus par le modèle font également l'objet de critiques, notamment de Beeler et Campbell (2012), qui soulignent que le modèle implique des résultats en contradiction avec différents phénomènes empiriques, et en particulier au niveau du fort pouvoir prédictif des prix des actifs pour la volatilité des rendements futurs.

Hansen *et al.* (2008) explorent également le risque de long terme associé à la consommation à partir d'une utilité EZW. Ils obtiennent des formulations explicites pour l'évaluation des actifs à partir d'une ESI unitaire et quantifient leur exposition au risque sur différents horizons. La prime de risque d'un actif est donc le reflet de l'exposition de ses flux monétaires aux primes de risque des différents horizons ou, autrement dit, à la structure à terme des primes de risques.

L'énigme de la prime de risque et celle du taux sans risque sont des phénomènes empiriques robustes dans le cadre analytique standard du CCAPM. Ce cadre repose cependant sur des hypothèses de modélisation importantes reliées principalement à l'utilisation de l'utilité espérée avec indépendance de la consommation dans le temps. Un modèle reposant sur une représentation de l'utilité permettant de caractériser le risque intratemporel et intertemporel de différents biens de consommation apparaît comme une approche raisonnable pour solutionner les énigmes de tarification. Le chapitre suivant présente différents modèles de tarification où le type de consommation et les formes d'utilité sont bonifiés par rapport au cadre d'analyse classique.

2. Modèles de tarification et consommation

La consommation au cours du cycle de vie des individus est au cœur de tous les modèles dynamiques de choix de portefeuilles pouvant être interprétés économiquement. La consommation à une date donnée dépend nécessairement du revenu d'emploi, de l'épargne ou d'emprunts. Relier le risque des investissements à la consommation est donc intuitif et mène directement au CCAMP de Lucas (1978) et Breeden (1979) tel que mentionné précédemment. Cependant, suite à la mauvaise performance empirique du CCAPM, plusieurs chercheurs ont tenté de modifier certains aspects du modèle tels la fonction ou la théorie d'utilité, l'environnement économique ou encore la définition de la consommation. Étant donné les différentes dimensions des données de consommation, à commencer par la définition même de la consommation, les méthodes d'agrégation possibles et leurs propriétés transversales et temporelles, la modification de la consommation apparaît comme une avenue prometteuse pour résoudre les difficultés empiriques du CCAPM.

La consommation des biens durables ne présente pas les mêmes propriétés temporelles que la consommation biens de consommation non durables. Les jeunes ménages épargnent et empruntent tôt dans leur cycle de vie pour être en mesure de se constituer un stock de biens durables et d'en retirer le fruit période après période. Par ailleurs, à mesure que le stock de biens durables se constitue, il peut avoir un impact positif, par l'importance du flux de services qu'il génère, ou négatif, par l'habitude de consommation qu'il crée, réduisant ainsi l'utilité de la consommation courante. L'intégration des biens durables dans un modèle génère donc une interdépendance temporelle dans la dynamique de consommation. Les fonctions d'utilité qui incorporent les biens durables ou les habitudes de consommation ne sont donc plus séparables dans le temps par construction.

2.1. Modèles avec consommation des biens durables

Dunn et Singleton (1986) présentent l'une des premières analyses de l'impact de la non-séparabilité temporelle des fonctions d'utilité générée par les biens durables dans un modèle de tarification avec un agent représentatif à partir de la fonction d'utilité intertemporelle puissance avec un coefficient d'aversion relative au risque γ combiné à une fonction d'utilité intratemporelle Cobb-Douglas (ci-après CD) (30) avec un coefficient de proportionnalité[8] θ pour agréger les flux de services des biens non durables et durables décrits respectivement aux équations (31) et (32) . Les flux de services sont issus de la consommation périodique des stocks qui sont constitués de la somme pondérée (généralement décroissante) de leur consommation courante et passée *c* et *d*. Les paramètres α_j contrôlent la persistance de la consommation passée des biens non durables alors que le paramètre δ est le taux périodique constant de dépréciation.

[8] Le paramètre θ représente la proportion des dépenses sur les deux facteurs de production dans une économie de concurrence pure et parfaite. θ et (1-θ) sont également les coefficients d'élasticité de la fonction de production.

(30) $$U(C_t, D_t) = \frac{(C_t^{\theta} D_t^{(1-\theta)})^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \text{ où}$$

(31) $$C_t = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j c_{t-j} \ , \ m < \infty \ , \ \alpha_j > 0 \quad \forall \ j$$

(32) $$D_t = \sum_{j=0}^{\infty} (1-\delta)^j d_{t-j} \ , \ \ 0 < \delta < 0$$

Ils estiment que les biens non durables peuvent présenter une persistance d'environ un trimestre. Cette persistance est cependant nettement inférieure à celle des biens durables où environ seulement 5% de la valeur est consommée dans un trimestre. Leurs résultats empiriques favorisent leur spécification de l'utilité avec deux types de biens comparativement aux modèles utilisant uniquement la consommation des biens non durables pour expliquer les rendements des bons du Trésor, bien que le modèle soit généralement rejeté statistiquement. Des résultats comparables sur la persistance des biens non durables et durables et leur effet de substitution ont été obtenus par Eichenbaum et Hansen (1990).

À partir d'un cadre d'analyse similaire, mais en généralisant la fonction d'utilité CD à une fonction d'utilité CES, Ogaki et Reinhart (1998) démontrent que la prise en compte des biens durables a une importance lors de l'évaluation de l'ESI. Le coût d'utilisation du flux de service du stock de biens durables pour une période représente la différence entre la valeur présente du stock de biens durables et la valeur actualisée du stock à la période suivante après amortissement. Le coût d'utilisation courant varie donc positivement avec le taux d'intérêt. Une hausse du taux d'intérêt entraînera ainsi une substitution de la consommation des biens durables vers les biens non durables. Cet effet de substitution fait diminuer le taux de croissance des biens non durables et génère ainsi un biais à la baisse de l'ESI lorsque les biens durables ne sont pas considérés. Ils estiment par GMM une ESI de l'ordre de 0,4 statistiquement significative à travers différentes spécifications de l'estimation. L'intégration des biens durables semble donc corriger un biais à la baisse des premières estimations de l'ESI reposant uniquement sur les biens non durables dont celle de Hall (1988), selon laquelle les valeurs obtenues sont très faibles pour les différentes spécifications considérées.

La consommation passée n'a pas nécessairement à générer un effet positif sur l'utilité présente. En soustrayant la consommation passée de la consommation dans la fonction d'utilité, la consommation passée peut alors s'interpréter comme une habitude de consommation. L'habitude de consommation devient un seuil à l'approche duquel l'utilité marginale de la consommation augmente rapidement. Ryder et Heal (1973) ont développé ce type de fonctions d'utilité repris par plusieurs auteurs dans le cadre de modèles de tarification, dont Constantinides (1990) et Campbell et Cochrane (1999). Constantinides et Ferson (1991) étudient la prédominance entre la durabilité et l'habitude de consommation pour les biens non durables et durables distinctement à partir d'une fonction d'utilité puissance modifiée pour accommoder les deux types d'effets. L'équation (34) présente la dynamique de la construction de l'habitude de consommation X_t sur le stock C_t du bien de consommation c_t décrit à l'équation (35). La persistance de

l'habitude de consommation est déterminée par les termes λ_s, alors que la durabilité de la consommation est caractérisée par les termes α_j.

(33) $$U(C_t, X_t) = \frac{(C_t - X_t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \text{ où}$$

(34) $$X_t = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s C_{t-s}, \ \lambda_s \geq 0, \ \xi \geq 0, \ \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s = 1$$

(35) $$C_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j c_{t-j} \quad , \quad \alpha_j \geq 1 \quad , \quad \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j = 1$$

Les équations (34) et (35) peuvent être reformulées et simplifiées afin d'obtenir le système d'équations (36) à (38).

(36) $$U(A_t) = \frac{(A_t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \text{ où}$$

(37) $$A_t \equiv \alpha_0 \sum_{j=0}^{\infty} b_j c_{t-j},$$

(38) $$b_j = (\alpha_j - \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \alpha_{j-i}) / \alpha_0, \ j \geq 1$$

Les paramètres d'intérêts pour évaluer la durabilité et l'habitude de consommation sont les b_j. Pour une fonction décroissante exponentielle de la consommation passée, ces paramètres seront positifs pour la durabilité et négatifs pour l'habitude de consommation. Si les deux effets sont présents, ils peuvent alors être positifs ou négatifs selon la prédominance de la durabilité ou de l'habitude de consommation, respectivement. Leurs résultats favorisent généralement l'habitude de consommation pour les biens non durables avec les données trimestrielles et annuelles puisque la persistance des biens non durables s'estompe à l'intérieur d'un trimestre. Les résultats ne sont toutefois pas concluants pour les biens durables. L'analyse est effectuée de façon distincte pour les deux types de consommation. Par conséquent, la procédure d'estimation implique une séparation entre les différents types de biens qui ne repose pas sur des données empiriques, et est donc susceptible de biaiser l'estimation des paramètres gouvernant l'habitude de consommation et le stock de biens durables.

Heaton (1995) étudie également la prédominance des deux effets à partir de la même spécification de l'utilité que Constantinides et Ferson (1991) avec uniquement les biens non durables, mais à partir d'une procédure d'estimation lui permettant d'isoler l'effet temporel de l'agrégation des données de consommation. L'agrégation des données de consommation crée par construction une autocorrélation positive favorisant l'habitude de consommation au détriment de la durabilité dans les tests empiriques. En considérant cet effet, il détecte des évidences pour les deux effets et similairement à Constantinides et Ferson (1991), trouve que l'effet de la durabilité serait prédominant jusqu'à l'horizon mensuel alors que l'habitude de consommation dominerait pour les horizons plus longs. Le modèle intégrant les deux aspects performe mieux que le modèle classique bien qu'il soit rejeté statistiquement. Il constate également que le modèle intégrant uniquement l'habitude de consommation performe similairement au modèle classique alors que celui

intégrant uniquement la durabilité performe relativement mieux. L'habitude de consommation est donc pertinente dans ce cadre d'analyse avec les biens non durables dans la mesure où la persistance de ces derniers est également prise en compte. Puisque l'analyse ne considère pas les biens durables, l'effet de la persistance des biens et leur interaction avec le risque de consommation demeurent inconnues.

À partir des études précédentes, il paraît important de considérer une spécification de l'utilité permettant de tenir compte de la durabilité des différents types de biens et des habitudes de consommation qu'ils peuvent entraîner. De plus, le fait de considérer la dynamique intratemporelle entre différents types de consommation comme les biens non durables et les biens durables peut également améliorer la compréhension du risque de consommation des individus et la performance empirique des modèles de tarification. Des études récentes de Yogo (2006), Pakos (2006), Piazzesi *et al.* (2007) et Fillat (2008) ont suivi cette voie.

Yogo (2006) présente un modèle de tarification comportant une relation intratemporelle entre les biens non durables et le flux de service des biens durables à partir d'une fonction d'utilité CES similairement à Ogaki et Reinhart (1998), mais en généralisant la fonction d'utilité puissance à une fonction d'utilité EZW pour obtenir les fonctions d'utilité intratemporelle et intertemporelle (39) et (40) alors que le noyau de tarification est donné par l'équation (41). Ce modèle synthétise plusieurs modèles à travers différentes restrictions sur ses paramètres. Si l'élasticité de substitution intratemporelle entre les biens (ci-après l'ESA) ε est égale à l'ESI ρ, alors la fonction d'utilité revient à une version à deux biens du modèle d'Epstein et Zin (1989). Lorsque l'ESI est égale à l'inverse du coefficient d'aversion au risque γ, la fonction d'utilité est alors équivalente à celle du modèle d'Ogaki et Reinhart (1998), sauf que les biens non durables ne présentent pas de persistance temporelle. Finalement, lorsque $\varepsilon = \rho = 1/\gamma$, la fonction d'utilité est simplement la fonction d'utilité puissance.

(39) $$u(c_t, D_t) = \left[(1-w) c_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} + w\, D_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \quad D_t = \sum_{j=0}^{\infty} (1-\delta)^j d_{t-j}, \quad 0 < \delta < 0$$

(40) $$U_t = \left\{ (1-\beta) u(c_t, D_t)^{1-\frac{1}{\rho}} + \beta \left(E_t \left[U_{t+1}^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{\kappa}} \right) \right\}^{\frac{1}{1-\frac{1}{\rho}}}$$

(41) $$M_{t+1} = \left[\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\frac{-1}{\rho}} \left[\frac{\left[(1-w) + w \left[\frac{D_{t+1}}{C_{t+1}} \right]^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\varepsilon}}}}{\left[(1-w) + w \left[\frac{D_t}{C_t} \right]^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\varepsilon}}}} \right]^{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\rho}} R_{\tilde{W},t+1}^{(1-\frac{1}{\kappa})} \right]^{\kappa}$$

L'estimation du modèle par GMM à partir des rendements de différents portefeuilles ne permet pas de rejeter le modèle alors que les autres spécifications restrictives du modèle sont rejetées statistiquement. Le succès du modèle provient principalement du caractère procyclique des biens durables. Cette particularité des biens durables amplifie le caractère contracyclique du facteur d'actualisation stochastique, c'est-à-dire de l'utilité marginale, à travers un terme additionnel par rapport au modèle classique où l'on retrouve le ratio du flux de services des biens durables sur les biens non durables. Cette relation est observée aussi longtemps que l'ESI est plus petite (plus grande) que L'ESA pour un κ positif (négatif). Cette condition est vérifiée empiriquement avec des valeurs de l'ordre de 0,02 et 0,6 pour l'ESI et l'ESA respectivement. Contrairement aux résultats d'Ogaki et Reinhart (1998), l'ajout des biens durables dans le modèle ne semble pas faire augmenter l'estimation de l'ESI pour une utilité EZW où l'ESI n'est plus contrainte à être l'inverse du coefficient d'aversion au risque. Cette distinction permet également d'obtenir un facteur d'actualisation subjectif inférieur à un et de résoudre l'énigme du taux sans risque. L'estimation du coefficient d'aversion relative au risque est cependant très élevée; ce qui signifie que le modèle ne réussit à expliquer les rendements que dans la mesure où l'énigme de la prime de risque demeure entière.

Pakos (2006) développe un modèle similaire reposant sur une fonction d'utilité intratemporelle CES et une fonction d'utilité intertemporelle EZW. Le système d'utilité est similaire à celui de Yogo (2006), mais considère un flux de services provenant d'une fonction de production CD (42) sur les biens durables et le capital humain K_t, dans la fonction CES plutôt que le flux de service des biens durables.

(42) $$F(D_t, K_t) = aD_t^{\theta} K_t^{(1-\theta)}$$

Puisque le capital humain est difficilement observable, il procède à l'estimation en normalisant la valeur de la constante et du capital humain à un, ce qui revient essentiellement au modèle de Yogo (2006), sauf que le noyau de tarification fait intervenir D_t^{θ} plutôt que D_t dans le terme additionnel. Pakos obtient un estimé du paramètre θ inférieur à un, ce qui implique que le stock des biens durables dans la fonction de production domestique présente un rendement d'échelle décroissant contrairement aux modèles précédents où le rendement est supposé constant. Cette distinction a un impact sur l'estimation de l'ESI et de l'ESA, qui sont maintenant évaluées respectivement à environ 0,5 et zéro. Ces estimations diffèrent de celles de Yogo (2006) puisque l'ESA est maintenant inférieure à l'ESI et implique une complémentarité parfaite entre le flux de service des biens durables et les biens non durables. Malgré des résultats prometteurs lorsque le modèle est estimé pour certains portefeuilles, les résultats tendent à différer pour d'autres portefeuilles où le coefficient d'aversion au risque est alors élevé tout comme l'ESI.

2.2. Modèle avec consommation des biens d'habitation

Tel que mentionné précédemment, les biens d'habitation présentent des caractéristiques différentes des biens durables communs. Piazzesi *et al.* (2007) explorent les incidences de

ce type de consommation sur la tarification des actifs en combinant les services d'habitation h_t et les biens non durables dans une fonction d'utilité intratemporelle CES imbriquée dans une fonction d'utilité puissance selon l'équation (43).

$$u(c_t, h_t) = \left\{ \left[c_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} + w h_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \right\}^{1-\frac{1}{\rho}} /(1-\tfrac{1}{\rho}) \tag{43}$$

$$M_t = \left[\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\frac{1}{\rho}} \left(\frac{\alpha_{t+1}}{\alpha_t} \right)^{\frac{\rho-\varepsilon}{\rho(1-\varepsilon)}} \right] \tag{44}$$

Leur modèle génère un terme additionnel dans le facteur d'actualisation stochastique (44) par rapport au modèle classique dont l'élément central est la proportion α des dépenses de consommation des biens non durables sur la consommation totale. Ils interprètent le risque associé à ce nouveau terme comme un risque de composition de la consommation puisqu'il dépend du niveau de consommation entre les biens non durables et les services d'habitation. Si la proportion de la consommation est contracyclique et donc qu'elle augmente en période de crise alors que la consommation des services d'habitation diminue, le noyau sera également contracyclique dans la mesure où l'ESA est supérieure à un ainsi qu'à l'ESI, similairement à Yogo (2006). Une ESA supérieure à un implique que le service d'habitation et les biens non durables doivent être des biens substituts afin de générer un risque additionnel de composition de consommation. Ils analysent les propriétés de leur modèle et ses conséquences pour les différents moments des rendements des actifs à partir d'un exercice de calibration et de simulation. Ils obtiennent pour une ESA légèrement supérieure à 1 et une ESI de 0,2 (ou de façon équivalente un coefficient d'aversion au risque de 5 dans le cadre de l'utilité puissance) un taux sans risque bas et peu volatil. Le rendement et la volatilité du portefeuille de marché sont cependant inférieurs aux valeurs observées. La performance de leur *Housing capital asset pricing model* (HCAPM) varie également selon la période étudiée. Les résultats sont moins probants pour la période de l'après-guerre. Le taux sans risque que le modèle génère est alors élevé et volatil pour des valeurs du facteur d'actualisation subjectif inférieures à un, ce qui est caractéristique de l'énigme du taux sans risque.

À la lumière de ces résultats, l'ajout des services d'habitation dans un modèle de tarification avec une fonction d'utilité EWS s'avère une avenue intéressante pour résoudre l'énigme de la prime de risque et l'énigme du taux sans risque. Fillat (2008) explore cette piste en étendant le cadre d'analyse de Piazzesi *et al.* (2007) à une fonction d'utilité intertemporelle EZW (46).

$$u(c_t, h_t) = \left(c_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} + w_t h_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \tag{45}$$

(46) $$U_t = \left\{ (1-\beta) u(c_t, h_t)^{1-\frac{1}{\rho}} + \beta \left(E_t \left[U_{t+1}^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{\kappa}} \right) \right\}^{\frac{\rho}{\rho-1}}$$

(47) $$M_t = \left[\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\frac{1}{\rho}} \left(\frac{\alpha_{t+1}}{\alpha_t} \right)^{\frac{\rho-\varepsilon}{\rho(1-\varepsilon)}} \left(\frac{U_{t+1}}{E_t \left[U_{t+1}^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right)^{\frac{1}{\rho}-\gamma} \right]$$

Fillat (2008) procède à l'analyse de son modèle par un exercice de calibration et se concentre sur le risque de long terme du modèle à partir d'une ESI unitaire lui permettant d'obtenir une formulation explicite pour la valeur de continuation de l'utilité. Le noyau (47) ait donc intervenir, comme pour le noyau avec uniquement la consommation des biens non durables (26), un terme composé de la valeur de continuation et son équivalent certain. Lorsque l'inverse de l'ESI est égal au coefficient d'aversion relative au risque, ce terme est éliminé du noyau et nous obtenons le noyau (44) de Piazzesi *et al.* (2007). En considérant une utilité EWS, le risque de composition de la consommation devient dynamique à travers l'utilité future et peut donc être séparé en une composante intratemporelle et intertemporelle. L'analyse de Fillat (2008) permet d'établir l'importance du risque de composition de la consommation associé aux services d'habitation pour la structure à terme de la prime de risque, bonifiant ainsi l'analyse initiale du risque de long terme de Bansal et Yaron (2004) et Hansen *et al.* (2008).

3. Généralisation des modèles de tarification avec consommation

3.1. Fondement de la généralisation

3.1.1. L'intuition économique

Le risque de consommation, de sa première formulation à celles plus élaborées des modèles de tarification récents, demeure un élément central pour expliquer le prix des actifs. Parmi les différents types de consommation, ceux avec une dimension durable semblent présenter un risque additionnel par rapport aux biens non durables dont les propriétés sont maintenant bien établies. Lorsque les conditions économiques se dégradent, les individus réduisent leur consommation de façon générale et de façon plus marquée pour les biens durables puisqu'ils sont plus dispendieux, mais également parce qu'ils génèrent un engagement sur plusieurs périodes alors que le futur est incertain. Ce phénomène est bien documenté historiquement comme le souligne Yogo (2006) et s'est matérialisé une fois de plus durant la grande récession de 2008 engendrée par la crise financière.

Lorsqu'une récession s'allonge et que les dépenses pour les biens durables comme les voitures et les maisons diminuent de façon constante ou encore lorsque ces biens sont saisis, l'utilité marginale qui leur est associée augmente considérablement. Cependant, alors que plusieurs investisseurs souhaiteraient liquider leurs actifs financiers pour augmenter leur consommation, la baisse de la valeur de ces actifs mine leur aptitude à combler cette consommation, illustrant ainsi la relation fondamentale de la covariance entre le rendement des actifs financiers et l'utilité marginale des individus pour l'établissement de la prime de risque.

Parmi les biens durables, les biens d'habitation jouent un rôle particulier. Un bien d'habitation est au centre de l'organisation des biens matériels d'un ménage. Autrement dit, une maison est l'endroit où s'incorporent et s'assemblent la plupart des biens durables de consommation. En ce sens, l'interrelation entre un bien d'habitation et les autres biens crée un espace de vie. Un bien d'habitation peut être consommé à travers son coût d'utilisation périodique, c'est-à-dire sa location, ou encore par son acquisition. Son faible taux de dépréciation temporelle en fait un bien très persistant et donc un actif de long terme. De plus, lors de son acquisition, une hypothèque est généralement contractée et expose les ménages à un risque de défaut de paiement et des conditions d'emprunt restrictives pour l'avenir. Par ailleurs, les ménages peuvent retirer un rendement de leur bien d'habitation et réduire le coût effectif de leur consommation.

Ces considérations ont motivé les modèles de tarification de Piazzesi *et al.* (2007) et de Fillat (2008) ainsi que les travaux de Cocco (2004) et de Yao et Zhang (2005a, 2005b) où les décisions d'habitation sont intégrées dans le choix dynamique de portefeuille. Le risque de composition de la consommation se limite cependant dans ces modèles à l'interaction entre les biens non durables et les biens d'habitation alors que le risque de composition de la consommation des biens non durables et durables s'avère également

pertinent pour expliquer le rendement des actifs tel que le démontrent notamment Dunn et Singleton (1986), Ogaki et Reinhart (1998) et Yogo (2006).

Ces modèles demeurent toutefois muets sur le risque de composition de la consommation des biens d'habitation et des biens durables. Tel que mentionné précédemment, la structure de consommation définie par les biens d'habitation et les biens durables crée des services domestiques consommés périodiquement. Un risque de composition de la consommation associé aux biens d'habitation et aux biens durables est donc susceptible d'émerger de la relation étroite dans la prise de décisions de consommation et affectera également le risque de composition avec la consommation des biens non durables. Le risque de composition de la consommation entre le service périodique de la consommation structurée et les biens non durables dépendra donc également du risque de composition de la consommation des biens d'habitation et des biens durables.

Puisque les biens durables et d'habitation sont persistants, un choc négatif sur leur consommation entraîne une baisse de leur stock de la période présente, mais également du stock des prochaines périodes. L'impact d'un choc contemporain sur les stocks futurs augmente avec la durabilité du bien. Le service futur de la consommation structurée est donc affecté par les chocs contemporains sur les stocks de biens utilisés pour sa production. Le service domestique produit par les biens durables présente ainsi un risque de consommation de court, de moyen et de long terme.

Les engagements financiers périodiques généralement associés aux biens d'habitation et aux biens durables créent une contrainte budgétaire intertemporelle limitant la consommation des autres biens et l'épargne. La structure de financement de ces biens est donc susceptible d'entraîner un risque de défaut différent selon l'horizon considéré. Le mode d'acquisition des biens durables est ainsi susceptible de générer également un risque de long terme pouvant avoir une incidence considérable sur les décisions d'investissement des individus au cours de leur cycle de vie.

3.1.2. Spécifications du modèle

Le risque de composition de la consommation dépend de la relation économique entre les différents types de biens. Deux biens substituables ne présenteront pas le même risque de composition que deux biens complémentaires. Pour refléter cette idée dans un modèle de tarification, nous allons définir pour débuter une fonction de production domestique qui agrège les différents biens considérés. À la lumière des modèles de tarification existants et puisque nous cherchons à définir un modèle permettant de les généraliser, nous considérons une fonction CES (48) sur les biens non durables, le stock de biens durables (49) et le stock de biens d'habitation (50).

(48) $$u(c_t, D_t, H_t) = \left[w_1 c_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} + w_2 D_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} + w_3 H_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \text{ , où } \sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

(49) $$D_t = (1-\delta)D_{t-1} + d_t \quad , \; 0 < \delta \leq 1$$

(50) $$H_t = (1-\alpha)H_{t-1} + h_t \quad , \; 0 < \alpha \leq 1$$

Cette formulation implique que le service issu du stock de biens durables et du bien d'habitation est une fonction linéaire du stock. L'utilisation d'une fonction CES sur plusieurs biens implique que l'élasticité de substitution entre les biens est égale à ε pour chaque paire de service; ce qui restreint la caractérisation du risque de composition de la consommation.

Une façon alternative de définir la fonction de production domestique est de considérer une fonction CES emboîtée où différents niveaux de production existent et génèrent un extrant utilisé dans la fonction de CES du niveau supérieur, telle que développée par Sato (1967) dans le cas de deux niveaux et généralisée par Keller (1976). À partir de la discussion précédente sur le caractère particulier des biens durables et d'habitation, nous pouvons spécifier une fonction de production CES du service associé à la façon dont les individus structurent leur consommation de biens à caractère durable (51). Ce service est ensuite utilisé comme intrant conjointement avec les biens non durables dans la fonction de production domestique globale (52). L'élasticité de substitution entre les biens non durables et le service de la structure de consommation est ε, alors que celle entre les biens durables et le stock d'habitation est a. L'élasticité entre les biens durables et les biens non durables ainsi qu'entre les biens d'habitation et les biens non durables est alors une expression complexe faisant intervenir l'élasticité des différents niveaux de production[9]. Cette spécification de la fonction de production permet ainsi d'obtenir une flexibilité dans la caractérisation du risque de composition. Lorsque l'élasticité entre les biens durables et les biens d'habitation tend vers un, nous obtenons une fonction de production de deuxième niveau CD avec η comme coefficient de proportionnalité et lorsque l'élasticité des différents niveaux est identique, nous retrouvons la formulation (48).

(51) $$S(D_t, H_t) = \left[(1-\eta) D_t^{1-\frac{1}{a}} + \eta H_t^{1-\frac{1}{a}} \right]^{\frac{a}{a-1}}$$

(52) $$u(c_t, S_t) = \left[(1-w) c_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} + w S_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

Le flux de services de la fonction de production de deuxième niveau est le reflet des choix de consommation des individus et représente la façon dont ils structurent leur consommation dans le temps pour en retirer le plus de bien-être possible. Similairement aux modèles de tarification présentés, l'inclusion de biens de consommation additionnels par rapport au modèle classique est susceptible de générer des termes supplémentaires dans le facteur d'actualisation stochastique pour refléter des risques de consommation additionnels associés à la composition et la dynamique temporelle de consommation des

[9] Sato (1967) présente l'expression de l'élasticité de substitution entre les biens de niveaux de production distincts.

individus. Bien qu'il puisse être pertinent de considérer la persistance des biens non durables, nous allons limiter leurs impacts temporels potentiels en supposant qu'ils sont périssables. De cette façon, nous posons l'hypothèse que la consommation structurée est influencée uniquement par les biens présentant une durabilité sur un certain nombre de périodes[10].

Pour la fonction d'utilité intertemporelle, nous utilisons la fonction d'utilité d'EZW (53) afin de séparer le coefficient d'aversion au risque de l'ESI et de capter le risque de consommation de long terme dans la tarification des actifs financiers associé au risque intertemporel de composition de la consommation. Le risque de composition intertemporel de la consommation caractérisé par la consommation structurée pourra ainsi être pris en compte. De plus, nous allons limiter l'impact de la consommation passée sur l'utilité présente à son caractère durable, laissant ainsi pour de futures recherches l'impact potentiel de la formation d'habitudes de consommation dans un cadre d'analyse avec plusieurs biens de consommation et une utilité EWZ.

$$U_t = \left\{ (1-\beta) u(c_t, S_t)^{1-\frac{1}{\rho}} + \beta E_t \left[U_{t+1}^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{\kappa}} \right\}^{\frac{\rho}{\rho-1}}, \tag{53}$$

Les équations (49) à (53) forment une spécification générale de l'utilité englobant plusieurs modèles. Le tableau 1 présente différents modèles et leur représentation à partir de restrictions sur les paramètres du modèle avec consommation structurée pour un coefficient de proportion *a* unitaire.

Tableau 1 : Modèle et restrictions paramétriques

Modèles	Auteurs	Contraintes		
D-CAPM (EZW-CES)	Yogo (2006)	$\eta=0$		
D-CAPM (CRRA-CES)	Eichenbaum et Hansen (1990) Okaki et Reinhart (1998)	$\eta=0$	$\gamma=1/\rho$	
D-CAPM (CRRA-CD)	Dunn et Singleton (1986)	$\eta=0$	$\gamma=1/\rho$	$\varepsilon=1$
H-CAPM (EZW-CES)	Fillat (2008)	$\eta=1$		
H-CAPM (CRRA-CES)	Piazzesi et coll. (2007)	$\eta=1$		$\gamma=1/\rho$
C-CAPM (EZW)	Epstein et Zin (1989), Weil (1989)	$\rho=\varepsilon$		
C-CAPM (CRRA)	Lucas (1978), Breeden (1979)	$\gamma=1/\rho$	$\rho=\varepsilon$	

Dans le cas des modèles de Piazzesi *et al.* (2007) et Fillat (2008), leur représentation dans le modèle général implique que service d'habitation est une fonction linéaire du stock d'habitation. La section suivante précise le modèle présenté aux équations (49) à (53) et les hypothèses sur l'environnement économique avant de procéder à la dérivation des équations d'Euler.

[10] Tel que mentionné précédemment, Heaton (1995) évalue que l'effet de la durabilité des biens non durables et des services est peu susceptible de dépasser un trimestre.

3.2. Dérivation du modèle avec consommation structurée

3.2.1. Utilité et environnement économique du modèle

Nous utilisons un modèle avec agent représentatif rationnel sur un horizon infini, avec marché complet et information parfaite. Nous supposons également que l'économie comporte N actifs financiers $i=0,1,\ldots, N$ avec rendement périodique total $R_{i,t+1}$ où l'actif 0 est un actif sans risque ainsi que trois biens de consommation.

Nous considérons un bien de consommation non durable c_t qui est également le numéraire, un bien de consommation durable d_t et un bien de consommation d'habitation h_t dont les prix relatifs sont respectivement $P_{d,t}$ et $P_{h,t}$. Les biens de consommation durables et d'habitation sont persistants. À chaque période, ils sont dépréciés respectivement dans une proportion de α et δ alors que le bien de consommation non durable est consommé entièrement au cours de la période caractérisant l'intervalle de décision de l'agent représentatif que nous supposons d'un trimestre. Au fil du temps, l'agent accumule un stock de biens durables D_t et d'habitation H_t selon les équations (49) et (50).

L'agent consomme un service périodique S_t généré à partir d'une fonction de production domestique CES (51) qui fait intervenir les stocks de biens durables et d'habitation. Contrairement à la consommation périodique du bien non durable, l'agent ne consomme pas directement ces deux types de biens. Il consomme plutôt un service issu de leur agrégation dans la fonction de production domestique. Ce service dépend donc de la manière dont l'agent structure l'achat et la transformation de ces biens dans le temps en considérant leur impact sur les périodes futures. La fonction de production est caractérisée par le paramètre η qui gouverne l'importance relative de chacun des stocks dans la fonction de production et l'élasticité de substitution a.

À chaque période, le bien-être que l'agent tire de la consommation du bien non durable et du service domestique est caractérisé par la fonction d'utilité intratemporelle CES (52) où le paramètre ω indique l'importance relative des deux types de consommation dans l'utilité alors que ε est l'ESA entre les biens non durables et le service de la consommation structurée. Les paramètres ε, ω, a et η gouvernent ainsi le risque de composition intratemporel de la consommation.

La fonction d'utilité intratemporelle CES est finalement imbriquée dans une fonction d'utilité CES intertemporelle EZW (53) où les paramètres conservent leur signification définie dans le cadre de la présentation de l'utilité EZW à la section 1.3. La caractérisation de l'utilité intertemporelle complète la spécification des préférences de l'agent dans le modèle. Les préférences de l'agent sont ainsi définies à partir de fonctions CES emboîtées à trois niveaux. Le premier niveau est associé à la production du service domestique issu du stock de biens durables et d'habitation. Le deuxième niveau caractérise l'utilité périodique ou intratemporelle de la consommation des biens non

durables et du service de la consommation structurée. Finalement, le dernier niveau met en relation la consommation périodique et la consommation future dans le cadre d'analyse EZW.

3.2.2. Problème de l'agent

À chaque période, l'agent doit choisir la quantité de biens c_t, h_t et d_t à acheter ainsi que les quantités $B_{i,t}$ de sa richesse $W_{i,t}$ financière à investir dans chacun des N actifs financiers de façon à respecter à chaque période les contraintes budgétaires intratemporelle (54) et intertemporelle (55).

(54) $$W_t = \sum_{i=0}^{N} B_{i,t} + c_t + P_{d.t} d_t + P_{h.t} h_t$$

(55) $$W_{t+1} = \sum_{i=0}^{N} B_{i,t} R_{i,t+1}$$

Pour résoudre le problème de l'agent, nous pouvons le reformuler de manière à obtenir le problème classique avec un seul bien de consommation. Pour ce faire, nous employons une stratégie similaire à Yogo (2006) et Pakos (2006) qui consiste à définir la richesse totale comme étant la richesse financière additionnée à la richesse matérielle définie par la somme de la valeur au marché des stocks de biens durables et d'habitation avant les achats de la période courante (56).

(56) $$\tilde{W}_t = W_t + P_{d.t}(1-\delta)D_{t-1} + P_{h.t}(1-\alpha)H_{t-1}$$

En définissant $B_{N+1,t} = P_{h,t}H_t$ et $B_{N+2,t} = P_{d,t}D_t$ les quantités de la richesse totale investies dans les stocks de biens d'habitation et durables ainsi que $R_{n+1,t+1} = (1-\alpha)P_{h,t+1}H_t / P_{h,t}H_t$ et $R_{n+2,t+1} = (1-\delta)\ P_{d,t+1}D_t / P_{d,t}D_t$ les rendements sur ces stocks, alors les contraintes budgétaires peuvent être reformulées selon les équations (57) et (58).

(57) $$\tilde{W}_t = c_t + \sum_{i=0}^{N+2} B_{i,t} \quad \text{car} \quad h_t = H_t - (1-\alpha)H_{t-1} \ \ et \ \ d_t = D_t - (1-\delta)D_{t-1}$$

(58) $$\tilde{W}_{t+1} = \sum_{i=0}^{N+2} B_{i,t} R_{i,t+1}$$

De plus, en considérant les quantités de la richesse totale investies dans chacun des $N+2$ actifs par rapport à la richesse totale moins la consommation du bien non durable, nous pouvons définir les proportions $\omega_{i,t}$ du portefeuille de l'agent et reformuler les contraintes budgétaires selon les équations (59) à (61).

(59) $$\omega_{i,t} = \frac{B_{i,t}}{(\tilde{W}_t - c_t)} \quad \forall i = 0,1,...,N+2$$

(60) $$\sum_{i=0}^{N+2} \omega_{i,t} = 1$$

(61) $$\tilde{W}_{t+1} = (\tilde{W}_t - c_t) \sum_{i=0}^{N+2} \omega_{i,t} R_{i,t+1}$$

Le problème de l'agent peut donc être représenté par le système d'équations (62) à (64).

(62) $$\underset{c_t, \{\omega_{i,t}\}_{i=0}^{N+2}}{Max} \left\{ (1-\beta) u(c_t, S_t)^{1-\frac{1}{\rho}} + \beta E_t \left[U_{t+1}^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{\kappa}} \right\}^{\frac{\rho}{\rho-1}}$$

(63) $$t.q. \quad \sum_{i=0}^{N+2} \omega_{i,t} = 1$$

(64) $$et \quad \tilde{W}_{t+1} = (\tilde{W}_t - c_t) \sum_{i=0}^{N+2} \omega_{i,t} R_{i,t+1} \qquad \forall t$$

Cette formulation est similaire à celle d'Epstein et Zin (1989, 1991). Le problème de l'agent peut être résolu par programmation dynamique. La structure récursive de l'utilité EZW donne directement à partir de la fonction objective (62) l'équation de Bellman (65).

(65) $$J_t(\tilde{W}_t) = \underset{c_t, \{\omega_{i,t}\}_{i=0}^{N+2}}{Max} \left\{ (1-\beta) u(c_t, S_t)^{1-\frac{1}{\rho}} + \beta E_t \left[J_{t+1}(\tilde{W}_{t+1})_{t+1}^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{\kappa}} \right\}^{\rho/(1-\rho)}$$

3.2.3. Équations d'Euler

Les conditions de premier ordre au problème permettent d'obtenir les équations d'Euler (66) à (70) respectivement pour le rendement de la richesse totale, la prime de risque d'un actif financier, la prime de risque du rendement du bien d'habitation, la prime de risque du bien durable et finalement le rendement d'un actif financier dont l'actif sans risque. Le facteur d'actualisation stochastique est présenté à l'équation (71). Les détails de la dérivation sont présentés à l'annexe A.

(66) $$E_t[M_{t+1} R_{\tilde{W},t+1}] = 1$$

(67) $$E_t[M_{t+1}(R_{i,t+1} - R_{0,t+1})] = 0 \quad , \forall i = 1,...,N$$

(68) $$E_t[M_{t+1}(R_{N+1,t+1} - R_{0,t+1})] = -[\frac{S_{H_t}}{P_{h,t}} \frac{u_{S_t}}{u_{c_t}}]$$

(69) $$E_t[M_{t+1}(R_{N+2,t+1} - R_{0,t+1})] = -[\frac{S_{D_t}}{P_{d,t}} \frac{u_{S_t}}{u_{c_t}}]$$

(70) $$E_t[M_{t+1}R_{i,t+1}] = 1 \quad ,\forall i = 0,1,...,N$$

(71) $$M_{t+1} = \left[\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\frac{-1}{\rho}} \left[\frac{\left[(1-w) + w\left[\frac{S_{t+1}}{C_{t+1}}\right]^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\varepsilon}}}}{\left[(1-w) + w\left[\frac{S_t}{C_t}\right]^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\varepsilon}}}} \right]^{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\rho}} R_{\tilde{W},t+1}^{(1-\frac{1}{\kappa})} \right]^{\kappa}$$

Nous pouvons remarquer que le facteur d'actualisation stochastique comporte un terme supplémentaire par rapport à celui de l'utilité EZW tel qu'anticipé. Ce terme est fonction du rapport entre le service de consommation provenant des stocks de biens d'habitation et durables et la consommation des biens non durables. À la lumière de la forme du noyau de tarification (71), de la forme (41) du noyau du DCAPM de Yogo (2006) ainsi que de celle similaire de Pakos (2006), les noyaux de tarification des modèles intégrant un type de consommation supplémentaire dans une utilité intratemporelle CES et une utilité intertemporelle EZW semblent donc différer uniquement à travers le numérateur du ratio au centre du terme supplémentaire associé au risque de composition de la consommation.

Lorsque le terme κ est positif ($\gamma > 1$ et $\rho < 1$)[11], l'impact sur l'utilité marginale du ratio de la consommation structurée sur la consommation des biens non durables sera décroissant dans la mesure où $\varepsilon > \rho$ et croissant lorsque $\varepsilon < \rho$. Par conséquent, si la consommation structurée varie par rapport à la consommation des biens non durables de façon procyclique, alors la variation de l'utilité marginale sera contracyclique dans la mesure où $\varepsilon > \rho$; c'est-à-dire lorsque l'effet de substitution intratemporel est supérieur à l'effet de substitution intertemporel. Les relations sont inversées lorsque κ est négatif. Les rendements qui varient négativement avec ce terme se voient donc attribuer une prime de risque supplémentaire.

Les équations d'Euler (68), (69) et (70) peuvent également être utilisées pour établir les équations d'Euler additionnelles pour le coût d'utilisation du service du stock d'habitation (72) et des biens durables (73).

(72) $$\frac{u_{S_t}}{u_{C_t}} S_{H_t} = P_{h,t} - (1-\alpha)E_t\left[M_{t+1}P_{h,t+1}\right]$$

(73) $$\frac{u_{S_t}}{u_{C_t}} S_{D_t} = P_{d,t} - (1-\delta)E_t\left[M_{t+1}P_{d,t+1}\right]$$

[11] En considérant que le coefficient d'aversion relative au risque est supérieur à un.

Les équations (72) et (73) représentent les conditions de premier ordre intratemporelles qui stipulent qu'à l'optimum, le rapport des utilités marginales reliées à une unité supplémentaire de service domestique obtenue à partir des stocks de biens d'habitation ou durables doit être égal au rapport de leur prix avec le numéraire. Par conséquent, ces équations nous donnent respectivement le coût d'utilisation ou de location pour une période du service de bien durable et d'habitation.

3.3. Dérivation générale du facteur d'actualisation stochastique

3.3.1. Représentation non linéaire

Comme nous l'avons observé précédemment, les facteurs d'actualisation stochastique (41) de Yogo (2006), (47) de Fillat (2008) et (71) pour le modèle général avec consommation structurée présentent des formes similaires. La forme du noyau de Fillat (2008) ne fait cependant pas intervenir directement le taux de croissance de la richesse totale. Tel que mentionné précédemment, les noyaux des modèles de tarification qui font intervenir un bien de consommation supplémentaire dans le cadre d'une utilité intertemporelle EZW et une fonction d'utilité intratemporelle CES présentent un terme supplémentaire relié au bien de consommation additionnel. Ce terme reflète ainsi un risque de composition de la consommation. Afin de mieux cerner les différences et les similitudes entre les noyaux des modèles de tarification, nous généraliserons la dérivation des facteurs d'actualisation stochastique pour cette classe de modèles.

Dans le cadre de l'environnement économique décrit précédemment avec absence d'arbitrage, Harrison et Kreps (1979) démontrent qu'il existe des facteurs d'actualisation stochastique M_{t+1} pouvant être utilisés pour évaluer les actifs financiers. De plus, lorsque le marché est complet, le facteur d'actualisation stochastique est unique.

Nous établissons maintenant le résultat suivant : dans une économie de marché complet avec agent représentatif, en l'absence de frictions et d'arbitrage, lorsque l'utilité intertemporelle est caractérisée par une fonction d'utilité EWS et une fonction d'utilité intratemporelle CES (74) combinant la consommation des biens non durables comme numéraire et une fonction A_t, possiblement complexe, de la consommation de biens ou de stocks de biens supplémentaires, nous pouvons démontrer que le facteur d'actualisation stochastique prend la forme (75) où G_t est donnée à l'équation (76).

(74) $$u(c_t, S_t) = \left[(1-w)c_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} + wA_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

(75) $$M_{t+1} = \left[\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\frac{1}{\rho}} \left[\frac{G_{t+1}}{G_t} \right]^{\frac{\rho-\varepsilon}{\rho(\varepsilon-1)}} \left(\frac{U_{t+1}}{E_t \left[U_{t+1}^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right)^{\frac{1}{\rho}-\gamma} \right]$$

(76) $$G_t = (1-w) + w\left(\frac{A_t}{c_t}\right)^{1-\frac{1}{\varepsilon}}$$

L'annexe B présente les détails de la démonstration qui repose sur l'homogénéité de l'utilité EZW et les relations d'équilibre associées à l'utilité marginale du numéraire et de la consommation présente et future. Corolairement, lorsque l'utilité puissance est utilisée plutôt que l'utilité EZW, le facteur d'actualisation stochastique est alors composé des deux premiers termes du facteur d'actualisation stochastique général (75). L'approche utilisée simplifie grandement la démonstration issue du problème de l'agent. Cette dernière est cependant utile dans un cadre d'analyse dynamique, par exemple lorsque le problème de portefeuille de l'agent est résolu par programmation dynamique.

Le résultat précédent permet également d'établir que le facteur d'actualisation stochastique contient un terme supplémentaire associé au ratio de la valeur de l'utilité future et de son équivalent certain. Ce terme permet de capter le risque prospectif de la consommation tel que discuté précédemment. En associant le risque prospectif de la consommation à la croissance de la richesse, nous obtenons l'expression alternative (77) où le taux de croissance de la richesse totale $R_{W,t}$ apparaît explicitement.

(77) $$M_{t+1} = \left[\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\frac{1}{\rho}} \left[\frac{G_{t+1}}{G_t} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\rho}\right)} R_{W,t+1}^{1-\frac{1}{\kappa}} \right]^{\kappa}$$

Le terme G_t caractérise les différents modèles de tarification intégrant différents biens de consommation dans le cadre défini précédemment. Dans le cas où un bien n de consommation plutôt qu'un stock est considéré en plus des biens non durables comme dans le cas de Piazzesi *et al.* (2007) et Fillat (2008), la condition de premier ordre intratemporelle permet d'obtenir la relation (78) entre l'expression G_t et la proportion α_t des dépenses de consommation des biens non durables sur le total des dépenses de consommation.

(78) $$\alpha_t = \frac{P_t^c c_t}{P_t^c c_t + P_t^n n_t} = \left[(1-w) + w \left[\frac{n_t}{C_t} \right]^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \right]^{-1}$$

Le facteur d'actualisation stochastique prend alors la forme (47) dans le cas d'une fonction d'utilité intertemporelle EZW et ne fait plus intervenir le terme w qui caractérise l'importance relative des dépenses de consommation sur les deux biens puisque la proportion des dépenses de consommation est utilisée directement. Cette approche permet de simplifier le facteur d'actualisation stochastique et est robuste aux modifications des dépenses relatives de consommation dans le temps.

3.3.2. Représentation linéaire du facteur d'actualisation stochastique et modèles factoriels

Les facteurs d'actualisation stochastique généraux présentés plus haut sont non linéaires. Tout facteur d'actualisation stochastique peut cependant être approximé par une équation linéaire telle que présentée, entre autres, par Cochrane (2005, chap.9). Différentes approches sont possibles. La représentation linéaire des facteurs d'actualisation des modèles de tarification classiques du chapitre 1 dans le cadre log-normal est un exemple. Une autre approche ne reposant pas sur une hypothèse pour la distribution des variables consiste à procéder à une approximation log-linéaire (79) où m_t est le logarithme du facteur d'actualisation stochastique.

(79) $$-\frac{M_{t+1}}{E[M_{t+1}]} \approx -1 + E[m_t] - m_t$$

En appliquant l'approximation log-linéaire (79) à l'expression générale (77) pour le facteur d'actualisation stochastique, m_t prend la forme (80) où les lettres minuscules correspondent au logarithme de leur expression dans la formulation non linéaire du facteur d'actualisation stochastique. Nous obtenons ainsi une approximation linéaire reposant sur trois facteurs; soit le taux de croissance des biens non durables et de la richesse totale ainsi que sur la croissance du terme associé au ratio de la structure de biens de consommation additionnels sur la consommation des biens non durables. L'approximation log-linéaire (79) prend alors la forme (81) où le terme de constante est explicité à l'équation (82).

(80) $$-m_{t+1} = \kappa\left[-b + \frac{\Delta c_{t+1}}{\rho} + (\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon})(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\rho})\Delta g_{t+1} + (\frac{1}{\kappa} - 1)r_{M_{t+1}}\right]$$

(81) $$-\frac{M_{t+1}}{E[M_{t+1}]} \approx cont. + \frac{\kappa}{\rho}\Delta c_{t+1} + \kappa(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon})(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\rho})\Delta g_{t+1} + (1-\kappa)r_{M_{t+1}}$$

(82) $$const = -1 - \frac{\kappa}{\rho}E[\Delta c_{t+1}] - \kappa(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon})(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\rho})E[\Delta g_{t+1}] - (1-\kappa)E[r_{M_{t+1}}]$$

L'approximation permet ainsi de définir une approximation linéaire du facteur d'actualisation stochastique en facteurs de risque (83) où q est un vecteur de coefficients

et f_t un vecteur de facteur de même dimension.

(83) $$-\frac{M_{t+1}}{E[M_{t+1}]} = const. + q' f_t$$

À partir de la relation fondamentale de tarification (6) pour les rendements excédentaires, nous obtenons le modèle de tarification linéaire (84) pour les rendements excédentaires $R^e_{i,t}$ faisant intervenir leur covariance avec les facteurs de risque[12].

(84) $$E[R_{i,t} - R_f] = \frac{\kappa}{\rho}\mathrm{cov}(R^e_{i,t}, \Delta c_t) + \kappa(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\varepsilon})\mathrm{cov}(R^e_{i,t}, \Delta g'_t) + (1-\kappa)\mathrm{cov}(R^e_{i,t}, r_{W,t})$$

Les coefficients de l'équation linéaire de tarification (84) correspondent aux paramètres sur les facteurs dans l'approximation (81) du facteur d'actualisation stochastique. Le terme du risque de composition g' comprend cependant maintenant l'exposant $\varepsilon/(\varepsilon-1)$ et varie négativement avec l'utilité marginale. Lorsque le rendement d'un actif varie positivement avec le rendement de la richesse totale, sa prime de risque augmente dans la mesure où κ est inférieur à un alors qu'elle augmentera s'il varie positivement avec la croissance de la consommation des biens non durables si κ est positif. La relation est plus complexe pour le terme associé au risque de composition de la consommation. Si l'actif varie positivement avec la croissance de ce dernier, que κ est positif et que l'ESA est supérieur à l'ESI, la prime de risque augmente puisque l'actif varie alors négativement avec l'utilité marginale. La relation entre la prime de risque d'un actif dépend donc de l'élasticité de substitution entre les différents types de biens dans la fonction d'utilité intratemporelle, de l'élasticité de substitution intertemporelle et de sa covariance avec le taux de croissance du terme de composition de la consommation. Notons que les primes de risque associées à la croissance de la consommation des biens non durables et le rendement de la richesse totale ne seront positives simultanément que lorsque κ est positif et inférieur à un, ce qui restreint l'ESI à être inférieure à un pour un coefficient d'aversion au risque supérieur à un similairement au résultat obtenu pour l'utilité EZW à l'équation (28).

La section suivante initie l'évaluation empirique des modèles analysés précédemment à partir de leur facteur d'actualisation stochastique. La section débute par la description des différentes données financières et économiques requises.

[12] En multipliant et en divisant chaque terme par la variance de leur facteur respectif, nous obtenons la représentation usuelle de l'espérance de la prime de risque de l'actif i avec les $Beta_{i,j}$= cov(R_i,f_j)/ var(f_j) et les primes de risque des facteur qui sont alors égales à var($f_{i,t}$)q_i.

4. Estimation du modèle de tarification avec consommation structurée

4.1. Rendements des actifs

Les modèles de tarification présentés aux sections précédentes posent peu de restrictions sur le type d'actifs financiers pouvant être utilisés pour leur estimation. Nous pouvons ainsi en principe utiliser tout rendement d'actifs que nous jugeons intéressants pour évaluer la performance des modèles pour une économie donnée. Pour faciliter la comparaison de la performance des modèles avec les études précédentes, nous allons estimer les modèles à partir de données américaines. L'analyse pourrait cependant être réalisée pour toute économie où les marchés financiers occupent une place importante comme, par exemple, les pays considérés par Campbell (2003). Depuis l'étude incontournable de Fama et French (1992, 1993), il est maintenant usuel d'évaluer la performance des modèles de tarification par leur aptitude à évaluer correctement les portefeuilles de Fama-French ordonnancés selon leur capitalisation boursière et leur ratio de la valeur au livre sur la valeur marchande. Nous allons donc utiliser les rendements de ces portefeuilles déclinés selon différents niveaux de granularité. Ces rendements sont tirés de la librairie de données de Kenneth French[13].

Les autres rendements d'actifs financiers nécessaires à l'estimation des modèles sont le rendement sans risque et le rendement du marché. Similairement aux études précédentes, nous utiliserons respectivement le rendement des bons du Trésor trois mois et le rendement de l'indice de marché élargi AMEX-NASDAQ-NYSE du *Center of Research in Security Prices* (CRSP). L'estimation du modèle est donc assujettie à la critique de Roll (1977) tel que discuté précédemment. Finalement, nous devons également avoir recours aux données sur les biens non durables, les biens durables et les biens d'habitation. Ces rendements sont obtenus du *U.S. Department of Commerce* et du *Bureau of Economic Analysis* (BEA).

Nous utilisons des rendements trimestriels réels allant du troisième trimestre de 1959 (1959-III) au quatrième trimestre de 2010 (2010-IV) inclusivement. Les rendements réels sont obtenus en les ajustant pour l'inflation calculée à partir de l'indice des prix à la consommation des biens non durables et des services[14]. Le tableau 2 présente les statistiques descriptives du rendement des bons du Trésor trois mois, du marché ainsi que du facteur construit selon le ratio de la valeur au comptable sur la valeur marchande (HML) et le facteur construit à partir de la taille (SMB) de Fama et French (1992, 1993). Les rendements de ces derniers portefeuilles permettent de caractériser les facteurs de risque associés aux rendements des portefeuilles de Fama et French (1993).

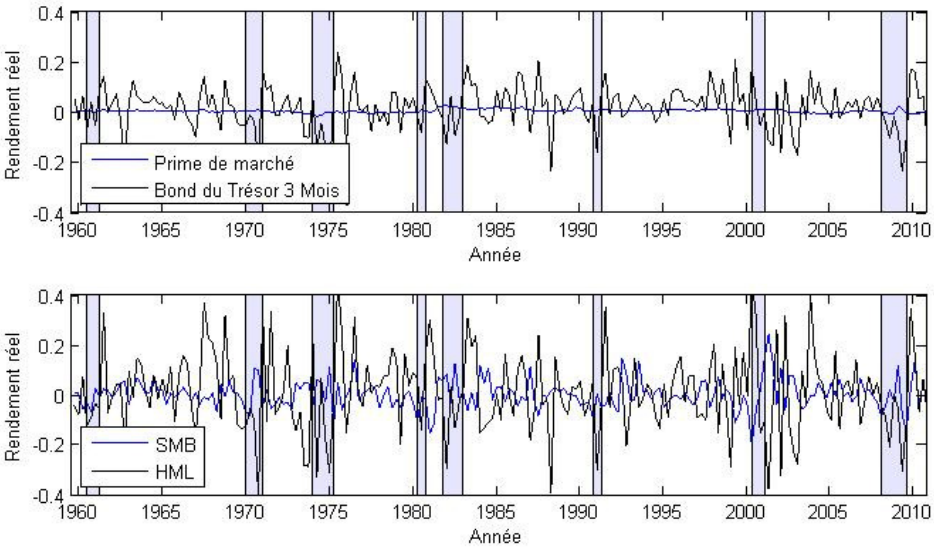
Le rendement trimestriel moyen réel du marché est de 1,68 % et de 0,30 % pour le bon du Trésor trois mois pour une prime de marché de 1,39 % et un écart-type de 8,63 %. La

[13] Disponible à :http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html

[14] L'indice des prix des biens non durables et des services est ajusté au besoin si les services des biens d'habitation doivent être exclus des biens non durables.

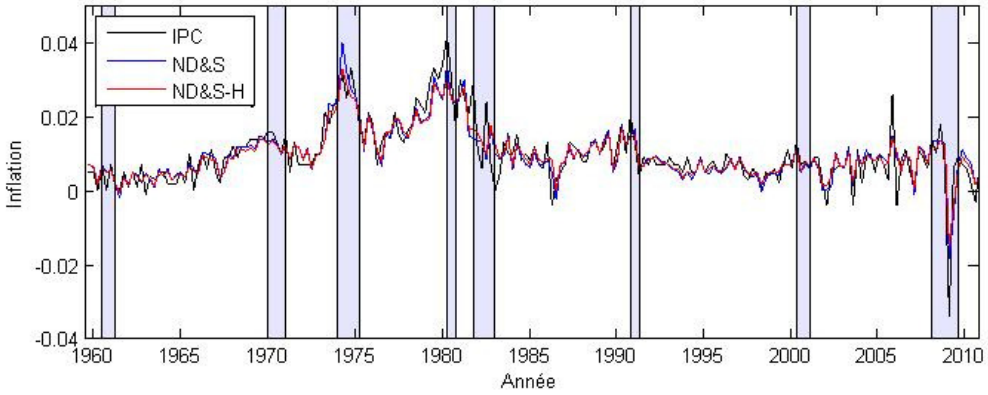
prime de risque du marché est peu persistante avec une autocorrélation de 6,30 % sur un trimestre; soit légèrement plus basse que l'autocorrélation du rendement de marché qui s'élève à 7,12 %. Le rendement du facteur HML de Fama et French (1993) est seulement de 0,25 %, mais supérieur au facteur SMB dont le rendement réel est négatif à -0,29 % alors que leurs écarts-types sont respectivement de 5,81 % et 5,49 %. L'anomalie associée au rendement excédentaire des entreprises à faible capitalisation sur les entreprises à grande capitalisation ne semble donc pas se maintenir au cours des dernières années. La section du haut de la figure 1 présente l'évolution de la prime de marché et du rendement sur le bon du Trésor trois mois alors que le graphique du bas présente l'évolution des primes de risque HML et SMB. Les pires rendements historiques ont été observés au troisième trimestre de 1974, au quatrième trimestre de 1987 avec le rendement quotidien le plus faible enregistré le *Black Monday* et, finalement au quatrième trimestre de 2008, au cœur de la crise financière. Les périodes de récession enregistrées par le *National Bureau of Economic Research* (NBER) sont ombragées.

Figure 1 : Rendements d'actifs



Afin d'obtenir les rendements réels, nous construisons un indice des prix à la consommation cohérent avec la définition du numéraire dans le modèle; c'est-à-dire un indice de prix pour les biens de consommation non durables et les services en corrigeant pour les services associés aux biens d'habitation. Nous devons retrancher les services associés aux biens d'habitation pour les modèles de Piazzesi *et al*. (2007), de Fillat (2008) et pour le modèle avec consommation structurée puisqu'il considère le stock d'habitation pour construire un flux de service conjointement avec le stock de biens durables tel que décrit précédemment. Le détail de la construction de cet indice des prix à la consommation est présenté à l'annexe C. La figure 2 présente l'inflation pour cet indice de prix (ND&S-H), l'indice de prix associé aux biens non durables (ND&S) ainsi que l'indice de prix du *Bureau of Labor Statistics* (IPC). Les trois séries présentent une évolution similaire dans le temps. Cela s'explique principalement par la faible proportion des services associés à l'habitation dans les services globaux. Nous pouvons également observer la chute importante des trois séries d'inflation durant la crise financière et plus particulièrement pour les indices incluant les prix du service d'habitation.

Figure 2 : Séries d'inflation pour différents indices de prix



4.2. Données de consommation

Plusieurs données de consommation sont nécessaires pour l'estimation des modèles. Tel que décrit précédemment lors de la présentation des modèles, l'agent consomme à chaque période un bien périssable ainsi que des biens à caractère durable. Dans le cas du modèle général avec consommation structurée, l'agent acquiert des biens durables et des biens d'habitation desquels il retire un flux de service domestique. La source de données principale utilisée est le BEA des États-Unis et plus précisément les tables des comptes nationaux (ci-après NIPA) ainsi que les tables sur les immobilisations. Les sources des séries de consommation sont présentées à l'annexe C. Les biens durables et d'habitation ne sont pas périssables au cours d'une période. À chaque période, ces biens sont ajoutés à leur stock respectif déprécié par rapport à la période précédente. Ces stocks évoluent selon l'approche d'inventaire perpétuel décrit précédemment aux équations (49) et (50).

Pour mesurer le stock de biens durables et le stock de biens d'habitation pour chaque trimestre de 1959-I à 2010-IV, nous utilisons comme point de départ les données annuelles pour lesquelles l'information est disponible. Nous devons alors obtenir la valeur du stock en 1958 ainsi qu'une mesure du nouveau stock à chaque trimestre et un taux de dépréciation. Tel qu'expliqué dans le guide de construction des données des tables sur les immobilisations[15], pour le stock de biens durables, l'apport périodique au stock correspond aux dépenses de consommation périodiques en biens durables des tables NIPA. Puisque cette série est disponible trimestriellement, une fois que nous connaissons le taux de dépréciation, nous pouvons reconstruire la série à partir de l'équation (49). Pour le stock réel de biens durables, le taux de dépréciation implicite associé aux données en utilisant l'équation est de 5,37 % par trimestre ou 23,27 % annuellement. Ces valeurs sont similaires à celles obtenues par Dunn et Singleton (1986) et Yogo (2006) et les taux de dépréciation estimés par le BEA[16]. Nous utilisons la même approche pour le stock d'habitation. Les données de consommation trimestrielles sont obtenues à partir de la table NIPA sur les investissements en immobilisations privées où les investissements

[15] Methodology, Fixed Assets and Consumer Durable Goods in the United States, 1925-97, September 2003. Disponible à: http://www.bea.gov/national/pdf/Fixed_Assets_1925_97.pdf

[16] *BEA Depreciation estimates*, 2008. Disponible à: http://www.bea.gov/national/FA2004/Tablecandtext.pdf

privés en structures résidentielles sont disponibles. Pour le stock réel de biens d'habitation, le taux de dépréciation associé aux données est de 0,38 % par trimestre ou 1,53 % annuellement. Ce faible taux de dépréciation s'explique en partie par l'importance dans les structures résidentielles des habitations de un à quatre logements pour lesquelles le taux de dépréciation était de seulement 1,14 % en 2008 selon les estimations du BEA. Notons également que les dépenses en rénovations et autres améliorations sont comptabilisées dans cette série.

Les tables NIPA sur les dépenses personnelles de consommation sont également utilisées pour construire la série des biens non durables et des services excluant les services d'habitation. Cette consommation correspond au bien périssable dans le modèle. Le service d'habitation dans les tables NIPA est composé des dépenses en logement ainsi que du coût implicite de logement pour un propriétaire occupant. Les biens non durables sont utilisés comme numéraire et permettent d'obtenir les rendements réels, mais également les prix relatifs des autres biens. Finalement, les données de consommation sont divisées par quatre puisqu'elles sont présentées de façon annualisée dans les tables ainsi que par une estimation trimestrielle de la population pour obtenir des données par habitant.

Le tableau 2 présente également les statistiques des séries de consommation. La section du haut présente la moyenne en dollars réels enchaînés (année de base 2005) des données de consommation. Ces valeurs représentent la consommation réelle moyenne pour un individu ainsi que la valeur de ses stocks de biens durables et d'habitation. En moyenne, un agent représentatif dépense trimestriellement 433 $ en biens durables, 3 662 $ en biens non durables et services, 401 $ en investissement d'habitation, 791 en service d'habitation en plus de détenir un stock de biens durables d'une valeur de 6 564 $ et un stock de bien d'habitation d'une valeur de 38 568 $.

Pour illustrer de façon contemporaine le niveau de ces montants, au quatrième trimestre de 2005, un agent représentatif a dépensé pour 940 $ en biens durables, 5312 $ en biens non durables et services, 659 $ d'investissement en biens d'habitation et 1130 $ en services d'habitation. Il détenait également un stock de biens durables d'une valeur de 13 985 $ et un stock de biens d'habitation d'une valeur de 53 339 $[17].

La section inférieure du tableau 2 présente les taux de croissance trimestriels réels moyens des données de consommation. Les biens durables ont le taux de croissance le plus élevé à 1,04%, plus du double de la croissance des biens non durables et des services qui s'élève à 0,46% et du service d'habitation qui est de 0,54%. La croissance des investissements dans les biens d'habitations est de loin la plus basse à 0,03% mais, fait intéressant, possède l'écart-type le plus élevé à 4,76%. Les biens durables représentent le deuxième type de consommation le plus volatil avec un écart-type de 3,09% et le seul avec une autocorrélation négative. Les biens non durables et les services d'habitation

[17] Pour obtenir une base de comparaison pour ces dépenses, nous pouvons utiliser le revenu disponible par habitant en 2005 qui est d'environ 31500$. En additionnant les dépenses par habitant en 2005, nous obtenons environ 29 000 $; ce qui est, tel qu'attendu, inférieur au montant de revenu disponible puisque l'épargne n'est pas considérée.

représentent les types de consommation les moins variables avec un écart-type de seulement 0,54 % et 0,58 % respectivement.

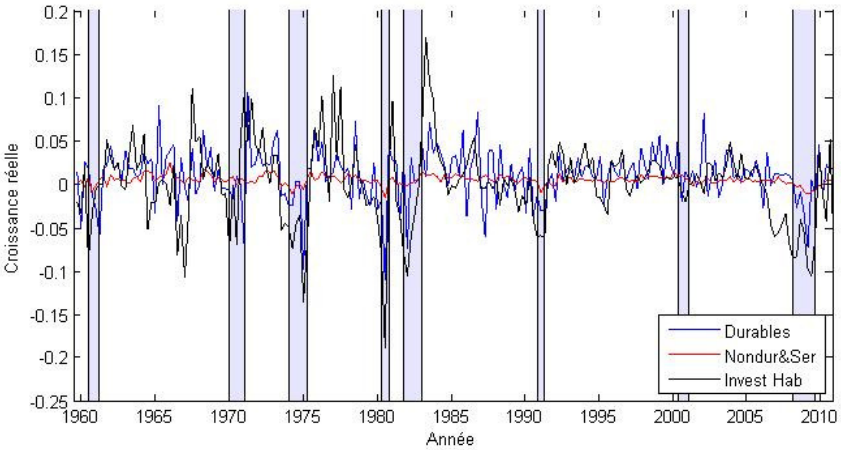
Tableau 2 : Statistiques descriptives des biens de consommation et des rendements

Statistiques Descriptives des Séries de Consommation et de Rendement												
Données de Consommation Trimestrielles Réelles Per Capita dollar enchaîné (2005) 1959-II à 2010-IV												
	Durables		Non durables&Services moins habitation			Investissement Habitation		Stock Durable		Stock Habitation		Service habitation
Moyenne	433		3662			401		6564		38568		791
Écart-Type	272		1057			97		4097		9618		234
Taux de Croissance et Rendement Trimestriel Réel 1959-II à 2010-IV (%)												
Séries	Moy	ÉT	Autocorrélation	Corrélation								
				D	NS-H	HI	SerH	SD	SH	PM	3MBT	M	SMB
Durables (D)	1,04	3,09	-6,83										
Nondur&Ser-hab (NS-H)	0,46	0,54	47,41	44,76									
Habitat Invest. (HI)	0,03	4,76	51,76	47,08	45,22								
Service habitation (SerH)	0,54	0,58	16,03	0,30	20,27	8,41							
Stock Durable (SD)	1,02	0,55	91,52	35,47	39,16	16,25	16,26						
Stock House (SH)	0,42	0,20	91,56	19,21	38,40	26,61	38,91	67,57					
Prime de Marché (PM)	1,39	8,63	6,55	3,38	22,95	16,62	-15,40	-8,16	-5,71				
Bond du Trésor 3 Mois (3MBT)	0,30	0,69	69,41	-0,87	4,83	-3,14	-13,31	-15,70	-22,71	0,09			
Marché (M)	1,69	8,66	7,38	3,30	23,26	16,31	-16,41	-9,38	-7,50	99,68	8,05		
SMB	-0,27	5,51	-1,26	15,51	13,68	17,23	-12,87	-1,75	-7,82	44,84	-2,85	44,47	
HML	0,24	5,84	12,30	14,57	0,50	10,10	3,25	8,62	7,77	-32,00	14,67	-30,73	-10,84

Les trois premières composantes de la consommation sont toutes corrélées à environ 45% mais moins corrélées avec les services d'habitation dont les valeurs varient entre 0,3% pour les biens durables et 24,27% pour les biens non durables. La croissance de l'investissement dans les biens d'habitation présente la plus forte corrélation avec le rendement du marché à 41,4% alors que les biens durables ont la plus faible corrélation à 24,24%. Les services d'habitation sont pour leur part corrélés négativement avec le rendement du marché. Le stock de biens durables croît de 1,02% par trimestre, plus du double de la croissance du stock d'habitation qui s'élève à 0,42%. Les deux séries de stocks sont peu volatils. Leur faible volatilité s'explique par l'importance relative des stocks par rapport à l'addition marginale aux stocks à chaque période. Finalement, les croissances des deux stocks sont faiblement corrélées avec le rendement du marché.

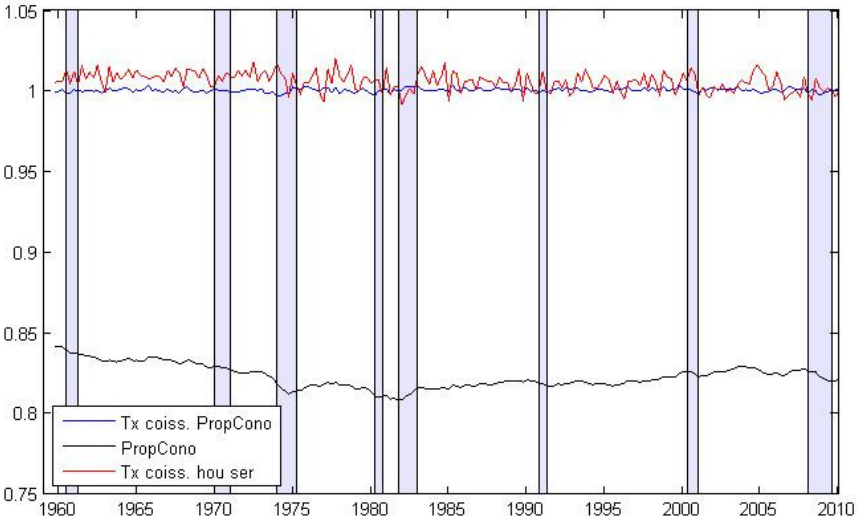
La figure 3 présente l'évolution du taux de croissance des trois premières catégories de consommation du troisième trimestre de 1959 au quatrième trimestre de 2010. Nous pouvons observer la volatilité plus importante de la croissance des biens durables et des biens d'habitation par rapport aux biens non durables. Les variations sont particulièrement importantes lors des récessions officielles du NBER. La croissance des biens durables et particulièrement celle des biens d'habitation semblent procycliques.

Figure 3 : Taux de croissance réel des types de consommation



La figure 4 présente pour sa part la croissance brute du service d'habitation, la proportion des biens non durables sur la consommation des biens non durables et du service d'habitation et son taux de croissance brute. Nous pouvons remarquer la faible volatilité des séries. Le taux de croissance brute des services d'habitation ne semble pas avoir d'orientation précise à travers les cycles économiques. La proportion de la consommation des biens non durables est faible et son taux de croissance près de zéro à -0,012% pour un écart-type de 0,13%. Piazzesi et al. (2008) obtiennent pour leur part une moyenne de -0,09% sur la période 1947 à 2001 pour un écart-type de 0,36%.

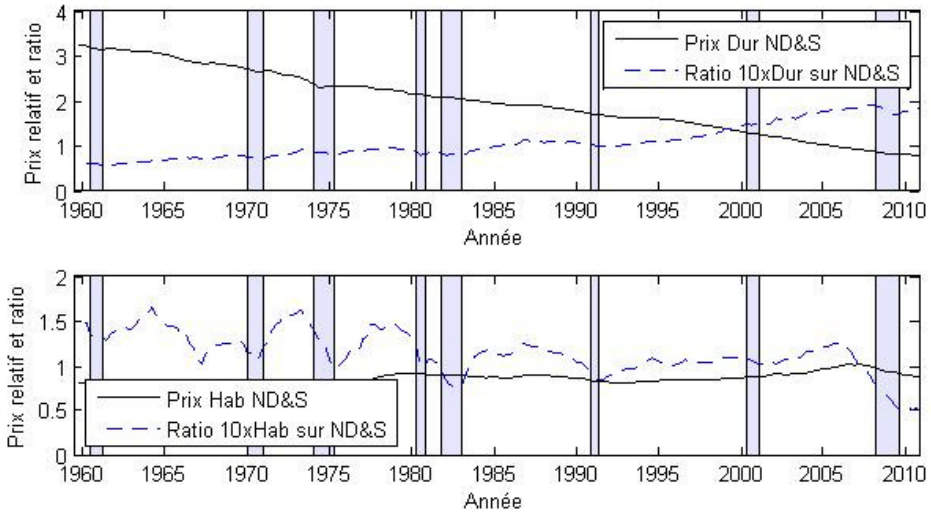
Figure 4 : Taux de croissance des Services d'habitation et de la proportion des biens non durables



Afin de mieux comprendre la dynamique entre les autres types de consommation dans le temps, la section du haut de la figure 5 présente la relation entre le prix relatif des biens durables et des biens non durables ainsi que le ratio des dépenses de consommation qui

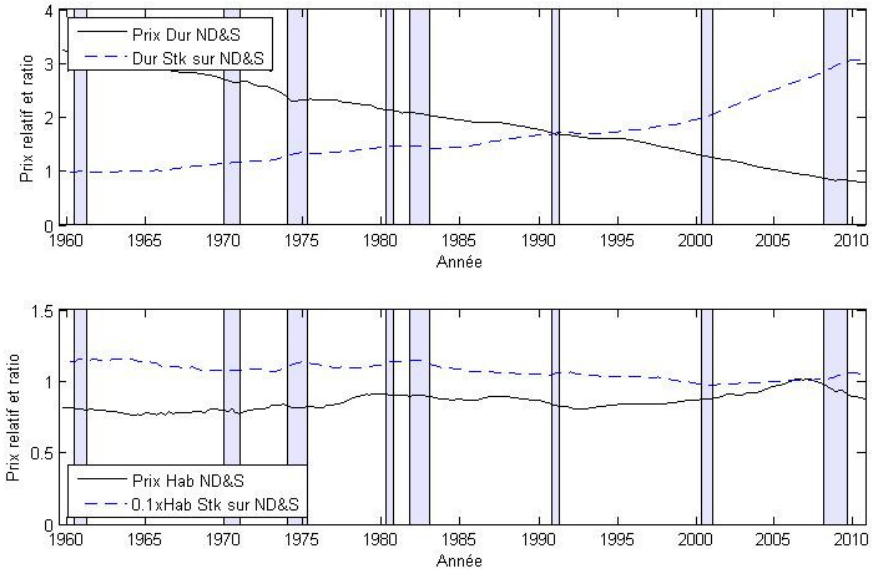
leur sont associées. La section du bas représente le même exercice avec les investissements en biens d'habitation.

Figure 5 : Prix et évolution relative des biens durables et d'habitation par rapport aux biens non durables



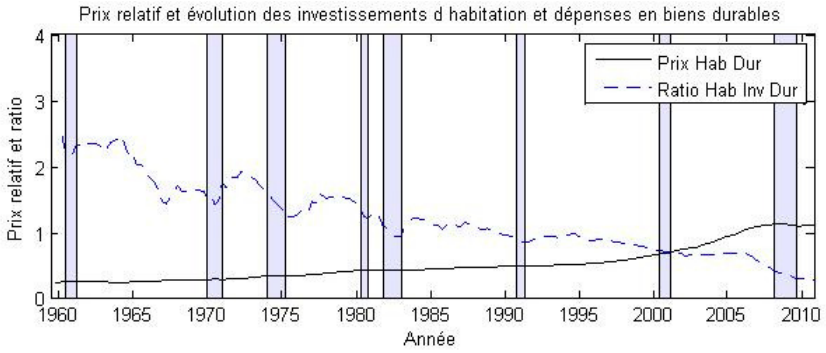
Nous pouvons observer que la proportion de biens durables a augmenté de façon soutenue à mesure que leur prix relatif diminuait. La proportion de biens durables consommés semble évoluer également selon les cycles économiques et tend à fléchir lors des récessions. Le prix relatif des biens d'habitation est relativement stable dans le temps. Nous pouvons cependant clairement observer une hausse du prix relatif de l'habitation lors de la bulle immobilière avant son déclin durant la crise financière. La proportion de biens d'habitation diminue légèrement dans le temps, mais de façon marquée lors des récessions et particulièrement lors de la crise financière où le marché immobilier s'est effondré. Le déclin des proportions de biens durables et d'habitation démontre que lorsque l'économie tombe en récession, les individus ajustent leur consommation en diminuant de façon plus marquée leurs achats de biens durables et d'habitation. Cela explique la stabilité de la consommation des biens non durables dans le temps. Les dépenses en biens durables et d'habitation absorbent davantage le choc sur la consommation globale engendré par une récession. La figure 6 l'évolution relative des prix et des stocks de biens durables et d'habitation. L'évolution est similaire à celle des dépenses de consommation qui leurs sont associées, mais est moins volatile. Le caractère cyclique des stocks des biens durables et d'habitation est moins évident que celui des dépenses de consommation qui leurs sont respectivement associés.

Figure 6 : Prix et évolutions des stocks des biens durables et d'habitation par rapport aux biens non durables



La figure 7 reprend l'exercice précédent, mais cette fois pour la relation entre les biens durables et d'habitation. Le prix relatif des biens d'habitation a augmenté de façon constante dans le temps pour s'accélérer lors de la bulle immobilière; ce qui a entraîné une baisse de la proportion des biens d'habitation par rapport aux biens durables. Cette diminution est accentuée lors des récessions; ce qui signifie que les dépenses de consommation en biens d'habitation diminuent davantage que celles sur les biens durables. L'évolution des différentes catégories de consommation laisse donc présager que la consommation des biens d'habitation est susceptible de représenter un risque de consommation considérable pour les individus et ainsi influencer leurs décisions d'investissement. L'évolution de la consommation des biens d'habitation reflète donc le faible taux de croissance et la forte volatilité observés au tableau 2.

Figure 7 : Prix et évolution relative des stocks des biens durables et d'habitation



Comme nous avons pu le constater à la section précédente, les différentes formes du facteur d'actualisation stochastique permettent l'utilisation de différentes procédures

d'estimation. L'estimation des modèles de tarification fondés sur la consommation ont traditionnellement été estimés par GMM depuis les travaux fondateurs de Hansen (1982) et Hansen et Singleton (1982). La procédure d'estimation par GMM ne nécessite pas d'hypothèses précises sur la distribution des rendements ou des données de consommation et peut être appliquée directement aux équations d'Euler des modèles de tarification avec un facteur d'actualisation stochastique linéaire ou encore non linéaire. La section suivante procède à l'estimation des modèles de tarification par GMM.

4.3. Estimation des modèles de tarification par la méthode des moments généralisée (GMM)

4.3.1. La méthode des moments généralisée

L'approche d'estimation GMM de Hansen (1982) est fondée sur les restrictions qu'impliquent différents moments associés à un modèle ou un problème. Les équations d'Euler d'un modèle de tarification posent des restrictions sur les rendements et leur prime de risque pouvant être utilisées dans le cadre d'une estimation par GMM. En définissant de façon générale, $g_t(\theta,X)$ un vecteur de N moments d'espérance nulle fonction du vecteur de paramètres θ de dimension K et de variables X_t ainsi qu'une matrice carrée Σ de pondérations de même dimension que le vecteur des moments, l'estimateur GMM est obtenu en minimisant la forme quadratique (85) par rapport aux paramètres.

(85) $$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \; g_T(\theta, X)' \Sigma \; g_T(\theta, X) \quad où \quad g_T(\theta, X) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} g_t(\theta, X)$$

La distribution asymptotique des moments ainsi que celle des paramètres sont normales. Les paramètres sont non biaisés et leur matrice de covariance est donnée par l'équation (86) où F est la matrice jacobienne des dérivées premières de l'espérance des moments évaluée à la valeur estimée des paramètres à l'équation (87) alors que Hansen (1982) suggère l'estimateur (88) pour la matrice S de covariance asymptotique des moments.

(86) $$Cov(\hat{\theta}) = \frac{1}{T}\left(F'\Sigma F\right)^{-1} F'\Sigma S \Sigma F \left(F'\Sigma F\right)^{-1}$$

(87) $$F = \left.\frac{\partial g_T(\theta, X)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}}$$

(88) $$S = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} g_t(\hat{\theta}, X)\, g_{t-j}(\hat{\theta}, X)'$$

L'estimateur des paramètres dépend donc des moments utilisés et de la matrice de pondération. Hansen (1982) démontre que le choix de la matrice de pondération optimale

S^{-1} permet d'obtenir l'estimateur non biaisé le plus efficient. L'expression de la matrice de covariance des paramètres est alors simplifiée et prend la forme (89).

$$(89) \qquad Cov(\theta^*) = \frac{1}{T}\left(F'S^{-1}F\right)^{-1}$$

L'estimateur (88) de la matrice S implique une somme infinie sur les retards des moments estimés. Pour opérationnaliser son estimation, les retards au-delà d'un certain seuil doivent être fixés à zéro. Le choix du seuil dépend du problème estimé. Par ailleurs, l'utilisation de la matrice S^{-1} pour la construction de la variance des paramètres implique des erreur-types robustes à l'hétéroscédasticité et à l'autocorrélation. La construction de la matrice S selon (88) ne garantit cependant pas que la matrice sera semi-définie positive; ce qui est problématique pour son inversion. Différentes extensions de l'estimateur (88) robuste à des formes arbitraires d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité (HAC) ont été développées afin d'obtenir une matrice semi-définie positive, dont la plus courante est celle de Newey et West (1987a) présentée à l'équation (90).

$$(90) \qquad S_{NW} = \sum_{j=-k}^{k}\left(\frac{k-|j|}{k}\right)\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} g_t(\hat{\theta}, X)\, g_{t-j}(\hat{\theta}, X)'$$

4.3.2. *J-test* et *D-test*

Lorsque le nombre de moments est supérieur au nombre de paramètres, le modèle est sur-identifié et les moments supplémentaires permettent de construire un test statistique sur l'adéquation globale du modèle. Hansen (1982) démontre que la statistique composée du produit du nombre d'observations et de la valeur de la fonction objective à l'optimum lorsque la matrice de pondérations optimale est utilisée a une distribution chi-carré χ^2 dont le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de moments moins le nombre de paramètres (*N-K*) (91). Ce test est couramment désigné comme le *J-test* de sur-identification de Hansen.

$$(91) \qquad JTest = T \min_{P} \; g_T(\theta^*, X)' S^{-1} g_T(\theta^*, X) \;\sim \chi^2_{(N-K)}$$

Si le modèle n'est pas rejeté par les données, la valeur minimisée de la fonction objective devrait être faible sous l'hypothèse *Ho* que le modèle est postulé adéquatement. Dans le contexte de l'évaluation de modèle de tarification, puisque la valeur minimisée de la fonction objective correspond à la somme des erreurs associées à chacun des moments, cette somme représente la somme des erreurs de tarification du modèle. Un modèle sera donc adéquat dans la mesure où ses erreurs de tarification sont faibles. Les erreurs associées aux moments des différents actifs permettent donc également d'évaluer la capacité du modèle à expliquer les différents types de rendements ou leur prime de risque. La statistique *J* (91) est très sensible à la spécification du modèle et l'estimation de l'inverse de la matrice *S* et peut indiquer qu'un modèle est adéquat même si l'effet sur la statistique *J* provient essentiellement d'une augmentation de la matrice *S* tel que souligné par Cochrane (2005, chap. 11). Par ailleurs, lorsque la matrice *S* est singulière

ou quasi-singulière, son inverse est susceptible d'être dégénéré et de présenter de grandes valeurs faisant exploser la statistique *J*. Cette situation est régulièrement rencontrée pour l'estimation des modèles de tarification où les actifs financiers utilisés sont généralement très corrélés. Un phénomène similaire se produit également lorsque le nombre de moments est important par rapport à la dimension temporelle.

La comparaison des statistiques *J* des modèles lorsque les modèles sont estimés sur des ensembles de moments différents ne permet pas d'évaluer la performance relative des modèles. Lorsque les modèles sont estimés sur le même ensemble de moments et qu'un modèle *i* est une version contrainte d'un modèle *j*, nous pouvons construire la statistique du *D-test* $J_i - J_j$ de Newey et West (1987b) en utilisant la matrice de pondérations du modèle *j*. La distribution du test est alors une chi-carré de rang égal au nombre de restrictions.

4.3.3. Le choix de la matrice de pondération initiale et la matrice efficiente

Puisque l'estimation efficiente des paramètres implique la matrice de pondération (88), l'estimateur efficient nécessite donc une première ronde d'évaluation pour obtenir une estimation consistante des paramètres à partir d'une matrice de pondération Σ prédéterminée pour obtenir une estimation non biaisée des paramètres. La procédure d'estimation efficiente s'effectue donc en au moins deux étapes.

Une matrice identité est fréquemment utilisée dans la première étape. L'estimateur construit à partir de la matrice identité accorde *a priori* un poids identique à chacun des moments dans la fonction objective (85). Cependant, les conditions de premier ordre de la fonction objective (92) impliquent que les moments pour lesquels le gradient est plus sensible au paramètre obtiendront un poids supérieur dans la procédure d'estimation. Une surpondération d'un moment peut également provenir de l'ordre de grandeur des valeurs des moments tel que souligné par Cochrane (2005, chap. 11). L'unité de mesure des moments et la valeur de leur gradient sont susceptibles d'avoir un impact important sur les résultats dans une estimation GMM en une étape et en particulier lorsqu'une matrice identité est utilisée.

(92) $$2F'\Sigma g_T = 0$$

L'estimateur GMM efficient est obtenu dans la seconde étape à travers la structure de pondérations de l'inverse de la matrice de covariance des moments S^{-1} où les moments ayant une plus faible variance obtiennent alors un poids plus important dans l'estimateur. Puisque les deux estimateurs sont non biaisés, les paramètres estimés aux deux étapes devraient être similaires. Lorsqu'une différence importante subsiste entre les deux étapes, les pondérations associées aux moments ont été substantiellement modifiées par la matrice optimale lors de la seconde étape. Les rendements analysés correspondent alors à des portefeuilles composés de positions longues et courtes extrêmes des actifs initiaux. L'interprétation économique des moments analysés peut par conséquent être considérablement modifiée. Lorsque les paramètres sont modifiés entre la première et la seconde étape, la matrice de covariance conserve alors la forme (86) et le *J-test* doit être

construit à partir de la formulation (93) pour une matrice de pondération arbitraire Σ où la matrice H est la matrice de covariance de la distribution d'échantillonnage des moments et prend la forme (94) tel que démontré par Hansen (1982) où I est une matrice identité de dimension N. La différence entre les paramètres évalués à la première et la seconde étape affecte également la matrice de covariances des paramètres (89) de la seconde étape qui conserve alors l'expression (86).

(93) $$JTest = T\ g_t(\hat{\theta}, X\ )' H^{-1} g_t(\hat{\theta}, X\ )\ \sim \chi^2_{(N-K)}$$

(94) $$H = (I - F(F'\Sigma F)^{-1} F'\Sigma) S (I - F(F'\Sigma F)^{-1} F'\Sigma)'$$

La matrice H est de rang N-K; ce qui caractérise le nombre de degré de liberté de la distribution chi-carré du *J-test* lorsqu'une matrice de pondération arbitraire est utilisée, comme par exemple pour l'estimateur GMM en une étape avec la matrice identité. Puisque la matrice H est singulière, une approche d'inversion généralisée ou pseudo-inversion doit être employée pour former le *J-test* associé à la matrice (94).

Une approche d'inversion générale consiste à effectuer une décomposition spectrale ou en valeurs propres (95) où Λ est la matrice diagonale des valeurs propres ordonnées et Q la matrice correspondante des vecteurs propres[18]. L'inverse (96) de la matrice H est alors obtenue en inversant les valeurs propres et l'inverse généralisée en inversant seulement les valeurs propres différentes de zéro. Lorsqu'un seuil sur les valeurs propres à inverser est fixé et que les valeurs propres inférieures ou égales sont tronquées à zéro, nous obtenons l'inverse généralisé de Moore (1920) et Penrose (1955).

(95) $$H = Q\Lambda Q'$$

(96) $$H^{-1} = Q\Lambda^{-1} Q'$$

Différentes approches d'inversion fondées sur la relation (96). Dufour et Valéry (2011) utilisent cette décomposition et développent une approche d'inversion dite régularisée où les valeurs propres inférieures à un seuil sont régularisées à une certaine valeur. L'inverse régularisé de Dufour et Valéry (2011) permet ainsi d'obtenir une matrice pseudo-inverse de rang complet contrairement à l'approche Moore-Penrose.

4.3.4. Distance de Hansen et Jagannathan

Hansen et Jagannathan (1997) développent une mesure permettant d'évaluer à quel degré un modèle est énoncé incorrectement. Leur mesure correspond à la distance minimale entre le facteur d'actualisation stochastique du modèle et l'espace des facteurs d'actualisation stochastique valides pour un ensemble d'actifs. La distance de Hansen-Jagannathan (ci-après DHJ) généralement notée δ peut être alternativement définie selon le problème (97) équivalent au problème initial où y_{t+1} est un facteur d'actualisation

[18] Pour une matrice carré, la décomposition singulière de la matrice $H=K\ \Lambda\ Q'$ où K est une matrice orthonormale à H et Q une matrice de telle sorte que $Q'\ Q = I$ est équivalente et généralement plus stable numériquement.

stochastique quelconque, λ le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associé à la contrainte de tarification usuelle (98) pour un facteur d'actualisation valide, x_{t+1} le vecteur des paiements des actifs et p_t leur vecteur des prix. Le modèle sera mal énoncé lorsque pour tout ensemble de paramètres y_{t+1} n'appartient pas à l'espace des facteurs d'actualisation stochastique valides. Hansen et Jagannathan (1997) démontrent également que le problème (97) peut être reformulé dans le cadre d'analyse GMM selon l'équation (99) en utilisant comme matrice de pondération l'inverse de la matrice des seconds moments Ω des paiements des actifs.

(97) $$\delta^2 = \min_{\theta} \max_{\lambda} \; E[y_{t+1,\theta}^2 - (y_{t+1,\theta} - \lambda' x_{t+1})^2 - 2\lambda' p_t]$$

(98) $$E[M_{t+1} x_{t+1}] = p_t$$

(99) $$\delta^2 = \min_{\theta} \; g_T(\theta, X)' \Omega^{-1} g_T(\theta, X)$$

L'un des avantages de la matrice inverse des seconds moments des paiements comme matrice de pondération est que la fonction objective (99) n'est pas modifiée par le choix initial des actifs utilisés pour l'estimation d'un ensemble d'actifs donnés, ce qui n'est pas le cas pour la matrice identité. De plus, puisque l'estimation est effectuée en une étape, les problèmes associés à l'utilisation de l'inverse de la matrice S ne se posent plus.. Cependant, puisque l'inverse de la matrice des seconds moments des paiements est utilisé, les problèmes associés à l'inversion d'une matrice quasi-singulière demeurent entiers et susceptibles d'être importants à mesure que le nombre d'actifs utilisés augmente.

4.3.5. Tests statistiques sur la distance de Hansen et Jagannathan

Hansen *et al.* (1995) démontrent que sous l'hypothèse *Ho* que la DHJ est différente de zéro et donc que le modèle est considéré d'emblée comme un modèle énoncé incorrectement, que δ converge vers une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance $V/4\delta^2$ où V est la matrice de covariances du terme sur lequel l'espérance est évaluée dans la formulation (97) du problème.

Jagannathan et Wang (1996) étendent le résultat précédant pour l'hypothèse *Ho* que la DHJ est nulle et que le modèle est bien énoncé. Ils démontrent que la statistique $T\delta^2$ suit alors une distribution non standard $F_{N-K}(\nu)$ construite à partir d'une somme pondérée de variables chi-carré avec un degré de liberté selon l'équation (100) où ν_i représente les valeurs propres de la matrice Ψ définie à l'équation (101) et $S^{1/2}$ et $\Omega^{1/2}$ sont les matrices triangulaires supérieures de la décomposition de Cholesky des matrices S et Ω. Bien que la distribution soit non standard, elle peut être construite par simulation où les valeurs critiques simulées sont ensuite obtenues à partir des quantiles de la distribution simulée.

(100) $$\sum_{i=1}^{N-K} \nu_i u_i \quad où\ u \sim \chi^2_{(1)}$$

(101) $$\Psi = S^{1/2}\Omega^{-1/2}(I-(\Omega^{-1/2})'F(F'\Omega^{-1}F)^{-1}F'\Omega^{-1/2})(\Omega^{-1/2})'(S^{1/2})'$$

Gospodinov *et al.* (2013) développent un test LM d'adéquation des modèles pour l'hypothèse *Ho* que la DHJ est nulle à partir de l'estimation des multiplicateurs de Lagrange de la formulation (97) du problème. Ils démontrent que la statistique du test (102) est distribuée asymptotiquement selon une loi chi-carré avec N-K degrés de liberté où U est une matrice orthogonale à $(\Omega^{1/2} F)$. Gospodinov *et al.* (2013) présentent une analyse par simulation de la puissance du test LM et remarquent qu'elle est de façon générale supérieure au test de Jagannathan et Wang (1996). L'estimateur de λ est obtenu directement par le résultat de l'estimation par GMM (99) pour la DHJ à partir de la relation (103).

(102) $$LM_{\lambda} = T\hat{\lambda}'\Omega^{1/2}U(U\Omega^{-1/2}S\Omega^{-1/2}U)^{-1}U\Omega^{1/2}\hat{\lambda}'$$

(103) $$\hat{\lambda} = \Omega^{-1}g(\hat{\theta}, X)$$

Gospodinov *et al.* (2013) définissent également différents tests statistiques pour comparer les modèles à partir de la différence de leurs DHJ. Dans le cas où un modèle *i* peut être exprimé à partir d'un ensemble de restrictions paramétriques sur un modèle *j*, le modèle *i* est alors emboîté dans le modèle *j* et la statistique de test (104) suit une distribution statistique $F_{kj\text{-}ki}(\nu)$ dont la matrice à laquelle les valeurs propres sont associées est présentée à l'annexe D.

(104) $$T(\delta_i^2 - \delta_j^2) \sim F_{kj-ki}(\nu)$$

Ce test statistique pour les modèles emboîtés peut être comparé à un test de Wald avec K_j-K_i restrictions sur le modèle *j*. Cependant, contrairement au test de Wald, il n'est pas sensible au choix de la représentation des paramètres et des contraintes. Le modèle non contraint devrait avoir une valeur de la DHJ inférieure au modèle contraint. Le test permet de déterminer si la différence est statistiquement significative. Finalement lorsque les modèles sont mal énoncés, Gospodinov *et al.* (2013) démontre que la matrice de la covariance des paramètres est alors donnée par une expression complexe présentée à l'annexe D mais regroupant plusieurs éléments de la formulation usuelle (86).

4.4. Estimation inconditionnelle des modèles linéaires factoriels

La faible performance empirique du CCAPM avec la consommation des biens non durables et les services ne devrait pas être associée à un échec théorique identifiant la consommation comme une source de risque importante pour les décisions d'investissement des individus. Tel que discuté jusqu'à maintenant, une partie du risque de consommation semble associée à la consommation des biens durables, la consommation des biens d'habitation et potentiellement de la façon dont leur consommation est globalement structurée. Tel que discuté à la section 3.3.2, les modèles de tarification fondés sur la consommation peuvent être représentés par un modèle à

facteurs à partir d'une linéarisation de leur facteur d'actualisation stochastique à partir des équations (79) à (84).

La complexité et la non-linéarité des facteurs d'actualisation stochastique avec plusieurs biens de consommation et une utilité EZW nécessitent différentes hypothèses pour parvenir à établir une représentation en facteurs. Cette complexité se répercute également au niveau de l'estimation directe des équations d'Euler où la forme non linéaire des facteurs d'actualisation stochastique est utilisée.

L'estimation des modèles à facteurs est plus directe, mais ne reflète pas complètement la complexité des facteurs d'actualisation stochastique et le risque de composition de la consommation. Nous débutons l'estimation par GMM des modèles par leur représentation linéaire en L facteurs de risques ou plutôt de leur covariance avec les rendements. Les moments sont ainsi construits à partir de l'équation (105) pour chaque t sur N rendements excédentaires d'actifs $R^e_{i,t}$ et L moyennes μ_f des facteurs f_t à l'équation (106) où q est le vecteur de coefficients de dimension L. Nous obtenons donc $N+L$ moments pour 2xL paramètres (q, μ_f) à estimer. Nous utilisons comme matrice de pondération initiale Σ suggérée par Yogo (2006) et présentée à l'équation (107) où $\hat{W}_{ff}^{-1}$ est un estimateur de la matrice de covariances des facteurs. La matrice Σ donne un poids équivalent aux N moments des actifs.

(105) $$R^e_{i,t} - R^e_{i,t}(f_t - \mu_f)'q$$

(106) $$(f_t - \mu_f)$$

(107) $$\Sigma = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \hat{W}_{ff}^{-1} \end{bmatrix}_{N+L}$$

L'estimation est effectuée pour les rendements d'actifs des 25 portefeuilles Fama-French décrits précédemment sur la période 1960-2010. Il reste donc 25-L moments pour tester les modèles. La dérivation en modèles factoriels des modèles non linéaires considérés et la relation entre les paramètres de leur formulation non linéaire et les coefficients sont présentées à l'annexe E. La matrice de pondération optimale S est obtenue à partir de l'estimateur de Newey et West (1987a) présenté à l'équation (90) avec un retard pour tenir compte de l'autocorrélation potentielle lors de l'agrégation des données économiques trimestrielles soulevée par Heaton (1995) bien qu'en principe les erreurs de tarification devraient être orthogonales par rapport à l'ensemble d'information au temps t.

Le tableau 3 présente les résultats obtenus. La section inférieure du tableau présente la moyenne de la valeur absolue des erreurs de tarification (MAE) du modèle, le *J-test* ainsi que la probabilité que le modèle ait généré des erreurs de tarification de cet ordre sous l'hypothèse *Ho* que le modèle est adéquat; c'est-à-dire la *p-value* du *J-test*.

Tableau 3 : Estimation inconditionnelle des modèles factoriels

Évaluation inconditionnelle des modèles factoriels par GMM en deux éapes avec les 25 portefeuilles de Fama et French (1992, 1992) de 1960 à 2010 segmentés selon le ratio de la valeur au livre sur la valeur marchande (HML) et la taille (SMB). Les résultats sont présentés pour un retards de l'erreur-type HAC de Newy-West (1987a). Les erreur-types sont présentées en caractères gras losrqu'elles sont associées à une statistique t significative à au moins 5% pour le paramètre. MAE est la moyenne de la valeur absolue des erreurs de tarification des modèles. Le J-Test et sa *p-value* sont présentés aux dernières lignes du tabeau.

Coefficients et Paramères	CAPM	Fama-French	CCAPM	EZW	Piazzesi et *al*. (2007)	Yogo	Fillat (2008)	Stock d'Habitation	SCAPM
Marché	1,960	4,189		1,000		0,995	0,997	0,995	0,995
	0,874	2,247		1,015		1,168	1,157	1,105	1,180
SMB		4,266							
		1,379							
HML		4,540							
		1,540							
Non Durable			101,942	40,633	101,934	18,656	33,888	50,310	18,655
			32,646	36,614	60,132	39,507	51,999	36,959	39,511
Durable						26,806			26,801
						55,01			59,88
Habitation								0,005	0,003
								104,537	110,294
Part de consommation					-0,327		0,000		
					222,781		233,34		
γ			101,94	41,63	101,93	46,46	34,88	51,31	46,45
			32,646	36,152	60,132	57,279	52,096	106,22	103,53
ρ				0,0000	0,0098	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
				0,0250	0,0058	0,0257	0,0342	0,0220	0,0260
ε					0,007		0,000		
					2,181		6,868		
ω						0,590		0,0001	0,0001
						0,802		2,08	4,11
η									0,59
									1,11
MAE	0,0062	0,0037	0,0051	0,0050	0,0051	0,0048	0,0051	0,0050	0,0546
J-Test	45,81	0,45	38,53	29,32	38,53	21,22	28,15	28,86	21,22
p-value	0,005	**0,166**	0,031	**0,170**	0,022	**0,507**	**0,171**	**0,149**	**0,446**

Les résultats obtenus pour le CAPM, le CCAPM, le modèle à trois facteurs de Fama et French ainsi que le modèle EZW sont typiques. Les coefficients des facteurs pour ces modèles sont bien estimés et le CCAPM implique un coefficient d'aversion au risque de 101,94. Les deux premiers modèles sont rejetés alors que la statistique *J* du modèle de Fama et French est supérieure au seuil de 5% et le modèle n'est pas rejeté. Il présente également la plus faible MAE à 0,37% pour l'ensemble des modèles. Le modèle EZW n'est également pas rejeté par la *J-stat* et présente un coefficient d'aversion au risque inférieur au CCAPM mais non significatif de même qu'une ESI très faible et également non significative. Le HCAPM de Piazzesi *et al.* (2007) est pour sa part rejeté par les données avec une *p-value* élevée de 0,02. Le coefficient sur le facteur de la proportion de consommation des biens non durables est négatif mais présente une erreur-type très élevée tout comme pour le modèle de Fillat (2008) qui n'est cependant pas rejeté. Le coefficient d'aversion au risque est inférieur à celui du modèle de Piazzesi *et al.* (2007) mais non significatif. Les ESA pour ces deux modèles sont également faibles et présentent des erreur-types relativement importantes. Le modèle avec stock d'habitation présente pour sa part des résultats similaires à ceux de Fillat (2008) et est également non rejeté. Le coefficient de pondération ω de la fonction d'utilité intratemporelle CES est à sa borne inférieure et non significatif. Les MAE de ces trois modèles où le risque de la consommation des biens d'habitation est important sont similaires à 0,05%.

Le modèle de Yogo (2006) avec la consommation des biens durables est le modèle présentant la statistique *J* la plus faible à 21,22. Le modèle implique un coefficient d'aversion au risque de 46,46 et une ESI faible mais les deux paramètres sont non

significatifs. Le coefficient de pondération est pour sa part de 0,59 mais avec une erreur-type de 0,8. Le coefficient de pondération et l'ESA ne peuvent être identifiés simultanément dans l'approximation linéaire effectuée du modèle pour une valeur de l'ESA de un et donc une fonction d'utilité intratemporelle CD tel que discuté dans l'annexe E. La valeur de l'ESA utilisée pour le calcul est de 0,82; soit la valeur estimée à partir de la relation de cointégration théorique entre le prix du bien durable et son coût d'utilisation périodique présentée à la section suivante. Cette valeur remet en question la validité de l'approximation et par conséquent l'impact du risque de composition dans le cadre de modèles linéaires pour cette classe de modèles. Cette restriction s'applique également pour le modèle équivalent au modèle de Yogo (2006) pour le stock de biens d'habitation où l'ESA est posée à 0,38.

L'approximation linéaire du modèle avec consommation structurée implique les hypothèses les plus importantes alors que l'approximation est effectuée autour d'une valeur unitaire pour l'élasticité de substitution de la fonction de production domestique CES sur les stocks de biens durables et d'habitation ainsi que pour l'ESA dans la fonction d'utilité intratemporelle CES. L'approximation implique donc deux fonctions CD emboîtées plutôt que deux fonctions CES; ce qui limite la complexité potentielle du risque de composition tel que mentionné précédemment. L'estimation du modèle factoriel associé au modèle avec consommation structurée présente des résultats similaires à ceux obtenus pour le modèle avec le stock d'habitation uniquement. Ce résultat s'explique par l'atteinte de la borne inférieure du paramètre de pondération ω de la fonction d'utilité intratemporelle CD qui exclut alors le stock de biens d'habitation et de biens durables pour ces modèles. Ces modèles convergent donc vers le modèle EZW ou même le CCAPM en considérant que l'imprécision des paramètres ne permet pas de rejeter l'égalité entre le coefficient d'aversion au risque et l'inverse de l'ESI. L'ESA utilisée pour l'estimation du modèle avec consommation structurée est posée pour sa part à 0,35.

Les résultats de l'estimation des modèles factoriels pour les modèles présentant différentes forme de risque de composition de la consommation semblent à première vue mitigés. La plupart d'entre eux ne sont pas rejetés par le *J-test* similairement au modèle de Fama-French dont la performance est bien établie. Cependant, en considérant l'estimation des coefficients sur les termes de covariance, les statistiques *J* observées sont davantage associées à une variabilité excessive de la matrice de pondération dont l'inverse abaisse substantiellement la statistique *J* associée à la valeur optimale de la fonction objective (91). Par ailleurs, les résultats de l'estimation des coefficients associés aux différents risques de consommation est révélatrice. L'imprécision de l'estimation des paramètres est reliée au fait que les termes de covariance ne permettent d'expliquer la variation des primes de risque des 25 portefeuilles de Fama-French. Ils ressortent donc non significatifs lors de l'estimation et rendent également la prime de risque de marché et la croissance des biens non durables non significatives lors de l'estimation.

Ces résultats pour le risque de composition doivent cependant être considérés à la lumière des contraintes que les modèles linéaires appliquent sur les facteurs d'actualisation stochastique non linéaires. Par ailleurs, bien que les résultats au niveau des coefficients d'aversion au risque semblent refléter l'énigme de la prime de risque, l'estimation des modèles factoriels ne permet cependant pas d'identifier le coefficient d'actualisation

subjectif et donc de vérifier la performance des modèles par rapport à l'énigme du taux sans risque.

Avant de procéder à l'estimation des modèles sous leur forme non linéaire, la section suivante exploite une approche d'estimation des paramètres des fonctions d'utilité intratemporelles et des fonctions de production domestique développée par Ogaki et Park (1998) qui se fonde sur les relations de cointégration théoriques entre un stock de biens durables et son coût d'utilisation périodique.

4.5. Relation de cointégration entre les données de consommation

Certaines des données de consommation décrites à la section 4.3 semblent parfois évoluer conjointement au fil du temps et des cycles économiques. Des relations d'équilibre de long terme apparaissent ainsi unir certaines variables à travers une relation économique fondamentale. Par exemple, le coût d'acquisition d'un bien durable est susceptible d'influencer son coût périodique d'utilisation présenté aux équations (72) et (73) dans le cas des biens d'habitation et des biens durables pour le modèle avec consommation structurée. Lorsqu'une combinaison de deux variables non stationnaires est stationnaire, elles sont alors dites cointégrées. Ogaki et Park (1998) développent une approche d'estimation de paramètres de préférence à partir de relations de cointégration alors qu'Ogaki et Reinhart (1998) utilisent cette approche pour estimer un modèle de tarification avec biens non durables et durables tel que discuté à la section 2.3.

4.5.1. Relation de cointégration pour les modèles avec biens d'habitation ou durables

Si le prix d'un bien durable est effectivement relié à son coût périodique d'utilisation; par exemple la location d'une voiture, d'un logement, etc., alors le rapport entre le coût d'utilisation et le coût d'acquisition sera stationnaire. Pour un modèle avec bien d'habitation tel que le modèle avec stock d'habitation, le modèle de Piazzesi *et al*. (2007) ou de Fillat (2008), nous pouvons écrire à partir de l'équation du coût d'utilisation du bien d'habitation l'équation (108). Alternativement, dans le cas d'un modèle avec biens durables, comme pour le modèle de Yogo (2006), nous obtenons alors l'équation (109). Les coûts d'utilisation périodique des biens pour ces modèle sont respectivement désignés par $Q_{H,t}$ et $Q_{D,t.}$.

(108) $$\frac{u_{H_t}}{u_{C_t}} P_{h,t}^{-1} = 1-(1-\alpha)E_t\left[M_{t+1}\frac{P_{h,t+1}}{P_{h,t}}\right] = \frac{Q_{H,t}}{P_{h,t}}$$

(109) $$\frac{u_{D_t}}{u_{C_t}} P_{d,t}^{-1} = 1-(1-\delta)E_t\left[M_{t+1}\frac{P_{d,t+1}}{P_{d,t}}\right] = \frac{Q_{D,t}}{P_{d,t}}$$

Les coûts d'utilisation périodique des biens durables et d'habitation dans le cadre des modèles sont de, façon générale, non observables. Les termes de gauche des équations

(108) et (109) représentent respectivement le rapport de l'utilité marginale du bien d'habitation et du bien durable sur l'utilité marginale du bien non durable multiplié par l'inverse du rapport de leur prix. Cette relation est caractéristique d'une solution optimum au problème de l'agent; c'est-à-dire un état d'équilibre où le rapport de l'utilité marginale des biens est égal au rapport de leurs prix. En substituant les dérivées pour les termes associés à l'utilité intratemporelle, nous obtenons les équations (110) et (111) qui seront stationnaires dans la mesure où le coût d'utilisation d'un bien est effectivement relié à son coût d'acquisition.

(110) $$\frac{u_{H_t}}{u_{C_t}} P_{h,t}^{-1} = P_{h,t}^{-1} \frac{w}{1-w} \left(\frac{C_t}{H_t} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

(111) $$\frac{u_{D_t}}{u_{C_t}} P_{d,t}^{-1} = P_{d,t}^{-1} \frac{w}{1-w} \left(\frac{C_t}{D_t} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

En prenant le logarithme des expressions (110) et (111) et en réarrangeant les termes, nous obtenons les équations (112) et (113) où une variable en lettre minuscule représente le logarithme naturel de la variable et où $u_{h,t}$ et $u_{d,t}$ sont respectivement des termes d'erreur stationnaires d'espérance nulle. Ces équations permettent d'établir la relation de cointégration entre la différence du bien non durable et du bien d'habitation (ou durable) et le prix de ce dernier. L'ESA associée à ces modèles peut alors être obtenue en régressant en niveau la différence du logarithme du bien non durable et le type de bien considéré sur le logarithme du prix de ce bien. Les deux séries sont ainsi cointégrées et le vecteur de cointégration est [1, -ε] dans les deux cas.

(112) $$(c_t - h_t) = cons. + \varepsilon p_{h,t} + u_{h,t}$$

(113) $$(c_t - d_t) = cons + \varepsilon p_{d,t} + u_{d,t}$$

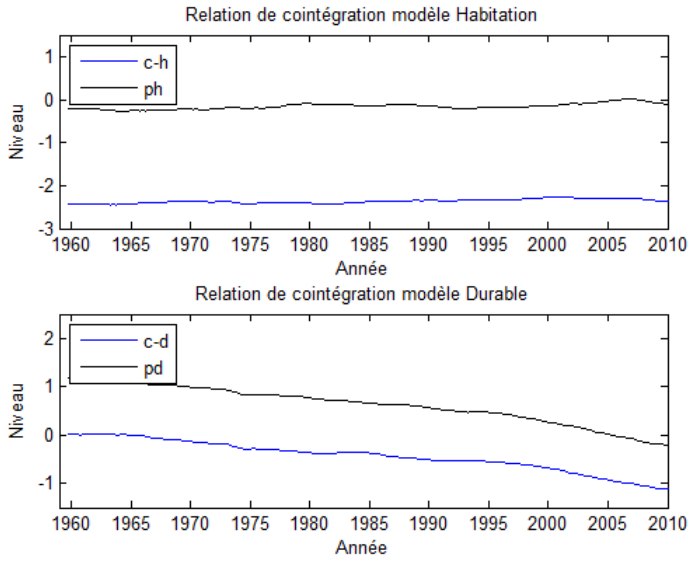
La section du haut de la de la figure 7 présente la série de la différence entre le bien non durable et le bien d'habitation ainsi que le prix de ce dernier. Les deux séries et leur écart sont relativement stables sur la période 1960 à 2010. La section du bas présente les séries équivalentes dans le cas du bien durable. Les deux séries présentent une tendance baissière sur la période mais leur écart demeure relativement stable. La baisse du bien non durable par rapport au bien durable suit la baisse du prix relatif du bien durable sur la période tel qu'observé précédemment à la figure 5.

Le tableau 4 présente les résultats du test de racine unitaire de Dickey-Fuller augmenté pour évaluer la stationnarité des séries du modèle avec bien d'habitation. Suite à l'analyse de la figure 8, nous optons dans le cas de la série de la différence ainsi que pour le logarithme du prix de bien d'habitation pour un modèle autorégressif stationnaire sans constante et j retards en différence tel que décrit à l'équation (114) pour une série générique y_t et ses différences Δy_{t-j}. Nous utilisons les critères d'information d'Aikaike

(ci-après AIC) et Bayésien (ci-après BIC) pour identifier le nombre de retards appropriés[19].

(114) $$y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \Delta y_{t-j} + u_t \quad où \quad \rho < 1$$

Figure 8 : Biens d'habitation, biens durables et leurs prix



La valeur critique à un niveau de confiance de 5% du test de Dickey-Fuller est d'environ -1.94 pour l'ensemble des retards. La valeur des critères AIC et BIC indiquent respectivement au maximum deux et zéro retard pour les deux séries. Les valeurs correspondantes du test statistique sont supérieures à la valeur critique et nous ne pouvons donc pas rejeter l'hypothèse nulle que les deux séries suivent un processus autorégressif avec une racine unitaire. Nous concluons donc qu'elles sont non stationnaires[20].

Tableau 4 : Test de stationnarité des séries pour le modèle avec biens durables

Variables		0 retard	1 retard	2 retards	3 retards	4 retards
	ADF stats	-1,21	-1,54	-1,55	-2,02	-1,91
c-h	AIC	-1572,20	**-1600,03**	-1592,68	-1596,35	-1586,57
	BIC	-1565,57	**-1590,11**	-1579,47	-1579,86	-1566,81
	ADF stats	-1,02	-1,14	-1,47	-1,55	-2,00
ph	AIC	**-1330,81**	-1323,69	-1330,00	-1321,09	-1324,36
	BIC	**-1324,18**	-1313,76	-1316,79	-1304,60	-1304,60

Test de racine unitaire de Dickey-Fuller augmenté pour 0 à 4 retards. La valeur critique à un niveau de confiance est de 5% et près de -1,94 pour tous les retards. Le modèle sous Ho suit un processus autorégressif avec racine unitaire et *p* retards en différence. Le modèle estimé est un modèle autorégressif stationnaire sans constante et *p* retards en différence. Le test est effectué jusqu'à 4 retards des différences. La valeur des critères d'information AIC et BIC indiquent 1 retard pour la série *c-h* et 0 retard pour *ph* (test Dickey-Fuller régulier).

[19] AIC = -2LLF+2(nombre de paramètres) où LLF est la valeur de la fonction de log-vraisemblance
BIC = -2LLF+(nombre de paramètres)+log(nombre d'observations)

[20] Les conclusions sont inchangées pour un modèle alternatif autorégressif avec constante.

Dans le cas de la série de différence entre le bien non durable et le bien durable et le prix de ce dernier, nous posons comme modèle alternatif un modèle autorégressif stationnaire avec tendance et *j* retards en différence tel que présenté à l'équation (115). Le tableau 5 présente les résultats. La valeur des critères d'information AIC et le critère d'information BIC indiquent au maximum respectivement trois et un retard. Les valeurs critiques du test à 5% sont de l'ordre de -3,43 pour tous les retards. L'hypothèse nulle d'une racine unitaire ne peut être rejetée et nous concluons que les deux séries sont également non stationnaires.

(115) $$y_t = cons. + \delta t + \rho y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \Delta y_{t-j} + u_t \quad où \quad \rho < 1$$

Tableau 5 : Test de stationnarité des séries pour le modèle avec biens durables

Variables		0 retard	1 retard	2 retards	3 retards	4 retards
	ADF stats	0,58	-0,65	-0,94	-1,67	-1,50
c-d	AIC	-1515,09	-1575,14	-1570,80	**-1575,48**	-1565,23
	BIC	-1505,15	**-1561,91**	-1554,29	-1555,69	-1542,18
	ADF stats	1,57	0,36	0,45	0,42	0,18
pd	AIC	-1503,14	**-1530,04**	-1519,70	-1510,00	-1500,91
	BIC	-1493,20	**-1516,81**	-1503,18	-1490,21	-1477,86

Test de racine unitaire de Dickey-Fuller augmenté pour 0 à 4 retards. La valeur critique à un niveau de confiance de 5% est près de -3,43 pour tous les retards. Le modèle sous Ho suit un processus autorégressif avec racine unitaire, une constante et p retard en différence. Le modèle estimé est un modèle autorégressif stationnaire avec une tendance, une constante et p retard en différence. Le test est effectué jusqu'à 4 retards des différences. La valeur des critères d'information AIC et BIC indiquent au maximum 3 retards.

Puisque les séries sont individuellement non stationnaires, nous pouvons maintenant évaluer leur relation de cointégration. Nous utilisons l'approche par régression dynamique de Saikkonen (1991) et Stock et Watson (1993). Nous formulons ainsi les équations (112) et (113) à partir des régressions présentées aux équations (116) et (117) où des termes de différence avancés et retardés pour une à quatre périodes sur les régresseurs sont ajoutés. Le test de cointégration est effectué à partir d'un test de Dickey-Fuller augmenté sur les résidus $u_{h,t}$ et $u_{d,t}$ de ces régressions. Si la relation de cointégration est vérifiée pour un modèle, les résidus de la régression seront stationnaires.

(116) $$c_t - h_t = cons. + \varepsilon(ph_t) + \sum_{j=-4}^{4} b_{ph,j} \Delta ph_{t-j} + \mu_{h,t}$$

(117) $$c_t - d_t = cons. + \varepsilon(pd_t) + \sum_{j=-4}^{4} b_{pd,j} \Delta ph_{t-j} + \mu_{d,t}$$

Le tableau 6 présente les résultats pour le test de Dickey-Fuller augmenté de racine unitaire sur les résidus des équations (116) et (117). Le modèle alternatif est un modèle autorégressif stationnaire sans constante et *j* retards en différence tel que décrit à l'équation (114). Les valeurs critiques pour le test de cointégration sont données par Engle et Yoo (1987). Les valeurs critiques à un niveau de 5% et 10% sont respectivement de -3,37 et -3,02. Nous ne pouvons rejeter l'hypothèse nulle que les résidus sont non

stationnaires dans le cas du modèle avec bien durable et ne pouvons conclure que les deux séries sont cointégrées. Dans le cas du modèle avec bien durable, la valeur est cependant près de la valeur critique à 10%. Une relation de cointatégration entre les deux séries semblent donc plausible statistiquement. Au niveau du bien d'habitation, la relation de cointégration semble moins plausible, bien que nécessaire *a priori* d'un point vue économique.

Tableau 6 : Test Dickey-Fuller augmenté sur les résidus des relations de cointégration pour le modèle avec bien d'habitation et le modèle avec biens durables

Résidus		0 retard	1 retard	2 retards	3 retards	4 retards
	ADF stats	-1,58	-1,61	-1,73	-1,85	-1,69
$u_{h,t}$	AIC	**-1381,60**	-1375,08	-1366,42	-1362,10	-1353,72
	BIC	**-1375,06**	-1365,30	-1353,39	-1345,83	-1334,23
	ADF stats	-1,65	-1,79	-2,20	-2,97	-2,74
$u_{d,t}$	AIC	-1405,05	-1399,11	-1401,96	**-1411,30**	-1401,36
	BIC	-1398,51	-1389,32	-1388,93	**-1395,04**	-1381,88

Test de racine unitaire de Dickey-Fuller augmenté pour 0 à 4 retards. La valeur critique à un niveau de confiance de 5% et 10% sont respectivement de -3,37 et -3,02 (Engel et Yoo (1987)) pour 200 observations. Le modèle sous Ho suit un processus autorégressif avec racine unitaire et p retards en différence. Le modèle estimé est un modèle autorégressif stationnaire sans constante et p retards en différence. Le test est effectué jusqu'à 4 retards des différences. La valeur des critères d'information AIC et BIC indiquent 0 retard pour la série des résidus $u_{h,t}$ et 3 retards pour la série des résidus $u_{d,t}$

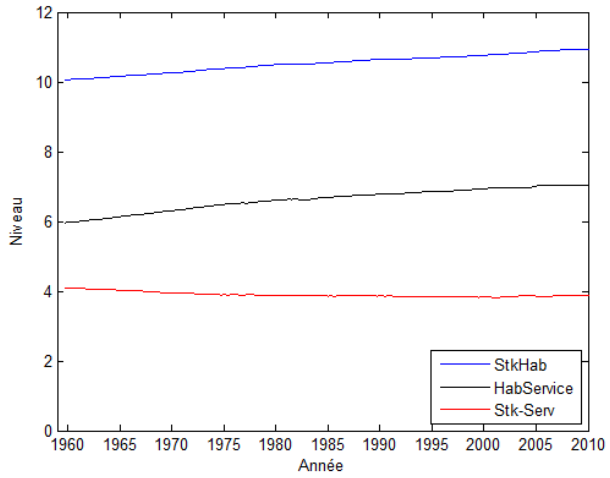
Le tableau 7 présente l'estimation de l'ESA (ε) obtenue pour chacun des modèles. L'ESA obtenue associée au modèle avec bien durable est de 0,82 et significative. Les biens non durables et les biens durables seraient donc des biens substituts. Cette valeur est très près de celle évalué par Yogo (2006) à 0,79 sur la période 1951-2001 mais inférieure à celle de Ogaki et Reinhart (1998) qui obtiennent 1,17 pour la période 1951-1983. L'ESA estimée avec les biens d'habitation est plus faible à 0,38 et significative. Les biens non durables et les biens d'habitation seraient donc des biens substituts.

Tableau 7 : Estimation de l'élasticité intratemporelle (ESA) pour le modèle avec bien d'habitation et le modèle avec bien durable

	Habitation	Durable
ESA (ε)	0,377	0,823
Erreur-type	**0,0445**	**0,0008**

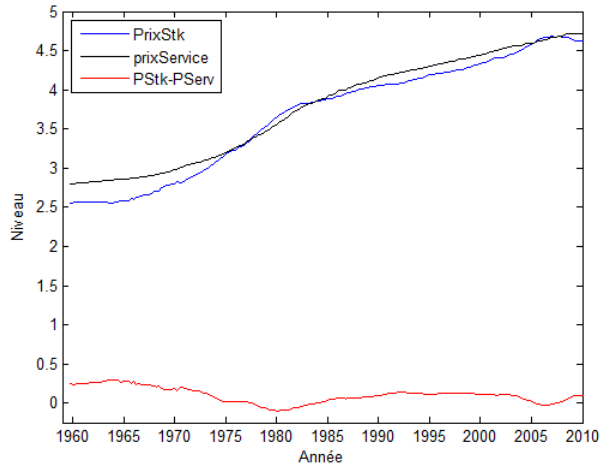
Piazzesi *et al.* (2007) et Fillat (2008) utilisent directement le service des biens d'habitation dans leur modèle. Le modèle avec le stock de biens d'habitation implique que le service issu des biens d'habitation est linéaire dans le stock de biens durables. La figure 9 présente l'évolution du stock d'habitation et des services d'habitation. La différence entre les deux séries est relativement stable. Le service d'habitation trimestriel représente en moyenne 2% de la valeur du stock d'habitation.

Figure 9 : Biens et services d'habitation



La figure 10 présente pour sa part l'évolution du prix du bien et du service d'habitation ainsi que leur différence. Si la différence du coût d'utilisation périodique et du prix du bien est stationnaire, alors le membre gauche de l'équation (108) est en théorie stationnaire et nous pouvons confirmer le résultat de l'ESA obtenu pour le modèle avec habitation. Les deux série de prix sont croissantes et semblent évoluer conjointement de 1960 à 2010. Leur écart est également relativement stable.

Figure 10 : Prix des biens et services d'habitation



Le tableau 8 présente les résultats d'un test de Dickey-Fuller augmenté de racine unitaire pour évaluer la stationnarité des séries de prix. Le modèle alternatif est un modèle stationnaire avec tendance et *j* retards en différence tel que présenté à l'équation (115). L'hypothèse nulle d'une racine unitaire ne peut être rejetée et nous concluons que les deux séries sont non stationnaires.

Tableau 8 : Test de stationnarité Dickey-Fuller augmenté sur les prix des biens et services d'habitation

Variables		0 retard	1 retard	2 retards	3 retards	4 retards	5 retards
	ADF stats	1,12	0,30	-0,55	-0,75	-1,22	-1,34
ph	AIC	-1266,79	-1295,01	**-1340,43**	-1335,07	-1337,81	-1330,45
	BIC	-1256,85	-1281,78	**-1323,92**	-1315,28	-1314,75	-1304,14
	ADF stats	0,42	-0,26	-0,58	-0,88	-1,45	-1,51
ph_service	AIC	-1480,40	-1599,34	-1613,69	-1618,17	**-1645,10**	-1634,42
	BIC	-1470,46	-1586,11	-1597,17	-1598,38	**-1622,05**	-1608,11

Test de racine unitaire de Dickey-Fuller augmenté pour 0 à 5 retards. La valeur critique à un niveau de confiance de 5% est près de -3,43 pour tous les retards. Le modèle sous Ho suit un processus autorégressif avec racine unitaire, une constante et p retard en différence. Le modèle estimé est un modèle autorégressif stationnaire avec une tendance, une constante et p retard en différence. La valeur des critères d'information AIC et le critère d'information BIC indiquent 2 retards pour la série *ph* et 4 retards pour la série *ph_service.*

Le tableau 9 procède au test de cointégration sur les résidus de la régression du prix du service d'habitation sur le prix du bien d'habitation et quatre termes de différence avancées et retardées pour cette variable. L'hypothèse nulle que les résidus de cointégration sont non stationnaires n'est pas rejetée au niveau de confiance de 5% mais est rejetée à un niveau de confiance d'au moins 10%. À la lumière de ce résultat, nous concluons que les prix du bien et du service d'habitation sont cointégrés. La différence entre les biens non durables et le bien d'habitation et le prix du bien d'habitation sont doivent donc également être cointégrés. Nous retenons ainsi 0,377 comme ESA plausible pour le modèle avec bien d'habitation.

Tableau 9 : Test Dickey-Fuller augmenté sur la relation de cointégration entre les prix des biens et des services d'habitation

Résidus		0 retard	1 retard	2 retards	3 retards	4 retards
	ADF stats	-3,10	-2,90	-2,96	-2,76	-2,62
$u_{,t}$	AIC	**-1270,01**	-1262,51	-1254,90	-1247,99	-1239,02
	BIC	**-1266,75**	-1255,98	-1245,12	-1234,98	-1222,78

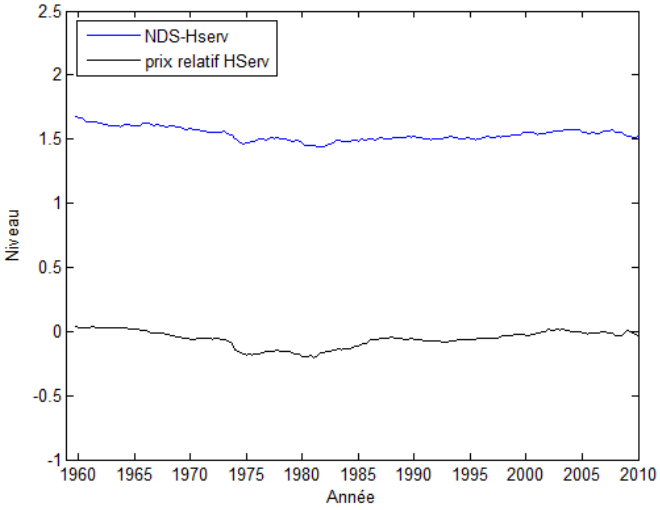
Test de racine unitaire de Dickey-Fuller augmenté pour 0 à 4 retards. La valeur critique à un niveau de confiance de 5% et 10% sont respectivement de -3,37 et -3,02 (Engel et Yoo (1987)) pour 200 observations. Le modèle sous Ho suit un processus autorégressif avec racine unitaire et *p* retards en différence. Le modèle estimé est un modèle autorégressif stationnaire sans constante et *p* retards en différence. La valeur des critères d'information AIC et BIC indiquent 0 retard (test Dickey-Fuller régulier) pour la série des résidus.

Les résultats précédents laissent présager qu'il existe également une relation de cointégration entre le bien non durable, le service d'habitation et leurs prix. Piazzesi *et al.* (2007) utilisent la condition de premier ordre de l'utilité intratemporelle de leur modèle pour établir l'équation (118) où sh_t est le service d'habitation et $p_{sh,t}$ le logarithme du prix relatif du service d'habitation.

(118) $$(c_t - sh_t) = cons. + \varepsilon p_{sh,t} + u_t$$

La figure 11 présente la différence entre les logarithmes des biens non durables et le service d'habitation ainsi que le prix relatif du service d'habitation. L'écart entre les deux séries est relativement stable.

Figure 11 : Prix des services et des biens d'habitation



Le tableau 10 présente les résultats pour le test de racine unitaire Dickey-Fuller augmenté pour ces séries. Le modèle alternatif sélectionné est un modèle autorégressif stationnaire sans constante et *j* retards en différence tel que décrit à l'équation (114). Nous ne pouvons rejeter l'hypothèse nulle que les séries sont non stationnaires[21].

Tableau 10 : Test de stationnarité Dickey-Fuller augmenté sur la différence des biens non durables et le service d'habitation et le prix des services d'habitation

Variables		0 retard	1 retard	2 retards	3 retards	4 retards
c-h_serv.	ADF stats	-1,51	-1,09	-1,06	-0,84	-0,80
	AIC	-1433,83	**-1439,21**	-1430,06	-1425,39	-1417,79
	BIC	-1430,52	**-1432,59**	-1420,15	-1412,20	-1401,32
ph_service (relatif)	ADF stats	-0,55	-0,82	-0,93	-1,04	-1,17
	AIC	-1448,80	**-1471,77**	-1466,22	-1458,61	-1451,91
	BIC	-1445,49	**-1465,16**	-1456,31	-1445,41	-1435,44

Test de racine unitaire de Dickey-Fuller augmenté pour 0 à 4 retards. La valeur critique à un niveau de confiance est de 5% et près de -1,94 pour tous les retards. Le modèle sous Ho suit un processus autorégressif avec racine unitaire et *p* retards en différence. Le modèle estimé est un modèle autorégressif stationnaire sans constante et *p* retards en différence. La valeur des critères d'information AIC et BIC indiquent 2 retards pour la série *c-h_serv.* et *ph_service.*

Le tableau 11 présente les résultats du test de cointégration à partir du test de Dickey-Fuller augmenté sur les résidus de l'équation (118). L'hypothèse nulle que les résidus sont non stationnaires ne peut être rejetée. Cependant, la valeur du test est relativement près de la valeur critique à un niveau de confiance de 10% et la dépasse en incluant deux retards pour la construction du test. La valeur obtenue pour l'ESA est de 0,61 avec une erreur-type de 0,027. Piazzesi *et al.* (2007) estiment une ESA de 0,77 pour la période 1947 à 2001. Notons que l'ESA obtenue est environ le double de celle obtenue à partir du bien d'habitation. La consommation du service d'habitation réagit donc davantage à une hausse de son prix relatif que la consommation du bien d'habitation.

[21] Les conclusions sont inchangées pour un modèle alternatif autorégressif avec constante.

Tableau 11 : Test de cointégration sur la différence entre les biens non durables et le service d'habitation et leur prix

Résidus		0 retard	1 retard	2 retards	3 retards	4 retards
	ADF stats	-2,81	-2,74	-3,04	-3,09	-2,60
u_t	AIC	**-1310,18**	-1300,98	-1293,75	-1284,90	-1282,60
	BIC	**-1306,91**	-1294,45	-1283,98	-1271,89	-1266,37

Test de racine unitaire de Dickey-Fuller augmenté pour 0 à 4 retards. La valeur critique à un niveau de confiance est de 5% et 10% sont respectivement de -3,37 et -3,02 (Engel et Yoo (1987)) pour 200 observations. Le modèle sous Ho suit un processus autorégressif avec racine unitaire et *p* retards en différence. Le modèle estimé est un modèle autorégressif stationnaire sans constante et *p* retards en différence. La valeur des critères d'information AIC et BIC indiquent 0 retard (test Dickey-Fuller régulier) pour la série des résidus.

Dans le cas des modèles avec biens durables et le modèle avec biens d'habitation, le coefficient de proportionnalité w intervient directement dans le facteur d'actualisation stochastique. Ce facteur ne peut cependant être estimé de façon consistante à partir du terme de constante des régressions de cointégration précédentes. Ogaki et Reinhart (1998) développent une approximation à partir de l'expression du coût d'utilisation d'un bien durable (73). En posant l'hypothèse que le terme de covariance entre le facteur d'actualisation stochastique et le prix du bien est nul, nous pouvons obtenir les équations (119) et (120) pour le coût d'utilisation du bien d'habitation et du bien durable.

$$\frac{u_{H_t}}{u_{C_t}} \cong P_{h,t} - (1-\alpha)E_t\left[P_{h,t+1}\right]E_t\left[M_{t+1}\right] \cong Q_{H,t} \tag{119}$$

$$\frac{u_{D_t}}{u_{C_t}} \cong P_{d,t} - (1-\delta)E_t\left[P_{d,t+1}\right]E_t\left[M_{t+1}\right] \cong Q_{D,t} \tag{120}$$

Nous pouvons ainsi approximer la valeur du coût périodique du bien à partir d'expressions pour les termes d'espérance conditionnelle. Nous utilisons la relation (7) entre l'espérance du facteur d'actualisation stochastique et le taux sans risque et posons simplement le taux sans risque de la période courante comme valeur du taux sans risque réel. Pour l'espérance conditionnelle du prix du bien durable et du bien d'habitation, nous utilisons un modèle autorégressif d'ordre quatre similairement à Ogaki et Reinhart (1998) et Pakos (2006). À partir de ces valeurs, nous pouvons former les estimateurs (121) et (122) pour les coefficients de proportionnalité w_h et w_d de la fonction d'utilité intratemporelle CES des deux modèles où les ESA ε_h et ε_d estimées précédemment sont employées.

$$\frac{1-w_h}{w_h} \cong E\left[\exp\left\{\varepsilon_h^{-1}(c_t - h_t) - \log(P_{h,t} - (1-\alpha)E_t\hat{P}_{h,t+1}(1+R_{f,t})^{-1})\right\}\right] \tag{121}$$

$$\frac{1-w_d}{w_d} \cong E\left[\exp\left\{\varepsilon_d^{-1}(c_t - d_t) - \log(P_{d,t} - (1-\delta)E_t\hat{P}_{d,t+1}(1+R_{f,t})^{-1})\right\}\right] \tag{122}$$

Nous obtenons 0,68 pour le coefficient de proportionnalité du modèle avec biens d'habitation et 0,15 pour celui avec biens durables. Le bien d'habitation semble donc occuper une part plus importante que le bien durable dans le facteur d'actualisation stochastique de leurs modèles respectifs.

4.5.2. Relation de cointégration pour les modèles avec consommation structurée

Dans le cas du modèle avec consommation structurée, nous pouvons utiliser les équations (72) et (73) pour obtenir les équations mettant en relation le coût d'utilisation périodique et le prix du bien. En substituant les expressions pour les dérivées, nous obtenons les équations (123) et (124) où les termes $S_{H,t}$ et $S_{D,t}$ représentent la productivité marginale du bien d'habitation et du bien durable dans la fonction de production domestique du niveau trois de l'utilité avec fonctions CES emboîtées dont nous avons discuté précédemment. Ces équations seront stationnaires dans la mesure où le coût d'utilisation d'un bien est effectivement lié à son coût d'acquisition. Ces dernières équations se prêtent toutefois difficilement, sous cette forme, à une analyse de cointégration. Nous pouvons cependant procéder à rebours à partir de la fonction de production domestique et établir successivement la valeur des paramètres jusqu'au niveau de la fonction d'utilité intratemporelle CES.

(123) $$\frac{u_{S_t}}{u_{C_t}}\frac{S_{H_t}}{P_{h,t}} = P_{h,t}^{-1}\frac{w}{1-w}C_t^{\frac{1}{\varepsilon}}\eta H_t^{\frac{-1}{a}}\left[(1-\eta)D_t^{1-\frac{1}{a}} + \eta H_t^{1-\frac{1}{a}}\right]^{\frac{-1}{\varepsilon(a-1)}}$$

(124) $$\frac{u_{S_t}}{u_{C_t}}\frac{S_{D_t}}{P_{d,t}} = P_{d,t}^{-1}\frac{w}{1-w}C_t^{\frac{1}{\varepsilon}}(1-\eta)D_t^{\frac{-1}{a}}\left[(1-\eta)D_t^{1-\frac{1}{a}} + \eta H_t^{1-\frac{1}{a}}\right]^{\frac{-1}{\varepsilon(a-1)}}$$

Le ratio de l'utilité marginale du bien d'habitation et du bien durable doit être égal à l'équilibre au ratio de leurs prix. Nous pouvons ainsi construire similairement à l'équation (118) une relation entre la différence du bien durable et d'habitation et la différence de leurs prix telle que présentée à l'équation (125). Si les deux séries en différence sont cointégrées, nous pouvons alors obtenir une estimation de l'élasticité de substitution a entre le bien d'habitation et le bien durable dans la fonction de production domestique CES pour la consommation structurée.

(125) $$(d_t - h_t) = cons. + a(p_{h,t} - p_{d,t}) + u_t$$

La figure 12 présente l'évolution historique des deux séries. Elles sont croissantes et semblent évoluer conjointement. Le tableau 12 présente les résultats du test de racine unitaire Dickey-Fuller augmenté. Le modèle alternatif est un modèle autorégressif stationnaire avec tendance et j retards en différence tel que présenté à l'équation (115). L'hypothèse nulle que les séries sont non stationnaires ne peut être rejetée.

Figure 12 : Biens durables, biens d'habitation et leurs prix

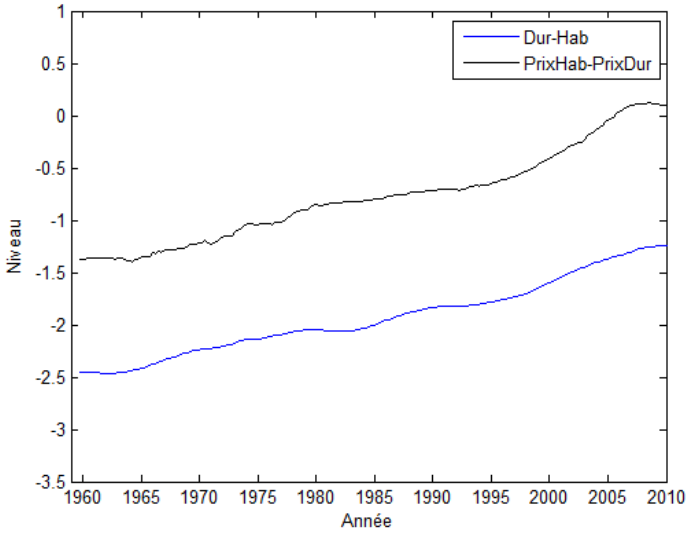


Tableau 12 **:** Test de stationnarité Dickey-Fuller augmenté sur la différence entre les biens durables et les biens d'habitations et la différence de leurs prix

Variables		0 retard	1 retard	2 retards	3 retards	4 retards
	ADF stats	-0,37	-2,02	-2,66	-2,56	-2,17
d-h	AIC	-1650,28	-1976,79	**-1976,12**	-1963,22	-1952,76
	BIC	-1640,34	**-1963,55**	-1959,60	-1943,43	-1929,70
	ADF stats	-0,82	-1,02	-1,39	-1,48	-1,86
ph-pd	AIC	-1298,88	-1303,59	**-1313,07**	-1304,27	-1305,26
	BIC	-1288,94	-1290,35	**-1296,56**	-1284,48	-1282,21

Test de racine unitaire de Dickey-Fuller augmenté pour 0 à 4 retards. La valeur critique à un niveau de confiance de 5% est près de -3,43 pour tous les retards. Le modèle sous Ho suit un processus autorégressif avec racine unitaire, une constante et *p* retard en différence. Le modèle estimé est un modèle autorégressif stationnaire avec une tendance une constante et *p* retard en différence. La valeur des critères d'information AIC et le critère d'information BIC indiquent au maximum 2 retards pour la série *d-h* et 2 retards pour la série *ph-pd*.

Le tableau 13 présente le test de cointégration. L'hypothèse nulle que la série des résidus est non stationnaire ne peut être rejetée. La statistique du test est par ailleurs relativement éloignée de la valeur critique à 10%. La relation de cointégration entre la différence des biens durables et des biens d'habitation et la différence de leurs prix semble peu plausible. La valeur de l'élasticité de substitution *a* entre ces biens dans la fonction de production domestique est estimée à 0,79 avec une erreur-type de 0,008.

Tableau 13: Test de cointégration sur la différence entre le bien durable et le bien d'habitation et la différence de leurs prix

Résidus		0 retard	1 retard	2 retards	3 retards	4 retards
	ADF stats	-1,63	-1,92	-2,07	-2,24	-2,52
$u_{,t}$	AIC	**-1316,25**	-1313,30	-1305,04	-1297,66	-1291,37
	BIC	**-1312,99**	-1306,78	-1295,27	-1284,65	-1275,14

Test de racine unitaire de Dickey-Fuller augmenté pour 0 à 4 retards. La valeur critique à un niveau de confiance est de 5% et 10% sont respectivement de -3,37 et -3,02 (Engel et Yoo (1987)) pour 200 observations. Le modèle sous Ho suit un processus autorégressif avec racine unitaire et *p* retards en différence. Le modèle estimé est un modèle autorégressif stationnaire sans constante et *p* retards en différence. La valeur des critères d'information AIC et BIC indiquent 0 retard (test Dickey-Fuller régulier) pour la série des résidus.

L'estimation du paramètre de proportionnalité η est également problématique. Cependant, dans le cas où l'élasticité de substitution tend vers un, la fonction de production domestique prend la forme d'une fonction CD. Nous utilisons cette relation pour estimer une approximation du paramètre de proportionnalité η de la fonction de production domestique CES. Dans le cas d'une fonction CD, nous pouvons obtenir la relation (126) à partir de la condition de premier ordre sur la fonction d'utilité intratemporelle CES. Le paramètre de proportionnalité obtenu par cette relation en prenant la moyenne historique est de 0,74 avec une erreur-type de 0,001.

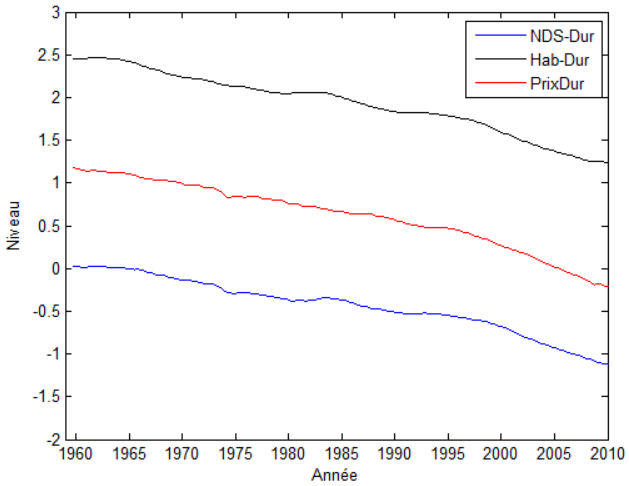
(126) $$\frac{D_t P_{d,t}}{H_t P_{h,t}} = \frac{\eta - 1}{\eta}$$

Dans le cadre de l'approximation CD, nous pouvons également établir à partir des équations (123) et (124) pour le coût d'utilisation périodique d'un bien et son coût d'acquisition, la relation de cointégration (127) entre la différence des biens non durables et durables, la différence entre le bien d'habitation et le bien durable et le prix du bien durable. Nous pouvons ainsi obtenir une estimation consistante de l'ESA de la fonction d'utilité intatemporelle CES et du coefficient de proportionnalité η de la fonction CD.

(127) $$(c_t - d_t) = cons. + \eta(1-\varepsilon)(h_{,t} - d_{,t}) + \varepsilon p_{d,t} + u_t$$

La figure 13 présente l'évolution des trois séries. Elles sont décroissantes dans le temps et évoluent similairement de 1960 à 2010. Les séries de l'équation (127) sont non stationnaires tel que testées précédemment.

Figure 13 : Relation de cointégration entre les biens non durables, durables et d'habitation



Le tableau 14 présente les résultats du test de cointégration. L'hypothèse nulle que les résidus sont non stationnaires ne peut être rejetée. La statistique du test est relativement éloignée de la valeur critique à 10% pour la spécification du test avec zéro retard et atteint au minimum -2,70 avec trois retards. Les trois séries sont donc peu susceptibles d'être cointégrées selon la relation (127).

Tableau 14 : Test de cointégration sur les biens non durables et d'habitation

Variables		0 retard	1 retard	2 retards	3 retards	4 retards
	ADF stats	-2,42	-2,58	-2,56	-2,70	-2,40
μ	AIC	**-1498,30**	-1493,09	-1486,53	-1477,16	-1468,25
	BIC	**-1495,03**	-1486,56	-1476,76	-1464,15	-1452,01

Test de racine unitaire de Dickey-Fuller augmenté pour 0 à 4 retards. La valeur critique à un niveau de confiance de 5% et 10% sont respectivement de -3,78 et -3,47 (Engel et Yoo (1987)) pour 200 observations. Le modèle sous Ho suit un processus autorégressif avec racine unitaire et *p* retards en différence. Le modèle estimé est un modèle autorégressif stationnaire sans constante et *p* retards en différence. La valeur des critères d'information AIC et BIC indiquent 0 retard (test Dickey-Fuller régulier) pour la série des résidus.

Le tableau 15 présente les résultats pour l'estimation de l'ESA et du coefficient de proportionnalité avec leurs erreur-types. L'ESA est de 0,34 et significative tout comme le coefficient de proportionnalité qui est de 0,81; soit près de l'évaluation précédente de 0,74. À la lumière du résultat du test de cointégration, nous ne pouvons affirmer que ces valeurs reflètent précisément l'ESA et le coefficient de proportionnalité. Cependant, elles peuvent être jugées réalistes à partir des résultats précédemment obtenus.

Tableau 15: Estimation de l'élasticité intratemporelle (ESA) et du facteur de proportionnalité pour le modèle avec consommation structurée contraint

ESA	η
0,34	0,81
0,04	**0,00**

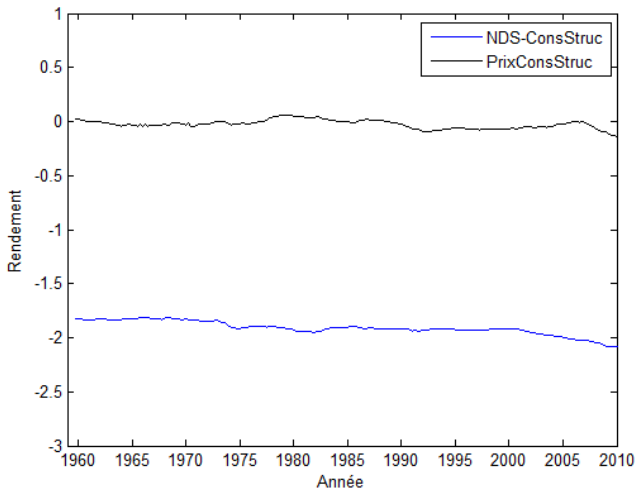
Pour obtenir une estimation de l'ESA associée au modèle avec consommation structurée non contraint, nous pouvons construire un indice de prix théorique pour le service de consommation structurée à partir de la fonction CES utilisée comme fonction de production domestique selon l'équation (128).

(128) $$P_{StrucCES,t} = \left[(1-\eta) P_{d,t}^{1-\frac{1}{a}} + \eta P_{h,t}^{1-\frac{1}{a}} \right]^{\frac{a}{a-1}}$$

Si le coût d'utilisation périodique de la consommation structurée est cointégrée avec son coût d'acquisition, nous pouvons alors utiliser cette relation et estimer l'ESA à partir de l'équation (129) où le stock de consommation structurée est construit à partir de l'équation CES de production domestique pour des valeurs raisonnables de l'élasticité de substitution a de 0,79 et du coefficient de proportionnalité de 0,81 issues de l'estimation des relations de cointégration précédentes. La figure 14 présente la consommation structurée et son prix. Nous pouvons constater que les deux séries sont relativement stable et que l'écart les séparant fluctue peu. Le tableau 16 présente le test de stationnarité Dickey-Fuller augmenté pour les deux séries. Le modèle alternatif sélectionné est un modèle autorégressif stationnaire sans constante et j retards en différence tel que décrit à l'équation (114). Nous ne pouvons rejeter l'hypothèse nulle que les séries sont non stationnaires[22].

(129) $$(d_t - h_t) = cons. + a(p_{h,t} - p_{d,t}) + u_t$$

Figure 14 : Biens non durables et consommation structurée



[22] Les conclusions sont inchangées pour un modèle alternatif autorégressif avec constante.

Tableau 16 : Test de stationnarité Dickey-Fuller augmenté sur la différence des biens non durables et la consommation structurée

Variables		0 retard	1 retard	2 retards	3 retards	4 retards
	ADF stats	3,68	2,25	2,04	1,59	1,76
c-struc	AIC	-1581,72	**-1605,46**	-1597,61	-1598,76	-1589,42
	BIC	-1578,41	**-1598,84**	-1587,70	-1585,56	-1572,95
	ADF stats	0,92	0,65	-0,07	-0,13	-0,75
p_struc	AIC	**-1385,82**	-1377,24	-1380,53	-1371,24	-1371,84
	BIC	**-1382,50**	-1370,63	-1370,62	-1358,05	-1355,38

Test de racine unitaire de Dickey-Fuller augmenté pour 0 à 4 retards. La valeur critique à un niveau de confiance est de 5% est près de -1,94 pour tous les retards. Le modèle sous Ho suit un processus autorégressif avec racine unitaire et *p* retards en différence. Le modèle estimé est un modèle autorégressif stationnaire sans constante et *p* retards en différence. La valeur des critères d'information AIC et BIC indiquent 2 retards pour la série *c-struc.* et un retard pour *p_struc*.

Le tableau 17 présente pour sa part les résultats du test de cointégration. L'hypothèse nulle que les résidus sont non stationnaires ne peut être rejetée. La statistique du test est particulièrement éloignée de la valeur critique de 3,02 à un niveau de confiance de 10%. La différence entre la consommation des biens non durables et la consommation structurée et le prix théorique de la consommation structurée ne semblent pas cointégrées. Cependant, la relation de cointégration testée est fondée sur différentes estimations et hypothèses; ce qui peut engendrer différents biais lors de l'estimation. Nous obtenons une ESA de 0,35 significative; soit très près de l'ESA de 0,34 estimée pour le modèle avec consommation structurée contraint.

Tableau 17 : Test de cointégration sur les biens non durables et la consommation structurée

Résidus		0 retard	1 retard	2 retards	3 retards	4 retards
	ADF stats	-0,63	-0,78	-0,95	-1,22	-0,80
u_t	AIC	**-1240,99**	-1234,27	-1228,38	-1222,77	-1225,99
	BIC	**-1234,46**	-1224,48	-1215,35	-1206,50	-1206,51

Test de racine unitaire de Dickey-Fuller augmenté pour 0 à 4 retards. La valeur critique à un niveau de confiance est de 5% et 10% sont respectivement de -3,37 et -3,02 (Engel et Yoo (1987)) pour 200 observations. Le modèle sous Ho suit un processus autorégressif avec racine unitaire et *p* retards en différence. Le modèle estimé est un modèle autorégressif stationnaire sans constante et *p* retard en différence. La valeur des critères d'information AIC et BIC indiquent 0 retard (test Dickey-Fuller régulier) pour la série des résidus.

L'estimation des facteurs de proportionnalité dans le modèle avec consommation structurée et sa version contrainte avec la fonction de production CD ne peut s'effectuer directement à partir des équations du coût périodique du service de la consommation structurée puisque le prix de la consommation structurée n'est pas observable. Afin d'obtenir une estimation raisonnable de ces coefficients, nous pouvons étendre au modèle contraint l'approche du prix théorique utilisée précédemment pour former la série de prix $P_{StrucCD,t}$ telle que présentée à l'équation (130).

(130) $$P_{StrucCD,t} = P_{d,t}^{(1-\eta)} P_{h,t}^{\eta}$$

Afin d'appliquer l'approche d'estimation décrite aux équations (121) et (122), nous utilisons une ESA de 0,35 et un coefficient de proportionnalité de 0,81 η pour les deux modèles ainsi qu'une l'élasticité de substitution a de 0,79 pour le modèle non contraint. Le taux de dépréciation périodique du stock de la consommation structurée est estimé en prenant la moyenne du ratio du stock après amortissement du stock de biens durables et d'habitation et avant amortissement. Les taux d'amortissement trimestriels obtenus sont respectivement de 1,82% et 1,35% pour le modèle non contraint et contraint. À partir de la calibration de ces paramètres, nous obtenons un coefficient de proportionnalité w pour la fonction d'utilité intratemporelle CES de 0,83 dans le cas où la fonction de production domestique est également une fonction CES et de 0,94 dans le cas où la fonction de production domestique est une fonction CD. Le poids relatif de la consommation structurée dans les facteurs d'actualisation stochastique de cette classe de modèle général est donc plus important lorsque les élasticités de substitution entre les types de biens sont contraintes.

4.5.3. Sommaire des résultats de l'analyse par cointégration des paramètres de préférence

Après plusieurs tests pour des relations de cointégration entre différentes combinaisons des variables de consommation et leurs prix, nous ne pouvons établir avec certitude la valeur des paramètres des équations associées aux niveaux deux et trois de notre cadre d'analyse général des modèles de tarification avec consommation. D'autres tests de cointégration pourraient être effectués pour valider les valeurs estimées à partir des relations de cointégration utilisées qui sont *a priori* cohérentes d'un point de vue économique. Cependant, les valeurs obtenues sont raisonnables et font écho à des résultats obtenus dans la littérature pour des périodes d'analyse différentes. Nous avons également obtenus des résultats similaires pour certains paramètres à partir de spécifications différentes d'un modèle. Le tableau 18 présente le sommaire des résultats pour les différents paramètres associés à la fonction d'utilité intratemporelle et la fonction de production domestique qui interviennent dans les facteurs d'actualisation stochastique des différents modèles.

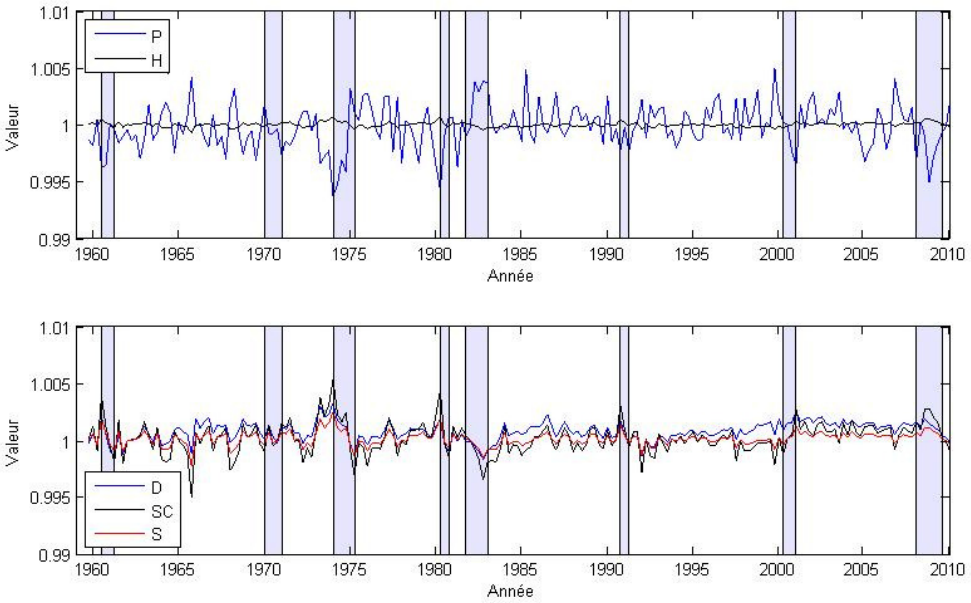
Tableau 18 : Sommaire des résultats de l'analyse par cointégration pour les paramètres de la fonction d'utilité intratemporelle et la fonction de production domestique

	Piazzesi et *al*. (2007)	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
ε	0,61	0,61	0,82	0,38	0,35	0,35
w			0,15	0,68	0,94	0,83
η					0,81	0,81
a						0,79

Les paramètres estimés sont l'élasticité de substitution intratemporelle (*ESA*) et le paramètre de proportionnalité w de la fonction d'utilité intratemporelle CES impliquant la consommation des biens non durables et un bien ou une fonction de biens de consommation additionnelles. Le coefficient de proportionnalité η de la fonction de production domestique Cobb-Douglas (CD) pour le modèle avec consommation structurée contraint (SCAPM) où pour la fonction de productions domestique CES pour le modèle avec consommation structurée non contraint (SCAPM7) ainsi que l'élasticité de substitution a entre les biens durables et d'habitation pour cette dernière fonction.

La figure 15 présente l'évolution historique des termes associés au risque de composition de la consommation pour chacun des modèles énumérés au tableau 17 sans prendre en compte l'ESI dans le terme d'exposant des termes du risque de composition. Nous avons donc en exposant $ESA/(1-ESA)$ pour les modèles de Piazzesi *et al.* (2007) et de Fillat (2008) et $ESA/(ESA-1)$ tel que présenté à la section 3.3.1 de la dérivation générale des facteur d'actualisation stochastique. La section supérieure du tableau présente les termes pour ces derniers modèles, le modèle de Yogo (2006) et le modèle avec stock d'habitation. La section inférieure présente les deux termes pour les modèles avec consommation structurée.

Figure 15 : Terme de composition de la consommation des facteurs d'actualisation stochastique



Nous pouvons observer dans la section du haut que le terme du risque de composition de la consommation varie peu pour le modèle avec stock d'habitation. La variation est plus importante dans le cas du terme associé aux modèles de Piazzesi *et al.* (2007) et de Fillat (2008). Il est toutefois difficile d'observer une tendance claire sur les périodes de récession, le terme étant parfois supérieur à un et parfois inférieur comme lors de la crise financière. Les modèles avec bien durable ou consommation structurée fluctuent similairement, mais encore une fois sans tendance claire durant les récessions. Les fluctuations pour l'ensemble des termes des modèles sont cependant modestes et se concentrent entre 0,995 et 1,005. Les variations fondamentales des termes associées au risque de composition de la consommation associée au taux de croissance du rapport du bien de consommation supplémentaire à la consommation des biens non durables et leur élasticité de substitution sont par conséquent très faibles.

La figure 16 présente pour sa part le comportement des termes pour le risque de composition en prenant en compte l'exposant $(\varepsilon^{-1} - \rho^{-1})(1-\gamma)/(1-\rho^{-1})$ ou, de façon plus compacte, $\kappa(ESA^{-1} - ESI^{-1})$ dans le cas des modèles construits à partir de l'utilité EZW et $(ESA^{-1} - ESI^{-1})$ dans le cas du modèle de Piazzesi *et al.* (2007). La section du haut

présente les termes pour une ESI *classique* faible de 0,01 et un coefficient d'aversion au risque de 105; c'est-à-dire conditionnellement à une énigme de la prime de risque. La section du bas reprend l'analyse, mais cette fois pour une ESI de 1,5 telle qu'utilisée par Bansal et Yaron (2004) dans leur modèle avec risque de consommation de long terme. Les statistiques descriptives des termes du risque de composition de la consommation sont présentées à l'annexe F. Ces tableaux présentent également les corrélations entre les termes et ainsi que pour le taux sans risque, la prime de marché et les primes de risque des facteurs SMB et HML de Fama-French.

L'échelle des valeurs pour cette série de graphiques varie maintenant entre zéro et quatre. Pour une ESI faible et un coefficient d'aversion au risque élevé, le terme κ est près de un et la consommation est alors près d'être séparable dans le temps. Les termes de composition de la consommation approchent alors leur représentation avec l'utilité puissance. Nous constatons maintenant des variations plus importantes des termes de composition de la consommation. Le terme pour le modèle avec stock d'habitation varie moins que les termes des modèles de Piazzesi *et al.* (2007) et Fillat (2008) qui sont maintenant distincts mais corrélés à 99%. Fait intéressant, ces modèles génèrent maintenant un terme supérieur à un durant la crise financière et la crise pétrolière et inférieur à un durant la récession de 1981. L'utilité marginale associée au terme de composition augmente donc durant certaine récession pour ces modèles pour ces valeurs des paramètres. Les termes du modèle avec biens durables de Yogo (2006) et les deux modèles avec consommation structurée présentent le comportement inverse sur ces périodes de récession et sont, de façon générale, moins volatils. L'utilité marginale associée au terme du risque de composition de la consommation pour les modèles avec stock de biens durables, d'habitation ou une combinaison des deux ne semblent donc augmenter que faiblement durant ces périodes de récession. En fait, les termes de ces trois modèles sont corrélés négativement avec ceux des modèles des Piazzesi *et al.* (2007) et de Fillat (2008) ainsi qu'avec la prime de risque HML, mais positivement avec le taux sans risque, SMB et le marché. Puisque les actifs dont le rendement varie négativement avec l'utilité marginale commandent une prime de risque plus élevée, nous pouvons constater que les modèles de Piazzesi *et al.* (2007) et Fillat (2008) semblent mieux performer pour ces valeurs des paramètres.

Pour une ESI de 1,5 la volatilité des termes augmentent considérablement à l'exception du modèle de Piazzesi *et al.* (2007) où la moyenne du terme est essentiellement 1 et la volatilité de seulement 0,002. Une ESI de 1,5 ferme donc le canal du risque de composition de la consommation pour ce modèle. Le modèle avec consommation structurée contraint est nettement le plus volatil avec un écart-type de 242% et une moyenne de 1,4. Le terme de la version non contrainte est plus stable avec une moyenne de 0,99 mais présente le second écart-type le plus important à 47% suivi de près par le terme du modèle de Fillat (2008) à 46% pour une moyenne de 1,12. Les termes des modèles avec biens d'habitation ou durables présentent pour leur part respectivement des moyennes de 1,02 et 0,89 pour des écart-types de 12,5% et 12,8%. Pour ces valeurs de l'ESI et du coefficient d'aversion au risque, le terme κ est négatif et le modèle de Fillat (2008) est par conséquent corrélé négativement avec les termes des autres modèles mais également avec la majorité des rendements d'actifs. La figure 17 reprend l'analyse, mais pour un coefficient d'aversion au risque *raisonnable* de 10.

Figure 16 : Terme de composition de la consommation des facteurs d'actualisation pour un ESI de 0.01 et 1.5 et un coefficient d'aversion au risque de 105

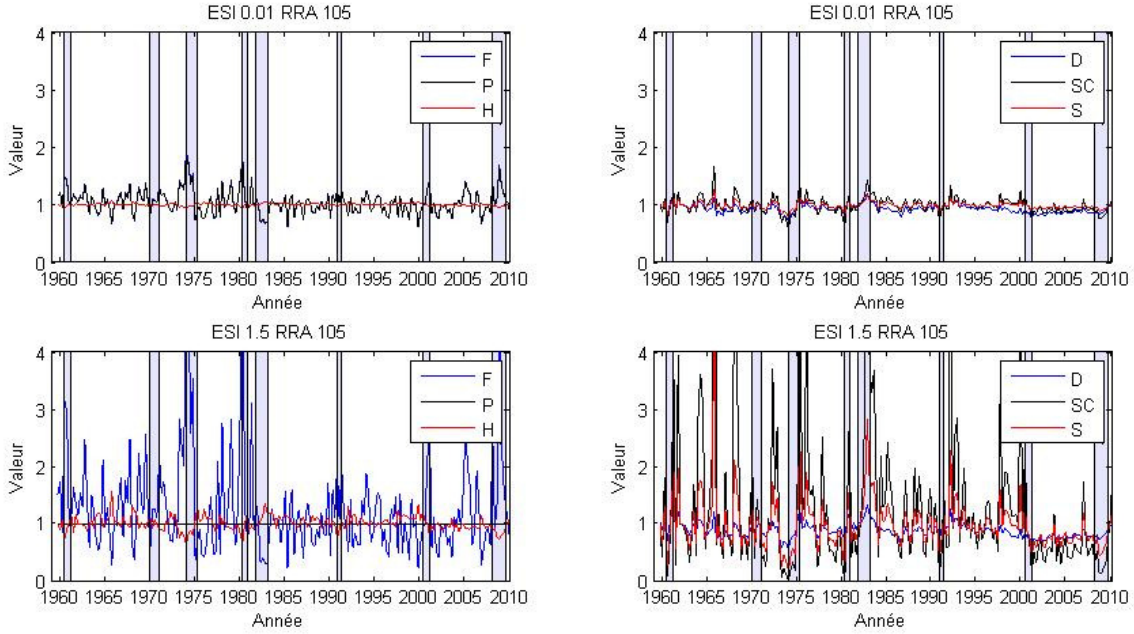
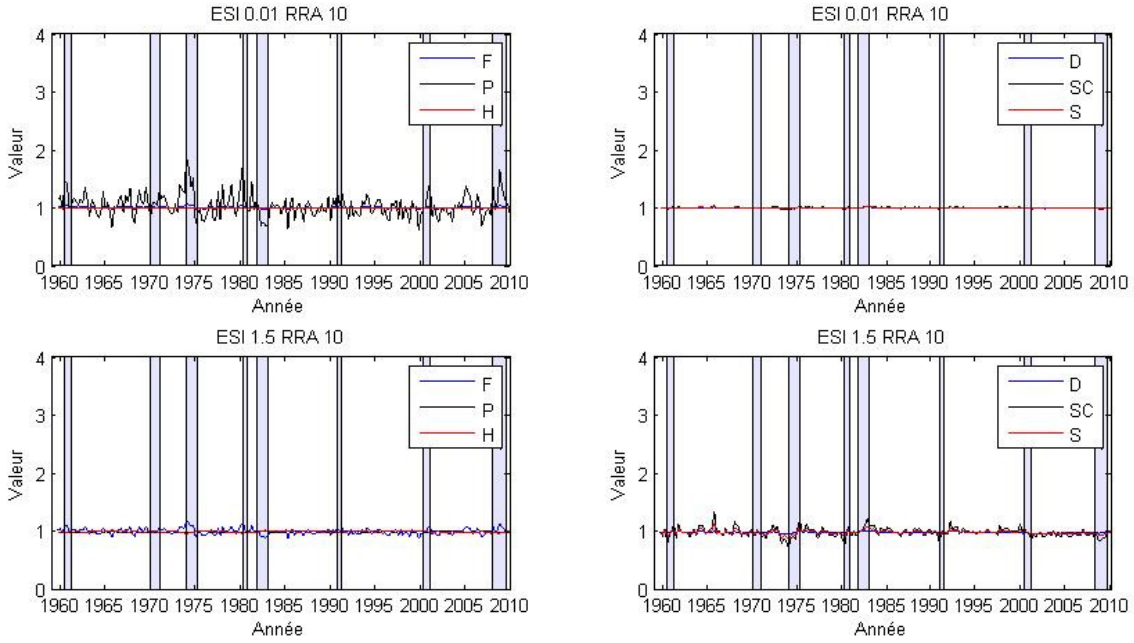


Figure 17 : Terme de composition de la consommation des facteurs d'actualisation pour un ESI de 0.01 et 1.5 et un coefficient d'aversion au risque de 10



Nous pouvons remarquer dans la section du haut de la figure 17 pour un coefficient d'aversion au risque de 10 et une ESI de 0,01 que la volatilité des termes pour tous les modèles diminue drastiquement à l'exception du terme du modèle de Piazzesi *et al.* (2007) qui n'est pas affecté par le coefficient d'aversion au risque. Le terme le plus volatil demeure celui associé au SCAPM mais un écart-type de seulement 1,2%. Tous les

termes demeurent également près de un et sont peu volatils pour une ESI de 1,5. Le terme du SCAPM est alors toujours le plus volatil avec un écart-type à la hausse à 8%. Une aversion au risque plus réaliste diminue donc de façon marquée la volatilité des termes associée au risque de composition de la consommation dans les facteurs d'actualisation stochastique et, vraisemblablement, le potentiel du risque de composition de la consommation pour la résolution de l'énigme de la prime de risque.

Comme nous l'avons souligné précédemment, le risque de composition de la consommation peut comporter différentes dimensions. Sa contribution totale dans un modèle de tarification doit donc être évaluée globalement dans le noyau de tarification auquel il est associé; c'est-à-dire en tenant compte du terme sur la croissance de la consommation des biens non durables, du terme sur la croissance de la richesse totale ainsi que de leurs interactions. La section suivante présente l'estimation par GMM des modèles de tarification à partir de leur représentation non linéaires.

4.6. Estimation inconditionnelle des modèles non linéaires

4.6.1. Estimation inconditionnelle avec les portefeuilles de Fama-French et le taux sans risque

À partir des équations d'Euler (66) à (70), nous pouvons obtenir une représentation inconditionnelle des moments (66') à (69') en appliquant la propriété de l'espérance conditionnelle emboîtée et ainsi obtenir l'ensemble des moments $g_T(\theta, X)$ nécessaires pour utiliser l'estimateur GMM. Nous estimons donc le modèle à partir des moments sur la prime de risque des rendements, le taux sans risque ainsi que les coûts périodiques d'utilisation des biens durables et d'habitation. Ces derniers moments sont utilisés pour l'estimation du modèle de Yogo (2006) avec biens durables, le modèle avec stock d'habitation, le modèle avec consommation structurée contraint (SCAPM) et celui non contraint (SCAPM7). L'estimation par GMM des modèles non linéaires permet en théorie d'obtenir une estimation pour l'ensemble des paramètres des facteurs d'actualisation stochastique sans avoir recours aux relations potentielles de cointégration entre les variables économiques utilisées précédemment.

Bien que les moments associés aux conditions d'Euler soient en théorie orthogonaux par rapport à l'ensemble d'information au temps *t*, dû aux problèmes potentiels d'agrégation temporelle des données de consommation du NIPA discutés précédemment, nous utilisons un retard dans l'estimation des matrices de covariance à partir de l'approche de Newey et West (1987) pour obtenir des matrices de pondération et de covariance semi-définies positives.

(66') $$E\,[M_{t+1}(R_{i,t+1} - R_{0,t+1})] = 0 \quad ,\forall i = 0,1,...,N$$

(67') $$E\,[M_{t+1}R_{0,t+1} - 1] = 0$$

(68') $$E\,[1 - \frac{u_{S_t}}{u_{c_t}}\frac{S_{H_t}}{P_{h,t}} - (1-\alpha)[M_{t+1}\frac{P_{h,t+1}}{P_{h,t}}]] = 0$$

(69') $$E\ [1-\frac{u_{S_t}}{u_{c_t}}\frac{S_{D_t}}{P_{d,t}}-(1-\delta)[M_{t+1}\frac{P_{d,t+1}}{P_{d,t}}]]=0$$

(70') $$E\ [M_{t+1}R_{j,t+1}-1]=0$$

Le tableau 19 présente l'estimation inconditionnelle des modèles par GMM avec les six portefeuilles Fama-French en une et deux étapes avec une matrice identité comme matrice de pondération initiale[23]. La section du haut présente les résultats de l'estimateur en une étape. Les coefficients d'aversion au risque γ sont généralement élevés à travers les modèles avec une valeur minimale de 40,49 pour le modèle de Fillat (2008) et maximale de 191,60 pour le modèle avec stock d'habitation. Les coefficients d'aversion au risque sont cependant non significatifs avec des erreur-types élevées. Les ESI (ρ) sont faibles avec des valeurs généralement inférieures à 1% et non significatives avec des erreur-types du même ordre de grandeur. Les ESA (ε) sont plus variables passant de 9,3% pour le modèle contraint avec consommation structurée SCAPM à 123% pour le modèle de Fillat (2008).

Les ESA sont non significatives et les valeurs obtenues par l'approche de cointégration sont généralement comprises dans les intervalles de confiance à 95% associées aux erreur-types à l'exception du DCAPM de Yogo (2006). Les erreur-types pour les ESA du modèle contraint SCAPM et non contraint avec consommation structurée présentent des valeurs extrêmes et sont non reportées. Les facteurs d'actualisation subjectif β sont tous supérieurs à un et non significatifs à l'exception du HCAPM de Piazzesi *et al.* (2007). Le coefficient ω de proportionnalité de la consommation des biens non-durables et la consommation durable varie entre 0,20 pour le modèle avec stock d'habitation et 0,72 significatif pour le DCAPM. L'intervalle de confiance à 95% pour le coefficient de proportionnalité du DCAPM ne comprend pas la valeur obtenue avec l'approche par cointégration. Encore une fois, l'erreur-type de ce paramètre pour le SCAPM présentait une valeur extrême et est non reportée. Le coefficient η de proportionnalité de la consommation des biens durables et d'habitation de la fonction de production de deuxième niveau est de 0,16 pour le SCAM7 et de 0,97 pour le SCAPM. Leurs erreur-types sont cependant encore une fois extrêmes. Ce phénomène est également observé pour l'élasticité de substitution de la fonction de production de deuxième niveau a du SCAPM7. Tous les modèles sont rejetés par le *J-test*. Les problèmes des erreur-types du SCAPM et SCAPM7 se répercutent sur la statistique J de ces modèles qui présentaient des valeurs extrêmes tout comme celle du modèle avec stock d'habitation.

Les résultats pour l'estimation par GMM en deux étapes sont similaires pour le coefficient d'aversion au risque dont plusieurs sont maintenant significatifs. Les ESI et les facteurs d'actualisation subjectif présentent pour leur part des erreur-types du même

[23] Puisque l'équation (67') du moment est de l'ordre de un plus le taux sans risque, nous modifions l'élément correspondant au moment du taux sans risque dans la matrice identité en le divisant par cent de façon à ne pas surpondérer le taux sans risque dans l'estimateur en une étape. L'estimateur en deux étapes n'est pas sensible en théorie à ce choix pour la matrice de pondérations initiales.

ordre que lors de la première ronde d'estimation à l'exception du CCAPM, du modèle EZW et du modèle de Piazzesi *et al.* (2007) où les paramètres sont significatifs et pour ce dernier, maintenant supérieur à un. Les ESA varient davantage. L'ESA du DCAPM est maintenant très faible et significative alors que celle pour le modèle de Piazzesi *et al.* (2007) est également très faible mais non significative. Les coefficients de proportionnalité ω pour le DCAPM et modèle avec stock d'habitation sont maintenant très faibles alors que ceux des modèles avec consommation structurée sont demeurés stables mais toujours avec des erreur-types extrêmes. La variation importante observée pour ces paramètres semble indiquer un problème d'identification pour les paramètres de la fonction d'utilité intratempporelle et la fonction de production domestique. Tous les modèles sont également rejetés par le *J-test* où les statistiques *J* sont cette fois toutes bien définies. L'efficience attendue de l'estimateur en deux étapes ne se concrétise également pas alors que peu de paramètres à travers les modèles sont significatifs.

Tableau 19 : Estimation inconditionnelle par GMM en une et deux étapes, 6 portefeuilles Fama-French 1960-2010

Évaluation inconditionnelle des modèles non-linéaires par GMM en une (identité avec ajustement pour le taux sans risque) et deux étapes avec Portefeuilles de Fama et French (1992, 1992) de 1960 à 2010 segmentés selon le ratio de la valeur au livre sur la valeur marchande (HML) et la taille (SMB) et le taux sans risque. Les résultats sont présentés pour un retard de l'erreur-type HAC de Newey et West (1987a). Les erreur-types sont présentées en caractères gras losrqu'elles sont associées à une statistique t significative à au moins 5% pour le paramètre. La le *J-Test* et sa *p-value* sont présentés au bas des sections.

	GMM 1 Identité							
	CCAPM	EZW	Piazzesi et al. (2007)	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
γ	166,45	123,69	79,62	40,49	139,70	191,60	171,16	138,23
	246,24	85,06	207,14	211,97	73,93	100,14	151,92	81,85
ρ		0,0038	0,0126	0,0044	0,0056	0,0038	0,0044	0,0038
		0,0094	0,0327	0,0679	0,0111	0,0084	0,0134	0,0112
ε			0,803	1,230	0,079	1,103	0,093	0,214
			0,939	2,86	0,21	64,13		
β	1,262	1,831	0,974	1,22	1,25	1,80	1,47	1,90
	0,713	2,803	1,19	10,27	0,85	1,94	1,25	4,71
η							0,97	0,16
ω					0,72	0,20	0,35	0,85
					0,086	19,558		142,71
a								0,41
								153,05
J-Test	23,787	22,248	21,770	22,302	17,522			
p-val	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0006			
	GMM2							
γ	186,57	182,66	167,03	34,55	139,74	191,63	188,89	138,23
	60,89	**47,72**	107,77	189,00	72,53	**84,18**	**81,96**	81,60
ρ		0,0043	0,0060	0,0221	0,0020	0,0015	0,0023	0,0038
		0,0077	0,0039	0,1550	0,0087	0,0068	0,0086	0,0102
ε			0,001	1,108	0,004	1,407	0,090	0,214
			2,67	0,97	**0,02**	74,83		178,06
β	1,18	1,20	1,25	0,89	2,12	3,00	1,76	1,90
	0,18	**0,53**	**0,44**	1,16	7,32	14,75	3,61	4,36
η							0,97	0,16
ω					0,01	0,09	0,35	0,85
					0,23	7,03		134,89
a								0,41
								144,67
J-Test	24,01	25,17	22,62	23,27	30,21	22,83	100,48	102,25
p-val	0,0002	0,0000	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Les paramètres obtenus sont généralement cohérents avec ceux recensés dans la littérature. Le CCAPM et le modèle EZW souffrent de façon générale des symptômes des énigmes de tarification, c'est-à-dire un coefficient d'aversion au risque élevé et un facteur d'actualisation subjectif supérieur à un. L'ESI associée au modèle EZW est également faible de façon générale à l'exception de Vissing-Jorgensen (2009) qui obtient des valeurs supérieures à un et de près de deux lorsque seuls les individus qui participent aux marchés boursiers sont considérés ou encore de Ludvigson *et al.* (2012) qui obtiennent des valeurs de l'ordre de deux lorsque la valeur de continuité de l'utilité future normalisée par la consommation des biens non durables est estimée directement par une approximation non linéaire.

Yogo (2006) estime un coefficient d'aversion au risque élevé et une ESI faible dans les différentes estimations inconditionnelles de son modèle. L'ESA est généralement de l'ordre de 0,6, le facteur d'actualisation subjectif inférieur à un et le coefficient de proportionnalité de l'ordre de 0,8. L'estimation de ces derniers paramètres diffère de celle présentée au tableau 4. Les données et programmes de Yogo (2006) sont disponibles[24]. Nous avons répliqué ses résultats à partir de notre procédure GMM et ses données qui couvrent la période 1951-2001. La réplication des résultats nécessite cependant d'imposer la restriction théorique du modèle EZW sur le facteur d'actualisation subjectif et de le borner à un. Nous poursuivons plutôt l'approche d'Espstein et Zin (1991) en ne contraignant par le facteur d'actualisation subjectif à être égal ou inférieur à un dû à sa relation avec le taux d'intérêt sans risque dans un cadre d'analyse déterministe et l'énigme du taux sans risque.

Tel que mentionné précédemment, Piazzesi *et al.* (2007) et Fillat (2008) procèdent à l'analyse des implications de tarification de leurs modèles à partir d'exercices de calibration et simulations. Au meilleur de nos connaissances, il s'agit de la première estimation par GMM de ces modèles.

De façon générale, les valeurs des paramètres obtenues pour les différents modèles sont alignées sur celles observées lors de l'estimation de leur représentation factorielle du tableau 3. L'estimation des coefficients de proportionnalité était cependant à la valeur maximale pour la fonction d'utilité CES intra-temporelle et la fonction de production CD.

Le tableau 20 présente les résultats en utilisant cette fois 25 portefeuilles Fama-French. L'augmentation du nombre de portefeuilles est susceptible de permettre une meilleure identification des paramètres en caractérisant un espace plus vaste pour les rendements. Cependant, l'augmentation du nombre de portefeuilles est également susceptible d'accroître les problèmes associés à la singularité ou quasi-singularité de la matrice de pondération optimale dans la seconde étape.

Les résultats obtenus sont similaires à ceux du tableau 19 pour le coefficient d'aversion au risque, l'ESI et le facteur d'actualisation subjectif. Le niveau des paramètres varie cependant davantage par rapport aux résultats précédents pour l'ESA et les facteurs de proportionnalité de la fonction d'utilité intratemporelle et de la fonction de production

[24] Disponibles à : https://sites.google.com/site/motohiroyogo/home/research/#AssetPricing

domestique. Cette variation est également observée pour la seconde ronde d'estimations. Les erreur-types du SCAPM7 présentent des valeurs extrêmes pour l'ensemble des paramètres tant à la première qu'à la seconde étape. Les *J-test* pour la seconde ronde d'estimation rejettent encore tous les modèles. L'ajout de portefeuilles ne semble pas permettre une meilleure identification des paramètres associés principalement à la fonction d'utilité intratemporelle et la fonction de production domestique.

La section suivante effectue l'estimation des modèles mais en utilisant à la première étape l'inverse de la matrice des paiements associée à l'estimation de la distance de Hansen et Jagannathan (1997).

Tableau 20 : Estimation inconditionnelle par GMM une et deux étapes, 25 portefeuilles Fama-French 1960-2010

Évaluation inconditionnelle des modèles non-linéaires par GMM en une (identité avec ajustement pour le taux sans risque) et deux étapes avec 25 portefeuilles de Fama et French (1992, 1992) de 1960 à 2010 segmentés selon le ratio de la valeur au livre sur la valeur marchande (HML) et la taille (SMB) et le taux sans risque. Les résultats sont présentés pour un retard de l'erreur-type HAC de Newey et West (1987a). Les erreur-types sont présentées en caractères gras losrqu'elles sont associées à une statistique t significative à au moins 5% pour le paramètre. La le *J-Test* et sa *p-value* sont présentés au bas des sections.

	GMM 1 Identité							
	CCAPM	EZW	Piazzesi et al. (2007)	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
γ	161,85	111,08	52,01	40,12	139,70	191,60	96,69	138,23
	208,67	**63,30**	160,78	57,80	**64,04**	95,32	50,39	**60,91**
ρ		0,0021	0,0192	0,0096	0,0027	0,0024	0,0256	0,0033
		0,0098	0,0594	0,0299	0,0094	0,0057	0,0197	0,0103
ε			0,897	1,291	0,244	1,134	0,000	0,169
			0,491	1,084	0,988	27,34	0,001	
β	1,09	2,18	0,76	1,103	2,76	3,00	1,00	2,06
	0,44	7,97	0,91	0,97	11,44	7,74	**0,04**	5,44
η							0,01	0,16
							2,06	
ω					0,46	0,29	0,08	0,87
					0,55	10,34		
α								0,42
J-Test	41,95	42,17	37,15	41,63	42,17	46,60		
p-val	0,013	0,009	0,031	0,007	0,006	0,002		
	GMM2							
γ	131,50	84,39	97,84	167,63	107,54	191,60	61,11	138,23
	30,20	**33,60**	54,75	**48,84**	**38,70**	**45,72**	37,50	**41,89**
ρ		0,0018	0,0102	0,0024	0,0030	0,0018	0,0167	0,0033
		0,0106	0,0057	0,0063	0,0081	0,0049	0,0143	0,0078
ε			0,647	3,000	3,000	0,862	0,198	0,169
			0,418	6,801	27,51	17,62	1,839	
β	1,14	3,00	1,10	0,18	3,00	2,98	1,00	2,06
	0,09	19,65	**0,27**	0,79	8,90	8,68	**0,15**	3,96
η							0,35	0,16
							0,11	
ω					0,17	0,22	0,88	0,87
					0,15	9,61	4,89	
α								0,42
J-Test	60,53	53,13	49,83	53,13	51,55	86,12	54,05	
p-val	0,0001	0,0004	0,0010	0,0002	0,0004	0,0000	0,0002	

4.6.2. Estimation inconditionnelle de la distance de Hansen-Jagannathan avec les portefeuilles Fama-French et le taux sans risque

Le tableau 21 présente les résultats de l'estimation des modèles par GMM en deux étapes mais en utilisant cette fois comme matrice de départ l'inverse de la matrice des paiements des actifs financiers à partir des moments (70') sur le rendement total des six portefeuilles Fama-French et (67') pour l'actif sans risque. La section inférieure du tableau présente en plus du *J-test* et de sa *p-value* la mesure de la DHJ, son erreur-type selon l'hypothèse que le modèle est mal énoncé et la *p-value* de la statistique présentée à l'équation (100) pour l'hypothèse Ho que la DHJ est égale à zéro et que le modèle est bien énoncé. Le test LM (102) vérifie également l'hypothèse que les multiplicateurs de Lagrange (103) sont conjointement nuls et que le modèle est par conséquent bien énoncé.

Tableau 21 : Estimation inconditionnelle GMM distance Hansen-Jagannathan et deux étapes, 6 portefeuilles Fama-French 1960-2010

Évaluation inconditionnelle des modèles non-linéaires par GMM en une (distance Hansen-Jagannathan) et deux étapes avec 6 portefeuilles de Fama et French (1992, 1992) de 1960 à 2010 segmentés selon le ratio de la valeur au livre sur la valeur marchande (HML) et la taille (SMB) et le taux sans risque. Les résultats sont présentés pour un retard de l'erreur-type HAC de Newey et West (1987a). Les erreur-types sont présentées en caractères gras losrqu'elles sont associées à une statistique t significative à au moins 5% pour le paramètre. La le *J-Test* et sa *p-value* sont présentés au bas des sections suivis pour la section du haut de la DHJ, de son erreur-type, de la *p-value* du test statisque de Jagannathan et Wang (1996) pour l'hypothèse *H0* que la DHJ est nulle et le test LM de Gospodinov et al. (2013) et sa *p-value* pour l'hypothèse *H0* que les multiplicateurs de Lagrange sont conjointement nuls et que le modèle est bien énoncé.

	Distance Hansen-Jagannathan							
	CCAPM	EZW	Piazzesi et al. (2007)	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
γ	100,78	18,16	28,34	28,06	46,12	101,83	73,59	79,59
	55,92	98,85	118,06	117,09	28,60	111,27	195,44	115,43
ρ		0,0105	0,0353	0,0332	0,010	0,005	0,003	0,004
		0,0095	0,1470	0,1461	**0,002**	0,003	0,040	**0,001**
ε			0,92	1,09	2,80	0,41	0,24	0,24
			0,40	0,57	**1,00**	**0,06**	0,21	**0,11**
β	1,36	1,43	0,95	0,95	2,32	1,97	3,37	2,41
	0,09	1,41	0,60	0,64	**0,33**	**0,27**	58,82	1,68
η							0,99	0,15
							0,31	0,80
ω					0,50	0,38	0,99	0,92
					0,38	0,32	**0,05**	0,55
a								0,83
								3,79
J-Test	22,75	23,98	22,01	22,05	23,42	0,72	62,16	
p-val	0,0004	0,0001	0,0002	0,0001	0,0000	**0,6992**	0,0000	
DHJ	0,453	0,451	0,444	0,444	0,464	0,456	0,431	0,442
Erreur-type DHJ	**0,09**	**0,08**	**0,09**	**0,09**	**0,08**	**0,10**	**0,09**	**0,09**
p-val	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
LM Stat	22,75	24,64	22,01	22,05	16,56	3,96	8,95	
p-val	0,0004	0,0001	0,0002	0,0001	0,0003	**0,1379**	0,0028	
	DHJ GMM2							
γ	141,36	80,61	22,16	29,96	46,12	101,83	130,23	79,59
	71,92	124,16	157,01	186,31	134,90	237,11	548,33	
ρ		0,0082	0,0451	0,0256	0,0102	0,0051	0,0042	0,0038
		0,0118	0,3196	0,1979	0,2537	0,0287	0,0253	
ε			0,95	1,09	2,80	0,41	0,27	0,24
			0,39	0,83	122,50	141,82	13,58	
β	1,31	1,48	0,84	0,87	2,32	1,97	1,91	2,41
	0,11	1,01	0,69	1,11	65,31	8,60	7,95	
η							0,97	0,15
							7,97	
ω					0,50	0,38	0,99	0,92
					12,84	490,16	3,99	
a								0,83
J-Test	23,56	26,55	22,12	22,17	31,54	23,99	23,74	
p-val	0,0003	0,0000	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	

Pour la première étape associée à l'estimation de la DHJ, les coefficients d'aversion au risque sont élevés à l'exception de ceux des modèles de Piazzesi *et al.* (2007) et Fillat (2008) qui sont de l'ordre de 28, du modèle EZW à 18,16 et de Yogo (2006) à 46,12. Les coefficients d'aversion au risque sont cependant tous non significatifs et présentent généralement des erreur-types élevées. Les ESI sont encore une fois très faibles et non significatives. Les ESA varient entre 24% pour le SCAPM et 280% pour le modèle de Yogo (2006) et sont significatives à l'exception de celle du SCAPM. Les intervalles de confiance à 95% associées aux erreur-types comprennent les ESA estimées par cointégration pour tous les modèles. Les facteurs d'actualisation subjectif sont tous supérieurs à un à l'exception des modèles de Piazzesi *et al.* (2007) et Fillat (2008) qui s'établissent à 0,95 mais sont non significatifs. Les coefficients de proportionnalité de l'utilité intratemporelle pour le modèle de Yogo (2006) et le modèle avec stock d'habitation sont de 0,50 et 0,38 et sont non significatifs.

Pour leur part, les coefficients de proportionnalité de la fonction de production domestique de la consommation structurée et l'utilité intratemporelle pour le SCAPM sont de 0,99 et significatifs alors qu'ils s'établissent respectivement à 0,15 et 0,92 pour le SCAPM7 mais sont non significatifs. Finalement, l'élasticité de substitution de la fonction de production de deuxième niveau *a* du SCAPM7 et de 0,83, mais non significative. Les paramètres obtenus lors de la seconde ronde d'estimation sont similaires mais en général non significatifs. L'estimation des erreur-types pour le SCAPM7 présentent encore une fois un problème de valeurs extrêmes. Les valeurs des paramètres sont cependant cohérentes, pour la plus part, avec l'estimation de la première ronde.

Les modèles sont tous rejetés par le *J-test* à l'exception du modèle avec stock d'habitation. La DHJ la plus faible est obtenue pour le SCAPM à 0,43 et la plus haute pour le DCAPM à 0,46. Les résultats du test LM pour ces modèles concordent avec les résultats du *J-test* alors que l'ensemble des modèles sont rejetés. Les *p-values* du test pour une DHJ nulle rejettent également tous les modèles. Le *J-test* et le test LM pour le SCAPM7 ne peuvent cependant être évalués puisque le nombre de moments utilisés pour l'estimation est égal au nombre de paramètres estimés. Les modèles sont également rejetés par les *J-tests* de la seconde ronde.

Le tableau 22 reprend l'analyse, mais cette fois avec 25 portefeuilles Fama-French. Les coefficients d'aversion au risque sont du même ordre que pour l'estimation avec six portefeuilles à l'exception du modèle de Fillat (2008) qui est de 3,75 mais non significatif. Les ESI sont demeurées faibles mais plusieurs sont cette fois significatives. Les ESA et les coefficients de proportionnalité de la fonction d'utilité intratemporelle et de la fonction de production domestique sont également demeurés relativement stables à l'exception du modèle avec stock d'habitation et des modèles avec consommation structurée SCAPM et SCAPM7.

Les *J-tests* et les tests LM rejettent tous les modèles. La DHJ la plus faible est toujours obtenue pour le SCAPM et la plus haute pour le DCAPM alors que les *p-value* des tests pour une DHJ nulle rejettent également tous les modèles. Les *J-tests* de la seconde ronde d'estimation rejettent également tous les modèles. Les paramètres obtenus entre les deux

rondes d'estimation sont en général du même ordre. Les erreur-types sont cependant plus importantes et présentent des valeurs extrêmes dans le cas du SCAPM pour les paramètres de la fonction d'utilité intratemporelle et la fonction de production domestique.

Tableau 22 : Estimation inconditionnelle GMM distance Hansen-Jagannathan et deux étapes, 25 portefeuilles Fama-French 1960-2010

Évaluation inconditionnelle des modèles non-linéaires par GMM en une (distance Hansen-Jagannathan) et deux étapes avec 25 portefeuilles Fama et French (1992, 1992) de 1960 à 2010 segmentés selon le ratio de la valeur au livre sur la valeur marchande (HML) et la taille (SMB) et le taux sans risque. Les résultats sont présentés pour pour un retard de l'erreur-type HAC de Newey et West (1987a). Les erreur-types sont présentées en caractères gras losrqu'elles sont associées à une statistique t significative à au moins 5% pour le paramètre. La le *J-Test* et sa *p-value* sont présentés au bas des sections suivis pour la section du haut de la DHJ, de son erreur-type, de la *p-value* du test statisque de Jagannathan et Wang (1996) pour l'hypothèse *H0* que la DHJ est nulle et le test LM de Gospodinov et al. (2013) et sa *p-value* pour l'hypothèse *H0* que les multiplicateurs de Lagrange sont conjointement nuls et que le modèle est bien énoncé.

	Distance Hansen-Jagannathan							
	CCAPM	EZW	Piazzesi et al. (2007)	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
γ	79,29	19,37	20,59	3,75	46,12	101,88	80,93	79,72
	31,8	219,87	83,72	107,9	47,9	**28,5**	61,5	**38,72**
ρ		0,0112	0,0486	0,0637	0,0102	0,0066	0,0215	0,0051
		0,0113	0,1975	1,9061	**0,0026**	**0,0017**	**0,0042**	**0,0024**
ε			0,929	1,011	2,799	0,526	0,000	0,408
			0,348	**0,457**	1,870	**0,012**	**0,000**	**0,080**
β	1,30	1,38	0,99	0,71	2,32	1,68	1,09	1,97
	0,08	2,67	**0,39**	3,72	**0,54**	**0,09**	**0,02**	**0,39**
η							0,01	0,26
							0,04	0,20
ω					0,50	0,49	0,05	0,87
					0,55	0,32	17,84	**0,22**
α								0,71
								1,20
J-Test	46,92	164,56	44,19	44,24	57,23	51,77		51,46
p-val	0,0034	0,0000	0,0050	0,0033	0,0000	0,0002		0,0001
DHJ	0,648	0,645	0,638	0,636	0,651	0,652	0,553	0,647
Erreur-type DHJ	**0,09**	**0,094**	**0,09**	**0,09**	**0,10**	**0,10**	**0,07**	**0,09**
p-val	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
LM Stat	46,92	47,33	44,19	44,24	42,81	42,96	46,24	40,15
p-val	0,0034	0,0020	0,0050	0,0033	0,0033	0,0032	0,0007	0,0031
	DHJ GMM2							
γ	80,14	35,11	35,57	23,27	46,12	101,88	24,75	79,72
	31,00	36,18	57,40	57,25	51,52	84,47	40,51	100,20
ρ		0,0049	0,0281	0,0234	0,0102	0,0066	0,0131	0,0051
		0,0246	0,0454	0,0764	0,0300	0,0133	0,0372	0,0164
ε			0,865	1,117	2,799	0,526	0,000	0,408
			0,311	**0,480**	49,152	23,437		102,05
β	1,28	2,17	1,03	1,01	2,32	1,68	0,86	1,97
	0,12	8,68	**0,30**	0,58	6,18	1,85	0,73	5,28
η							0,01	0,26
								247,16
ω					0,50	0,49	0,06	0,87
					1,05	51,01		83,27
α								0,71
								177,70
J-Test	46,92	47,32	44,18	44,19	47,37	46,28		46,51
p-val	0,0034	0,0020	0,0050	0,0034	0,0008	0,0012		0,0004

À la lumière des résultats précédents, les modèles de tarification intégrant différents types de biens et services de consommation semblent varier selon la spécification de la procédure d'estimation. La non-linéarité des facteurs d'actualisation stochastique de cette classe de modèles rend l'identification des paramètres plus difficile et en particulier ceux caractérisant la fonction d'utilité intratemporelle et la fonction de production domestique.

La matrice jacobienne des dérivées première de l'espérance des moments (87) est très sensible à l'ESA, et les facteurs de proportionnalité.

Pour certaines valeurs de ces paramètres, les colonnes de la matrice jacobienne qui leur sont associées tendent vers zéro. Cela a pour effet de rendre la matrice issue de la forme quadratique sur la matrice jacobienne dans l'expression de la covariance des paramètres (86) quasi-singulière et très instable lors de l'inversion. L'inversion de cette matrice quasi-singulière peut causer les valeurs extrêmes rencontrées dans les séries d'estimation précédentes. Ce phénomène est caractéristique d'un problème d'identification des paramètres puisque la matrice jacobienne doit en effet être de plein rang pour l'identification des paramètres.

Une autre cause potentielle est liée à l'utilisation d'une matrice inverse comme matrice de pondération à la première étape de GMM, comme dans le cas de l'approche associée à la distance de Hansen-Jagannathan où la matrice inverse des paiements des actifs est utilisée ou encore à la seconde étape où l'inverse de la matrice de pondérations issue de la première étape est utilisée. Encore une fois, une condition de plein rang est exigée dans l'estimateur GMM, mais cette fois sur la matrice de pondération.

Les résultats obtenus laissent présager que les deux phénomènes sont présents dans l'estimation standard des modèles par GMM. Le problème d'identification pour les modèles avec différents biens de consommation est présent dans les deux séries d'estimation, alors que le problème de singularité des matrices de pondération est lié aux secondes étapes d'estimation et à la première étape dans le cas de l'estimation associée à la distance de Hansen-Jagannathan. La section suivante présente une solution au problème d'identification associée aux paramètres qui caractérisent la fonction d'utilité intratemporelle et la fonction de production domestique à partir des paramètres de l'approche par cointégration.

4.7. Estimation inconditionnelle des modèles non linéaires reposant sur les relations de cointégration.

Afin de résoudre les problèmes d'identification associés aux paramètres de la fonction d'utilité intratemporelle et de la fonction de production domestique du service de consommation structurée, nous utilisons les paramètres du tableau 16 issus de l'analyse par cointégration pour calibrer le terme associé au risque de composition de la consommation des facteurs d'actualisation stochastique de chacun des modèles. Nous effectuons l'analyse à partir de l'estimation par GMM associée à la distance de Hansen-Jagannathan et l'estimateur GMM en deux étapes qui lui est associé pour les 25 portefeuilles Fama-French et le taux sans risque[25]. Le maximum de paramètres à estimer pour chacun des modèles est alors de trois; c'est-à-dire le facteur d'actualisation subjectif β, le coefficient d'aversion au risque γ et l'ESI ρ. Les paramètres issus des relations de cointégration sont *super-consistent* et n'affecte pas les propriétés asymptotique de l'estimateur GMM.

[25] Les résultats avec 6 portefeuilles sont globalement similaires.

Le tableau 23 présente les résultats. La section du haut présente les résultats pour l'estimation en une étape associée à la distance de Hansen-Jagannathan à partir d'une calibration initiale des termes de risque de composition de la consommation. L'estimation des coefficients d'aversion au risque des modèles varie entre 16,9 pour le modèle contraint avec consommation structurée SCAPM et 79,29 pour le CCAPM. Les coefficients pour le modèle avec biens durables, biens d'habitation, le modèle avec consommation structurée SCAPM7 et le modèle EZW sont tous de l'ordre de 20 est non significatifs avec des erreur-types variant entre 53,53 pour le DCAPM et 219,87 pour le modèle EZW. Le coefficient d'aversion au risque pour le HCAPM de Piazzesi *et al.* (2007) est plus élevé à 62,29 mais significatif alors que le coefficient pour le modèle de Fillat (2008) est de 55,54 mais non significatif. Les ESI estimées sont toutes de l'ordre de 1% et significatives dans le cas du modèle de Piazzesi *et al.* (2007) et de Yogo (2006).

Tableau 23 : Estimation inconditionnelle GMM distance Hansen-Jagannathan et deux étapes, 25 portefeuilles Fama-French 1960-2010 avec les paramètres de cointégration

Évaluation inconditionnelle des modèles non-linéaires par GMM en une (distance Hansen-Jagannathan) et deux étapes avec 25 Portefeuilles de Fama et French (1992, 1992) de 1960 à 2010 segmentés selon le ratio de la valeur au livre sur la valeur marchande (HML) et la taille (SMB) et le taux sans risque. Les résultats sont présentés pour un retards de l'erreur-type HAC de Newey et West (1987a). Les erreur-types sont présentées en caractères gras losrqu'elles sont associées à une statistique t significative à au moins 5% pour le paramètre. La le *J-Test* et sa *p-value* sont présentés au bas des sections suivis pour la section du haut de la DHJ, de son erreur-type, de la *p-value* du test statisque de Jagannathan et Wang (1996) pour l'hypothèse *H0* que la DHJ est nulle et le test LM de Gospodinov et al. (2013) et sa *p-value* pour l'hypothèse *H0* que les multiplicateurs de Lagrange sont conjointement nuls et que le modèle est bien énoncé.

	Distance Hansen-Jagannathan							
	CCAPM	EZW	Piazzesi et al. (2007)	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
γ	79,29	19,37	62,29	55,34	20,06	19,10	16,90	18,34
	31,77	219,87	**19,76**	59,03	53,53	182,90	88,05	131,17
ρ		0,011	0,016	0,006	0,014	0,011	0,010	0,011
		0,011	**0,005**	0,023	**0,004**	0,0108	0,010	0,011
β	1,30	1,38	1,20	1,73	1,34	1,39	1,48	1,42
	0,08	2,67	**0,03**	3,91	**0,64**	2,33	1,56	1,86
J-Test	46,92	164,56	45,79	45,78	296,21	156,36	101,85	134,73
p-val	0,003	0,000	0,005	0,003	0,000	0,000	0,000	0,000
DHJ	0,648	0,645	0,642	0,642	0,643	0,646	0,648	0,646
Erreur-type DHJ	**0,093**	**0,094**	**0,092**	**0,092**	**0,095**	**0,094**	**0,094**	**0,094**
p-val	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
LM Stat	46,92	47,33	45,79	45,78	47,32	47,30	47,01	47,17
p-val	0,003	0,002	0,005	0,003	0,002	0,002	0,002	0,002
	DHJ GMM2							
γ	80,14	35,11	63,90	53,63	45,53	36,00	45,81	39,44
	31,00	36,18	**23,20**	29,18	39,90	37,58	46,62	40,18
ρ		0,005	0,016	0,005	0,005	0,005	0,004	0,004
		0,025	**0,006**	0,016	0,018	0,024	0,018	0,022
β	1,28	2,17	1,17	1,85	2,31	2,28	3,00	2,46
	0,12	8,68	**0,07**	3,86	6,80	9,83	16,12	10,88
J-Test	46,92	47,32	45,79	45,78	47,30	47,29	46,99	47,16
p-val	0,003	0,002	0,005	0,003	0,002	0,002	0,002	0,002

La valeur de ces paramètres implique pour les modèles avec une fonction d'utilité EZW un terme κ inférieur à un et positif; ce qui traduit une préférence pour une résolution hâtive de l'incertitude et permet d'obtenir des primes de risque positives pour le risque de consommation des biens non durables, le risque de composition de la consommation et le risque de la croissance de la richesse totale tel que présenté à l'équation (84) de la section 3.3.2 dans le cadre linéaire. Les facteurs d'actualisation subjectif sont supérieurs à un et significatifs dans le cas du CCAPM, du modèle de Piazzesi *et al.* (2007) et de Yogo (2006). Les énigmes de tarification semblent donc demeurées entières malgré une bonification du risque de consommation.

Les modèles sont tous rejetés fortement par les *J-test* et les tests LM. Les DHJ sont similaires et comprises entre 0,64 et 0,65 et significatives. Les DHJ rejettent également l'hypothèse nulle que les modèles sont énoncés correctement. La seconde ronde d'estimation ne change pas globalement l'analyse des résultats pour les modèles. Les coefficients d'aversion au risque de l'ordre de 20 obtenus à la première ronde pour certains modèles sont maintenant d'environ 40 et mieux estimés avec des erreur-types du même ordre.

Les problèmes d'identification associés principalement aux paramètres de la fonction d'utilité intratemporelle CES et de la fonction de production domestique de la consommation structurée sont résolus en utilisant les valeurs des paramètres issus de l'approche par cointégration. Les matrices jacobienne des dérivées premières sont de plein rang pour les trois paramètres estimées à la première et seconde ronde d'estimation. Cependant, les valeurs élevées de certaines erreur-types laissent entrevoir des problèmes potentiels de singularité ou de quasi-singularité pour la matrice de pondération où pour la matrice $F'\Sigma^{-1} F$ issue de la forme quadratique sur la matrice jacobienne dans l'expression de la covariance des paramètres (86) où elle intervient directement. Dans le cas de l'estimation associée à la distance de Hansen-Jagannathan, la matrice des paiements Ω présente des valeurs propres très faibles.

Les valeurs propres de la matrice des paiements décroissent rapidement et les 5 dernières valeurs sont inférieures à 0,0003 et la valeur minimale est de 0,00019. Lorsque son inverse est utilisée dans l'expression $F'\Omega^{-1} F$ où la matrice jacobienne est de plein rang mais susceptible de présenter également de petites valeurs propres, la matrice résultante sera quasi-singulière. Par exemple, dans le cas du SCAPM7, la plus petite valeur propre de la matrice jacobienne est de 0,0007; ce qui, *a priori,* ne pose pas non plus de problème. Cependant, la plus petite valeur propre de la matrice $F'\Omega^{-1} F$ est dans ce cas de 0,0000028 et la matrice inverse entrant dans la construction de la matrice de covariance présente des valeurs très élevées. La matrice $F'\Omega^{-1}F$ intervient également dans la matrice de covariance (94) des moments du *J-test* (93) pour une matrice de pondération non optimale.

Les statistiques J et les erreur-types pour certains modèles des tableaux 18 à 22 sont symptomatiques d'un problème de quasi-singularité de la matrice $F' \Omega^{-1} F$. Comme nous pouvons le constater pour le CCAPM et les modèles de Piazzesi *et al.* (2007) et Fillat (2008), la statistique LM est numériquement identique à la statistique J pour une matrice de pondération non optimale. En fait, en observant attentivement l'expression du test LM (102) et celle de l'estimateur (103) des multiplicateurs de Lagrange, nous pouvons réécrire le test LM selon l'équation (131). Le terme complexe entre les moments $g(\theta,X)$ se trouve en fait à être une matrice inverse généralisée de la matrice de covariance des moments (94) à partir de laquelle le *J-test* (93) pour une matrice de pondération sous optimale est formé[26]. Puisque ce terme n'implique pas l'inverse de la matrice $F' \Omega^{-1} F$, la statistique du test n'est donc pas affectée par sa quasi-singularité.

[26] Nous pouvons vérifier qu'il s'agit effectivement d'une matrice pseudo-inverse de la matrice de covariance (94) en effectuant leur produit. Le produit d'une matrice et de sa matrice pseudo-inverse doit donner une matrice idempotente de même rang plutôt qu'une matrice identité; ce qui est le cas.

(131) $$LM_{\lambda} = Tg(\hat{\theta}, X)'\Omega^{-1}\Omega^{1/2}U(U\Omega^{-1/2}S\Omega^{-1/2}U)^{-1}U\Omega^{1/2}\Omega^{-1}g(\hat{\theta}, X)$$

Le test LM suggéré par Gospodinov *et al.* (2013) est donc numériquement identique au *J-test*. De plus, puisque les deux statistiques sont distribuées selon une loi Chi-carré avec un degré de liberté égal au nombre de moments moins le nombre de paramètres, les deux tests sont alors identiques. Le test LM peut ainsi être employé comme alternative au *J-test* lorsque ce dernier est potentiellement sujet à des problèmes associés à la quasi-singularité de la matrice $F' \Omega^{-1} F$. Notons cependant que si la matrice des paiements Ω est quasi-singulière, le test LM sera également dégénéré.

Pour diagnostiquer le problème des *J-tests* anormalement élevés, nous procédons à une pseudo-inversion de la matrice $F' \Omega^{-1} F$ de l'équation (93) afin d'évaluer la robustesse des résultats obtenus au tableau 20. Pour ce faire, nous utilisons l'approche d'inversion de régularisation de Dufour et Valéry (2011) discutée à la section 4.3.3 et détaillée à l'annexe D. Cette approche de pseudo-inversion permet de conserver une partie de l'information sur les petites valeurs propres comparativement à l'approche de Moore-Penrose où les valeurs propres inférieures au seuil sélectionné sont fixées à zéro. Nous utilisons comme seuil sur les valeurs propres 0,000001, soit un seuil inférieur à la plus petite valeur critique de la matrice des paiements et de la matrice $F' \Omega^{-1} F$ pour le SCAPM7. Les valeurs propres inférieures à ce seuil sont ainsi fixées à zéro en appliquant l'inversion selon l'équation (96). Nous obtenons des statistique *J-stats* identiques sans pseudo-inversion. Les erreur-types ne sont également pas affectées par la régularisation de la matrice. Les erreur-types ne semblent donc pas affectées par un problème de singularité de la matrice $F' \Omega^{-1} F$. La problématique des *J-tests* qui diffèrent des statistiques LM qui leurs sont associées est reliée globalement au terme (132) de la matrice de covariance des moments (94) utilisée dans le *J-test* (93) pour une matrice de pondération quelconque.

(132) $$F(F'\Omega^{-1}F)^{-1}F'\Omega^{-1}$$

Ce terme fait intervenir à plusieurs reprises la matrice jacobienne et la matrice de pondération, en l'occurrence la matrice inverse des paiements pour la distance de Hansen-Jagannathan. Ce terme est numériquement instable; ce qui explique les valeurs des J-tests de la première ronde d'estimation. La construction de la statistique LM est plus stable dans la mesure où la matrice de pondération demeure non-singulière. Le test LM représente donc une alternative au *J-test* pour l'estimation par GMM n'utilisant pas la matrice optimale de pondération. La section suivante poursuit l'analyse des modèles à partir d'une procédure de test pour identifier les risques de consommation pertinents pour les modèles de tarification.

5. Procédure de test pour les modèles de tarification fondés sur la consommation

Les modèles de tarification reposant sur la consommation sont caractérisés par différents risques de consommation selon les biens, la fonction d'utilité intertemporelle, la fonction d'utilité intratemporelle et la fonction de production domestique considérés. Les modèles utilisant une fonction EZW ajoutent au risque de consommation usuel associé au CCAPM un risque de long terme puisque la consommation n'est alors plus séparable dans le temps. Les modèles qui considèrent pour leur part plus d'un bien de consommation intègrent alors à travers la fonction d'utilité intratemporelle employée un risque de composition de la consommation. Le risque de composition de la consommation présentera également une dimension de long terme dans le cadre d'une fonction d'utilité EZW.

Les résultats du tableau 23 semblent indiquer que le risque de composition de consommation sous différente forme et sa dimension de long terme sont peu susceptibles d'améliorer la performance du CCAPM et du modèle EZW. Nous formalisons cette observation à partir de trois procédures de tests. Le *D-test* de Newey et West (1987b), des tests de Wald et finalement le test proposé par Gospodinov *et al.* (2013) (104) sur la différence des carrés des DHJ.

Nous débutons la comparaison des modèles par les tests de différence de statistiques *J* (*D-test*) pour les modèles emboîtés; c'est-à-dire pour les modèles pouvant s'écrire à partir de restrictions paramétriques sur un modèle général. Nous utilisons cependant les statistiques LM de la première ronde d'estimation associée à la distance de Hansen-Jagannathan dans la construction du test. Tous les modèles sont estimés avec la matrice inverse des paiements comme matrice de pondération et sont donc comparables directement à partir de leur statistique *J* ou LM. La statistique du test suit alors une distribution Chi-carré avec comme degrés de liberté le nombre de restrictions. Dans le cas du modèle de Piazzesi *et al.* (2007), la contrainte pour obtenir le CCAPM est l'égalité de l'ESA et de l'ESI ($\varepsilon = \rho$). Les deux biens sont alors séparables. La contrainte pour obtenir le CCAPM à partir du modèle EZW est pour sa part l'égalité entre le coefficient d'aversion au risque et l'inverse de l'ESI $\gamma = 1/\rho$. La consommation est alors séparable dans le temps. Pour l'ensemble des autres modèles, cette dernière contrainte permet d'obtenir la version du modèle avec une fonction d'utilité puissance plutôt qu'une fonction d'utilité EZW alors que la contrainte sur l'égalité de l'ESI et de l'ESA permet de retrouver le modèle EZW. Finalement, l'application des deux contraintes sur ces modèles permet d'obtenir le CCAPM.

Afin de tester ces différentes restrictions pour tous les modèles, nous avons estimé le modèle de Yogo (2006) avec une fonction d'utilité puissance; c'est-à-dire un modèle un modèle similaire à Ogaki et Reinhart (1998). Nous avons également effectuée l'estimation avec utilité puissance pour le modèle avec stock d'habitation et les deux modèles avec consommation structurée. Les facteurs d'actualisation stochastique de ces modèles sont obtenus en appliquant les résultats généraux sur les facteurs d'actualisation

stochastique présentés précédemment. Le tableau 24 présente les résultats de l'estimation de ces modèles et reprend les résultats du tableau 23 à titre comparatif. Le tableau présente dans la section du haut les modèles avec une utilité EZW alors que la section du bas présente les résultats pour l'utilité puissance des modèles correspondants. Les coefficients d'aversion au risque et les facteurs d'actualisation subjectif estimés sont encore une fois typiques des énigmes de la prime de risque et du taux sans risque alors que les ESI sont faibles pour l'ensemble des modèles. Puisque les modèles reposent sur une fonction d'utilité puissance, le coefficient d'aversion au risque est obtenu à partir de l'inverse de l'ESI similairement au modèle de Piazzesi *et al.* (2007). Les paramètres sont estimés précisément alors que seulement deux coefficients d'aversion au risque sont non significatifs dans la seconde ronde d'estimation; soit pour le modèle d'Ogaki et Reinhart (1998) et le SCAPM. Le tableau 25 présente les résultats des tests de différence.

Tableau 24 : Estimation inconditionnelle GMM pour la distance de Hansen-Jagannathan, 25 portefeuilles Fama-French 1960-2010 et les paramètres de cointégration pour les spécifications avec utilité EZW et puissance des modèles

Évaluation inconditionnelle des modèles non-linéaires par GMM en une étape pour la distance de Hansen-Jagannathan avec 25 Portefeuilles de Fama et French (1992, 1992) de 1960 à 2010 segmentés selon le ratio de la valeur au livre sur la valeur marchande (HML) et la taille (SMB) et le taux sans risque. La section du haut présente les résultats pour la spécification des modèles avec utilité EZW alors que la section du bas présente les résultats pour l'utilité puissance. Les résultats sont présentés pour un retard de l'erreur-type HAC de Newey et West (1987a). Les erreur-types sont présentées en caractères gras losrqu'elles sont associées à une statistique t significative à au moins 5% pour le paramètre. La section suivante présente les DHJ, son erreur-type, la p-value du test statisque de Jagannathan et Wang (1996) pour l'hypothèse H0 que la DHJ est nulle et le test LM de Gospodinov et al. (2013) et sa p-value pour l'hypothèse H0 que les multiplicateurs de Lagrange sont conjointement nuls et que le modèle est bien énoncé.

	Distance Hansen-Jagannathan (Utilité EZW)					
	EZW	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
γ	19,37	55,34	20,06	19,10	16,90	18,34
	219,87	59,03	53,53	182,90	88,05	131,17
ρ	0,011	0,006	0,014	0,011	0,010	0,011
	0,011	0,023	**0,004**	0,0108	0,010	0,011
β	1,38	1,73	1,34	1,39	1,48	1,42
	2,67	3,91	**0,64**	2,33	1,56	1,86
DHJ	0,645	0,642	0,643	0,646	0,648	0,646
Erreur-type DHJ	**0,094**	**0,092**	**0,095**	**0,094**	**0,094**	**0,094**
p-val	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
LM Stat	47,33	45,78	47,32	47,30	47,01	47,17
p-val	0,002	0,003	0,002	0,002	0,002	0,002
	Distance Hansen-Jagannathan (Utilité Puissance)					
	CCAPM	Piazzesi et al. (2007)	Ogaki e Reinhart (1998)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
γ	79,29	62,29	43,17	77,69	70,94	75,61
	31,77	**19,76**	**18,45**	**30,79**	**27,10**	**29,54**
ρ		0,016	0,023	0,013	0,014	0,013
		0,005	**0,010**	**0,0051**	**0,005**	**0,005**
β	1,30	1,20	0,99	1,29	1,25	1,27
	0,08	**0,03**	**0,03**	**0,08**	**0,05**	**0,07**
DHJ	0,648	0,642	0,656	0,648	0,647	0,648
Erreur-type DHJ	**0,093**	**0,092**	**0,090**	**0,093**	**0,092**	**0,092**
p-val	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
LM Stat	46,92	45,79	48,71	46,93	47,07	47,01
p-val	0,003	0,005	0,002	0,003	0,003	0,003

Les modèles avec un risque de composition de consommation ne se démarquent pas au niveau des erreurs de tarification des 25 portefeuilles de Fama-French et de l'actif sans

risque, et ce, tant dans leur version avec utilité puissance que dans leur version avec utilité EZW. Le modèle de Piazzesi *et al.* (2007) présente la *p-value* la plus faible à 29% par rapport au CCAPM alors que le modèle de Yogo (2006) est celui qui se démarque le plus de sa contrepartie avec utilité puissance avec une *p-value* de 24%. Le tableau 26 présente les résultats de la comparaison des modèles, mais cette fois à partir des tests de Wald pour les contraintes mentionnées précédemment sur les modèles.

Tableau 25 : Test de différence sur les modèles emboîtés (*D-Test*)

Test de différence (D-test) Newey-West (1987b) sur les J-Stats de modèles emboîtés. Les *p-values* sont présentées sous les statistiques du test et sont reportées en caractère gras lorsque significatives à au moins 5%. La première colonne présente le test de différence pour les modèles avec fonction d'utilité puissance par rapport au CCAPM.

	CCAPM	EZW	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
CCAPM		-0,405	1,136	-0,405	-0,380	-0,089	-0,248
			0,567				
EZW			1,541	0,001	0,025	0,316	0,157
			0,214	0,979	0,873	0,574	0,692
Piazzesi et al. (2007)	1,132		0,004				
	0,287		0,950				
Ogaki et Reinhart (1998)	-1,794			1,389			
				0,239			
Stock d'habitation crra	-0,007				-0,373		
SCAPM crra	-0,146					0,057	
						0,811	
SCAPM7 crra	-0,088						-0,160

Les contraintes sur les paramètres des modèles avec risque de composition de la consommation pour obtenir le CCAPM sont fortement rejetées. La contrainte sur la séparabilité temporelle de la consommation des biens non durables est quant à elle non rejetée pour le modèle EZW. La séparation entre le coefficient d'aversion au risque et l'ESI ne semble donc pas justifiée dans le cadre du modèle EZW. La contrainte au niveau de la séparabilité de la consommation pour les modèles avec un risque de composition de la consommation et une utilité EZW est fortement rejetée pour l'ensemble des modèles. Ces modèles ne sont donc pas équivalents à un modèle EZW avec biens non durables. La contrainte de séparabilité des biens dans le temps n'est cependant pas rejetée pour tous ces modèles à l'exception du SCAPM et, dans une moindre mesure, le SCAPM7 dont la *p-value* est de 7,7%. La composante de long terme du risque de composition semble ainsi davantage prépondérante pour les modèles avec consommation structurée. Les tests de Wald ne sont cependant pas invariables à la formulation des contraintes. Le tableau 27 présente le test (104) sur la différence des carrés des DHJ de Gospodinov *et al.* (2013).

Tableau 26 : Test de Wald sur les modèles emboîtés

P-value des test de Wald pour les restrictions entre les modèles de consommation emboîtés. Dans le cas des modèles avec utilité puissance, la contrainte pour obtenir le CCAPM est l'équalité de l'ESA et l'ESI $\varepsilon=\rho$. La contrainte sur les modèles avec un risque de composition de la consommation pour obtenir le modèle EZW est également l'équalité de l'ESA et l'ESI alors que l'équalité du coefficient d'aversion au risque et l'inverse de l'ESI $\gamma=1/\rho$ permet d'obtenir les modèles avec utilité puissance. Finalement, les deux contraintes permettent d'obtenir le CCAPM à partir de ces derniers modèles. La première colonne présente les *p-values des* tests de Wald pour les modèles avec fonction d'utilité puissance par rapport au CCAPM.

	CCAPM	EZW	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
CCAPM		0,592	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**
EZW			**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**
Piazzesi et al. (2007)	**0,000**		0,870				
Ogaki et Reinhart (1998)	**0,000**			0,145			
Stock d'habitation crra	**0,000**				0,449		
SCAPM crra	**0,000**					**0,000**	
SCAPM7 crra	**0,000**						0,077

La statistique du produit du nombre d'observations et de la différence des carrés des DHJ est présentée à la première ligne correspondant aux modèles, suivie de la *p-value* associée à la distribution non standard présentée à l'annexe D. La statistique permet d'évaluer similairement au *D-test* la contribution des modèles avec un risque de composition de consommation à la tarification des actifs financiers. Contrairement aux statistiques *J* ou LM utilisées dans le *D-test*, les DHJ ne seront pas affectées par une simple augmentation de la volatilité du facteur d'actualisation stochastique; ce qui rend leur utilisation dans la construction de tests pour comparer des modèles de tarification plus appropriée. Les résultats obtenus permettent cette fois de différencier certains modèles.

Tableau 27 : Test sur la différence des distances de Hansen-Jagannathan des modèles emboîtés

Test de Gospodinov et *al*. (2013) sur la différence des carrés des HJD et du produit du nombre d'observations pour les modèles de consommation emboîtés. Les *p-values* sont présentées sous les statistiques du test et sont reportées en caractère gras lorsque significatives à au moins 5%. La première colonne présente le test de différence pour les modèles avec fonction d'utilité puissance par rapport au CCAPM.

	CCAPM	EZW	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
CCAPM		0,713	1,641	1,189	0,613	0,067	0,474
		1,000	0,986	0,855	0,952	0,931	0,931
EZW			0,928	0,477	-0,099	-0,646	-0,239
			0,000	**0,000**			
Piazzesi et al. (2007)	1,568		0,073				
	0,000		**0,008**				
Ogaki et Reinhart (1998)	-2,239			3,428			
				0,000			
Stock d'habitation crra	0,072				0,542		
	0,005				**0,000**		
SCAPM crra	0,200					-0,133	
	0,000						
SCAPM7 crra	0,115						0,359
	0,000						**0,000**

L'hypothèse nulle de l'égalité des DHJ entre les modèles avec risque de composition de la consommation et la DHJ du CCAPM peut uniquement être rejetée pour le modèle de Piazzesi *et al.* (2007) et les modèles avec stock d'habitation et consommation structurée pour leur spécification avec utilité puissance. La séparabilité temporelle de la consommation des biens non durables est à nouveau on rejetée pour le modèle EZW à partir des DHJ. La séparabilité de la consommation pour les modèles avec un risque de composition de la consommation ne peut être rejetée à partir de la différence des DHJ pour les modèles de Fillat (2008) et Yogo (2006). La séparabilité des biens dans le temps est cette fois rejetée pour tous les modèles à l'exception du SCAPM. Les conclusions du test sur les différences des DHJ diffèrent donc des résultats du *D-test*. Ces résultats sont à l'opposé de ceux obtenus à partir des tests de Wald pour les restrictions paramétriques. La différence provient essentiellement des erreur-types importantes sur les coefficients d'aversion au risque dont l'intervalle de confiance inclut en général l'inverse de l'ESI. D'un autre côté, la précision relative de l'ESI permet de la différentier de l'ESA, ce qui explique les résultats du test de Wald pour la séparabilité de la consommation et la différenciation des modèles avec le CCAPM et le modèle EZW.

Afin de mieux cerner le rôle du risque de composition de la consommation, considérons une classe de modèles emboîtés; par exemple le CCAPM, le modèle EZW, le HCAPM de Piazzesi *et al.* (2007) et celui de Fillat (2008). Ce dernier est le plus général des trois. Le modèle comprend le risque de consommation des biens non durables, le risque de

composition de la consommation associé au service d'habitation et finalement la dimension de long terme de ces risques à travers une utilité EZW. Le modèle de Piazzesi *et al.* (2007) ne comprend pas pour sa part la dimension de long terme de ces deux risques de consommation. La différence des erreurs de tarification ou de la DHJ de ces deux modèles traduit donc l'apport de la dimension de long terme de ces risques pour un modèle de tarification de la même manière que le modèle EZW pour le CCAPM. Dans ce dernier cas, l'apport de la dimension du risque de long terme de la consommation des biens non durables est explicite. Dans le cas des modèles de Piazzesi *et al.* (2007) et de Fillat (2008), l'apport du risque de long terme comprend à la fois celui provenant de la consommation non durable et celui du risque de composition qui comprend l'interaction entre les biens non durables et le service d'habitation à long terme. Similairement, la différence du risque de consommation total entre le modèle de Fillat (2008) et le modèle EZW comprend le risque de composition, et le risque de composition de long terme. L'apport direct du risque de composition de long terme ne peut donc pas être testé directement. Cependant, en utilisant les DHJ, nous pouvons isoler approximativement sa contribution en employant comme estimation à la contribution du risque de long terme des biens non durables la différence entre la DHJ du modèle EZW et celle du CCAPM.

Comme nous avons pu le constater dans la série de tests précédente, il existe peu de support pour le risque de long terme de la consommation des biens non durables. Par conséquent, une distinction entre les modèles avec risque de composition et une fonction d'utilité EZW et leur spécification avec une utilité puissance peut s'interpréter comme un apport du risque de composition de long terme au modèle. Effectivement, à partir du test sur la différence des DHJ, nous détectons une distinction entre les modèles avec utilité EZW et puissance lorsqu'au moins un bien de consommation est ajouté par rapport aux biens non durables, à l'exception du SCAPM. Les DHJ des modèles avec utilité puissance et risque de composition sont pour leur part statistiquement différentes des DHJ associés au CCAPM. Le risque de composition de la consommation bonifierait donc également le risque de consommation des biens non durables du CCAPM. Bien que statistiquement significatives, ces distinctions ont peu d'implications économiques pour la tarification des actifs financiers alors que les erreurs de tarification obtenues sont similaires à travers les modèles.

La crise financière récente et la récession qu'elle a engendrée ont démontré la vulnérabilité du système financier et mis en lumière l'importance systémique de certains risques, dont les risques associés au bien d'habitation. La section suivante effectue l'analyse sur la période 1960-2007 précédant la crise financière pour évaluer si les risques de consommation pertinents pour la tarification des actifs financiers ont été modifiés par la crise.

5.1. Risque de consommation sur la période 1960-2007 précédant la crise financière

Le tableau 28 présente l'estimation des modèles pour la période 1960-2007. Les paramètres pour la spécification des modèles avec utilité EZW sont, à toute fin pratique, identiques sur cette période. La crise semble donc avoir permis une certaine

différentiation des types de risque de composition, notamment ceux associés aux biens d'habitation. Les erreur-types varient cependant considérablement entre les modèles pour les coefficients d'aversion au risque qui sont non significatifs. Les ESI sont quant à elles faibles et significatives alors que les facteurs d'actualisation subjectif sont supérieurs à un et également significatifs.

Tableau 28 : Estimation inconditionnelle GMM pour la distance de Hansen-Jagannathan, 25 portefeuilles Fama-French 1960-2007 précédant la crise financière et les paramètres de cointégration pour les spécifications avec utilité EZW et puissance des modèles

Évaluation inconditionnelle des modèles non-linéaires par GMM en une (distance Hansen-Jagannathan) et deux étapes avec 25 Portefeuilles de Fama et French (1992, 1992) segmentés selon le ratio de la valeur au livre sur la valeur marchande (HML) et la taille (SMB) et le taux sans risque pour la période de 1960 à 2007, avant la crise financière. La section du haut présente les résultats pour la spécification des modèles avec utilité EZW alors que la section du bas présente les résultats pour l'utilité puissance. Les résultats sont présentés pour un retard de l'erreur-type HAC de Newey et West (1987a). Les erreur-types sont présentées en caractères gras losrqu'elles sont associées à une statistique t significative à au moins 5% pour le paramètre. La section suivante présente les DHJ, son erreur-type, la p-value du test statisque de Jagannathan et Wang (1996) pour l'hypothèse H0 que la DHJ est nulle et le test LM de Gospodinov et al. (2013) et sa p-value pour l'hypothèse H0 que les multiplicateurs de Lagrange sont conjointement nuls et que le modèle est bien énoncé.

	Distance Hansen-Jagannathan (Utilité EZW)					
	EZW	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
γ	20,11	20,12	20,11	20,12	20,09	20,10
	44,39	104,48	40,11	104,48	23,92	32,22
ρ	0,012	0,012	0,012	0,012	0,013	0,013
	0,001	**0,001**	**0,001**	**0,001**	**0,001**	**0,001**
β	1,35	1,35	1,35	1,35	1,35	1,35
	0,62	**1,38**	**0,57**	1,38	**0,36**	**0,46**
DHJ	0,693	0,685	0,693	0,685	0,696	0,694
Erreur-type DHJ	**0,095**	**0,095**	**0,095**	**0,095**	**0,095**	**0,095**
p-val	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
LM Stat	49,81	49,48	49,81	49,48	49,79	49,81
p-val	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
	Distance Hansen-Jagannathan (Utilité Puissance)					
	CCAPM	Piazzesi et al. (2007)	Ogaki e Reinhart (1998)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
γ	68,93	59,46	45,31	67,60	62,23	66,04
	26,16	**17,09**	**18,23**	**25,47**	**22,83**	**24,56**
ρ		0,017	0,022	0,015	0,016	0,015
		0,005	**0,009**	**0,006**	**0,006**	**0,006**
β	1,33	1,24	1,02	1,32	1,28	1,30
	0,11	**0,05**	**0,02**	**0,11**	**0,08**	**0,10**
DHJ	0,703	0,691	0,705	0,703	0,702	0,703
Erreur-type DHJ	**0,091**	**0,091**	**0,090**	**0,091**	**0,091**	**0,091**
p-val	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
LM Stat	50,15	49,37	51,26	50,17	50,29	50,23
p-val	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001

Les modèles sont encore une fois tous rejetés par les différents tests. La section du bas présente légèrement plus de variabilité entre les paramètres pour les modèles avec utilité puissance, en particulier au niveau du coefficient d'aversion au risque qui sont par ailleurs supérieurs aux coefficients pour la spécification avec l'utilité EZW et significatifs. Les coefficients d'aversion au risque pour les modèles avec utilité puissance sont reliés l'inverse de l'ESI qui est encore une fois estimée significativement à environ 1% pour l'ensemble des modèles. Les *D-tests*, les tests de Wald et les tests sur la différence des DHJ ne modifient pas les conclusions précédentes sur la nature des risques

de consommation pertinents pour les modèles de tarification et sont reportés à l'annexe G.

Les modèles testés jusqu'à maintenant l'ont été dans un cadre d'évaluation inconditionnel où ils ont été évalués pour leur aptitude à expliquer la variation entre la moyenne des rendements des portefeuilles. La section suivante présente l'estimation des modèles pour un cadre d'analyse conditionnelle où ils sont alors évalués en fonction de capacité à expliquer les variations des rendements dans le temps.

5.2. Procédure de test et évaluation conditionnelle des modèles de tarification fondés sur la consommation

Puisque les moments associés aux conditions d'Euler (66') et (70') sont orthogonaux par rapport à l'ensemble d'information au temps t, nous pouvons également considérer l'ajout d'un ensemble de variables z_t mesurables au temps t dans les moments puisque l'espérance conditionnelle au temps t de leur produit est alors nulle. Les variables z_t (ou instruments pour utiliser la terminologie usuelle de l'approche GMM) permettent d'intégrer une forme de conditionnement temporel sur les moments dans un cadre d'estimation inconditionnel. Pour être pertinents, les instruments doivent cependant apporter de l'information sur l'évolution temporelle des moments analysés. Si des variables au temps t permettent de caractériser l'état des moments au cours du temps, l'intégration de ces variables dans les moments permet alors d'évaluer la variation des erreurs des moments à la lumière de cette information additionnelle. Autrement dit, l'ajout d'instruments dans les moments permet d'évaluer si le modèle est en mesure d'expliquer en moyenne la dynamique temporelle des moments. Si aucun instrument n'est considéré, le modèle est alors évalué pour son aptitude à expliquer la variation de la moyenne des moments tel que présenté aux sections précédentes. Nous utiliserons donc l'appellation GMM «conditionnelle» lorsque des instruments sont utilisés pour l'estimation.

Nous utilisons comme instruments des variables financières et économiques reconnues pour leur pouvoir prédictif sur les rendements où pour caractériser l'évolution de l'état de l'économie. Nous utilisons ainsi comme instruments le rendement du portefeuille de marché, le logarithme du ratio dividende sur prix du portefeuille de marché ainsi que la croissance de la consommation des biens non durables, des biens durables et du service d'habitation[27]. Bien que les moments associés aux conditions d'Euler soient en théorie orthogonaux par rapport à l'ensemble d'information au temps t, en raison problèmes potentiels d'agrégation temporelle des données de consommation du NIPA discutés précédemment, nous utilisons le deuxième retard des instruments. Afin de limiter le nombre de moments dans l'estimation, nous considérons uniquement les rendements des 6 portefeuilles Fama-French et du taux sans risque. Le tableau 29 présente les résultats.

[27] Les instruments sont standardisés et additionner à un afin qu'ils aient environ le même ordre de grandeur que les rendements bruts tel que suggéré par Cochrane (2005, chap. 11).

Les modèles construits à partir de l'utilité EZW présentent des coefficients d'aversion au risque élevés et significatifs à l'exception du modèle de Fillat (2008) qui s'élève à 15,75 mais est non significatif avec une erreur-type de 33,21. Les ESI sont pour leur part significatives à l'exception du modèle de Fillat (2008) et atteignent des valeurs de l'ordre de 8% pour le modèle EZW, le modèle avec stock d'habitation et les modèles avec consommation structurée. Ces derniers modèles présentent également un facteur d'actualisation subjectif inférieur à un et significatif en 0,90 et 0,94. Les modèles sont cependant encore une fois tous rejetés pour l'ensemble des tests.

Tableau 29 : Estimation conditionnelle GMM pour la distance de Hansen-Jagannathan, 25 portefeuilles Fama-French 1960-2010 et les paramètres de cointégration pour les spécifications avec utilité EZW et puissance des modèles

Évaluation conditionnelle des modèles non-linéaires par GMM en une étape pour la distance de Hansen-Jagannathan avec 25 Portefeuilles de Fama et French (1992, 1992) de 1960 à 2010 segmentés selon le ratio de la valeur au livre sur la valeur marchande (HML) et la taille (SMB) et le taux sans risque. La section du haut présente les résultats pour la spécification des modèles avec utilité EZW alors que la section du bas présente les résultats pour l'utilité puissance. Les résultats sont présentés pour un retard de l'erreur-type HAC de Newey et West (1987a). Les erreur-types sont présentées en caractères gras losrqu'elles sont associées à une statistique t significative à au moins 5% pour le paramètre. La section suivante présente les DHJ, son erreur-type, la p-value du test statisque de Jagannathan et Wang (1996) pour l'hypothèse H0 que la DHJ est nulle et le test LM de Gospodinov et al. (2013) et sa p-value pour l'hypothèse H0 que les multiplicateurs de Lagrange sont conjointement nuls et que le modèle est bien énoncé.

	Distance Hansen-Jagannathan (Utilité EZW)					
	EZW	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
γ	104,95	15,75	131,69	108,09	109,55	108,45
	16,43	33,21	**45,81**	**28,97**	**37,17**	**28,61**
ρ	0,082	0,012	0,011	0,080	0,078	0,079
	0,015	0,014	**0,002**	**0,014**	**0,020**	**0,015**
β	0,90	1,23	1,12	0,93	0,94	0,93
	0,03	**0,62**	**0,18**	**0,05**	**0,06**	**0,05**
DHJ	0,737	0,732	0,732	0,737	0,737	0,737
Erreur-type DHJ	**0,123**	**0,092**	**0,132**	**0,137**	**0,133**	**0,135**
p-val	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00
LM Stat	94,44	55,09	71,14	89,82	87,97	89,64
p-val	0,0000	0,0453	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000
	Distance Hansen-Jagannathan (Utilité Puissance)					
	CCAPM	Piazzesi et al. (2007)	Ogaki e Reinhart (1998)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
γ	16,01	15,67	21,54	15,86	16,20	16,45
	14,20	12,01	**11,69**	13,98	13,24	13,86
ρ		0,064	0,046	0,063	0,062	0,061
		0,049	**0,025**	**0,056**	**0,050**	**0,051**
β	1,07	1,06	1,01	1,07	1,07	1,07
	0,06	**0,05**	**0,00**	**0,06**	**0,06**	**0,06**
DHJ	0,75	0,75	0,744	0,750	0,750	0,750
Erreur-type DHJ	**0,091**	**0,091**	**0,091**	**0,091**	**0,091**	**0,091**
p-val	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
LM Stat	55,86	55,74	56,24	55,86	55,90	55,87
p-val	0,0491	**0,0502**	0,046	0,049	0,049	0,049

La partie inférieure du tableau 29 présente les résultats pour la spécification avec utilité puissance des modèles. Les coefficients d'aversion au risque varient entre 15,67 pour le modèle de Piazzesi *et al.* (2007) et 21,24 pour le modèle de Ogaki et Reinhart (1998) mais sont non significatifs avec des erreur-types du même ordre. Les ESI varient entre 4,6% et 6,4% mais sont non significatives alors que les facteurs d'actualisation subjectif sont légèrement supérieurs à un et significatifs. Les modèles sont également tous rejetés.

Le tableau 30 présente les résultats pour le *D-test*. Les modèles avec utilité EZW et une forme de risque de composition de la consommation se démarquent du modèle EZW; ce qui semble indiquer un apport du risque de composition. Cependant, tout comme le modèle EZW, ces derniers présentent des erreurs de tarification significativement plus élevées que le CCAPM. Les modèles avec risque de composition et une utilité EZW ne parviennent pas non plus à améliorer la performance de leur modèle correspondant avec l'utilité puissance.

Tableau 30 : Test de différence sur les modèles emboîtés (D-Test) pour l'estimation conditionnelle

Test de différence (D-test) de Newey-West (1987b) sur les J-Stats de modèles emboîtés pour l'estimation conditionnelle. Les p-values sont présentées sous les statistiques du test et sont reportées en caractère gras lorsque significatives à au moins 5%. La première colonne présente le test de différence pour les modèles avec fonction d'utilité puissance par rapport au CCAPM.

	CCAPM	EZW	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
CCAPM		-38,58	0,798	-15,280	-33,958	-32,110	-33,778
			0,671				
EZW			39,377	23,299	4,621	6,469	4,802
			0,000	**0,000**	**0,032**	**0,011**	**0,028**
Piazzesi et al. (2007)	0,123		0,676				
	0,726		0,411				
Ogaki et Reinhart (1998)	-0,381			-14,899			
Stock d'habitation crra	-0,001				-33,957		
SCAPM crra	-0,035					-32,075	
SCAPM7 crra	-0,013						-33,764

Les résultats du test de Wald présentés au tableau 31 rejettent les restrictions paramétriques permettant d'obtenir le CCAPM à partir de tous les modèles. Les différents types de biens ne sont donc pas séparables de la consommation des biens non durables dans les modèles de tarification. La consommation est aussi non séparable dans le temps pour ce qui de la consommation des biens non durables.

Tableau 31 : Test de Wald sur les modèles emboîtés pour l'estimation conditionnelle

P-value des test de Wald pour les restrictions entre les modèles de consommation emboîtés pour l'estimation conditionnelle. Dans le cas des modèles avec utilité puissance, la contrainte pour obtenir le CCAPM est l'équalité de l'ESA et l'ESI $\varepsilon=\rho$. La contrainte sur les modèles avec un risque de composition de la consommation pour obtenir le modèle EZW est également l'équalité de l'ESA et l'ESI alors que l'équalité du coefficient d'aversion au risque et l'inverse de l'ESI $\gamma=1/\rho$ permet d'obtenir les modèles avec utilité puissance. Finalement, les deux contraintes permettent d'obtenir le CCAPM à partir de ces derniers modèles. La première colonne présente les *p-values des* tests de Wald pour les modèles avec fonction d'utilité puissance par rapport au CCAPM.

	CCAPM	EZW	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
CCAPM		**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**
EZW			**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**
Piazzesi et al. (2007)	**0,000**		0,531				
Ogaki et Reinhart (1998)	**0,000**			0,500			
Stock d'habitation crra	**0,000**				**0,001**		
SCAPM crra	**0,000**					**0,016**	
SCAPM7 crra	**0,000**						**0,001**

Les résultats sont plus mitigés pour les autres types de biens alors que seules les modèles avec stock d'habitation et ceux avec consommation structurée rejettent l'hypothèse nulle que le coefficient d'aversion au risque est différent de l'inverse de l'ESI. Le tableau 32 présente les résultats pour le test sur la différence des distances de Hansen- Jagannathan.

Les modèles avec utilité EZW ne démontrent pas une amélioration significative au niveau de leur DHJ par rapport au CCAPM. Les modèles avec utilité EZW présentent cependant une augmentation significative par rapport à leur contrepartie avec utilité puissance. Ces distinctions semblent indiquer un apport potentiel du risque de composition de la consommation au risque de long terme de la consommation. Cependant, seuls les modèles de Fillat (2008) et Yogo (2006) se différencient également du modèle EZW. Le risque de composition des modèles avec utilité puissance se démarquent pour leur part significativement du CCAPM.

Tableau 32 : Test sur la différence des distances de Hansen-Jagannathan des modèles emboîtés pour l'estimation conditionnelle

Test de Gospodinov et *al*. (2013) sur la différence des carrés des HJD de l'estimation conditionnelle et du produit du nombre d'observations pour les modèles de consommation emboîtés. Les p-values sont présentées sous les statistiques du test et sont reportées en caractère gras lorsque significatives à au moins 5%. La première colonne présente le test de différence pour les modèles avec fonction d'utilité puissance

	CCAPM	EZW	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
CCAPM		3,923	5,370	5,367	3,917	3,834	3,874
		1,000	0,869	0,850	0,385	0,544	0,432
EZW			1,447	1,444	-0,006	-0,088	-0,049
			0,000	**0,000**			
Piazzesi et al. (2007)	0,304		5,065				
	0,000		**0,000**				
Ogaki et Reinhart (1998)	1,896			3,471			
	0,000			**0,000**			
Stock d'habitation crra	0,010				3,907		
	0,073				**0,000**		
SCAPM crra	0,141					3,693	
	0,000					**0,000**	
SCAPM7 crra	0,089						3,785
	0,000						**0,000**

Le risque de composition de la consommation semble donc contribuer significativement au modèle pour cette spécification de l'utilité alors que son apport au risque de long terme dans un cadre d'analyse conditionnel n'est pas établi. La section suivante présente la synthèse des résultats des procédures de test.

5.3. Sommaire des résultats des procédures de test

Les tests effectués sur les modèles de tarification fondés sur la consommation présentent des résultats mitigés quant à la contribution du risque de composition de la consommation pour différentes spécifications. Les tests de Wald nous permettent de façon générale d'établir que les biens sont non séparables et que la consommation n'est également pas séparable dans le temps. Les *D-test* et le test de différence des DHJ permettent également de détecter un apport statistiquement significatif du risque de composition pour la spécification des modèles avec utilité puissance. L'apport du risque de composition par rapport au CCAPM n'est cependant pas significatif lorsque l'utilité EZW est utilisée. Le risque de long terme des biens non durables est donc peu soutenu par les données. Les résultats au niveau de la dimension de long terme du risque de composition de la consommation sont en général significatifs pour les tests de Wald et les tests sur la différence des distances de Hansen-Jagannathan. Cependant, les erreurs de tarification des modèles avec utilité EZW sont similaires ou plus importantes que celles avec l'utilité puissance.

Le tableau 33 présente la décomposition des facteurs de Piazzesi et al. (2007) et de Fillat (2008) à partir de leurs termes associés à la consommation des biens non durables (BND), à la composition de la consommation (composition) et au portefeuille de marché (Marché). Le terme M est employé pour le facteur d'actualisation complet d'un modèle alors que Mth est le facteur d'actualisation stochastique théorique composé du facteur d'actualisation stochastique du modèle moins le produit des multiplicateurs de Lagrange et des paiements issus de l'évaluation (97) de la distance de Hansen et Jagannathan. Ce noyau théorique nous permet ainsi de comparer la volatilité du noyau nécessaire pour atteindre l'espace des noyaux valides. De plus, nous pouvons observer avec quel terme du noyau global d'un modèle le noyau théorique est le plus corrélé.

Le modèle de Piazzesi *et al.* (2007) présente seulement un terme pour la croissance des biens non durables et pour le risque de composition. La volatilité du noyau théorique est élevée alors que celle du terme de composition est la plus faible et celle du terme pour les biens non durables la plus élevée. Ce dernier terme est également le plus corrélé avec le noyau théorique avec une valeur de 63,84%. La moyenne du terme de la composition est près de un et seulement de 0,79 pour la croissance des biens non durable. Les valeurs pour les différents du noyau de Fillat (2008) sont similaires. Le modèle de Fillat (2008) introduit le terme sur le rendement du marché associé au risque de long terme qui présente une volatilité de seulement 6%. Le terme κ est de 0.34 pour les paramètres estimés ce qui implique une préférence pour une résolution hâtive de l'incertitude. Ces deux modèles sont ainsi très similaires comme nous pouvons le constater à la figure 18 où la section supérieure présente le noyau théorique en bleu et le noyau du modèle en rouge. Les deux noyaux suivent généralement bien le noyau théorique et présente une hausse de l'utilité marginale durant plusieurs périodes de récession. Tel que discuté à la section 2.2, le terme de composition pour ces modèles sera contracyclique dans la mesure où l'ESA est supérieure à un et à l'ESI. L'ESA estimée est inférieure à un. Les biens sont donc complémentaires. Les termes de composition pour ces modèles augmentent donc en période de récession car la croissance de la proportion de la consommation des biens non durables sur la période 1960-2010 n'est pas clairement contracyclique comme nous pouvons l'observer à la figure 4, notamment pour la période de la crise financière.

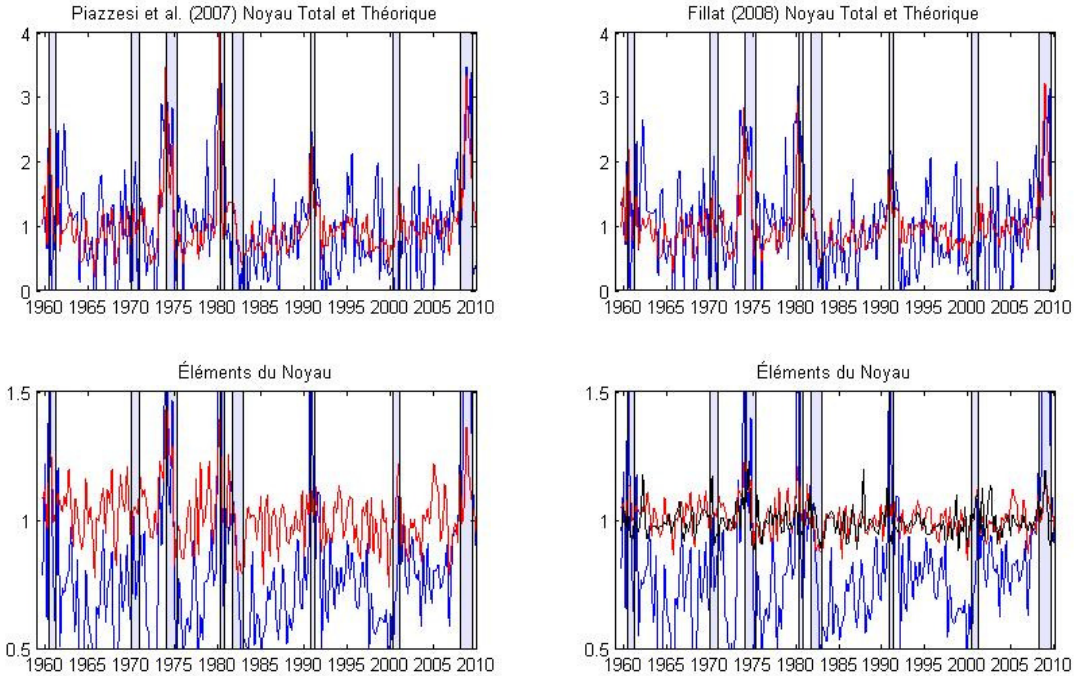
Tableau 33 : Structure des facteurs d'actualisation stochastique fondés sur la consommation pour le modèle de Piazzesi *et al.* (2007) et de Fillat (2008)

	Piazzesi et al (2007)				Fillat (2008)				
	Mth	M	Composition	BND	Mth	M	Composition	BND	Marché
Moyenne	0,9975	1,0014	1,0188	0,7976	0,9975	1,0008	1,0161	0,8143	0,9931
Écart-type	0,8356	0,5260	0,1228	0,3124	0,7759	0,4264	0,1091	0,2727	0,0596
Corrélations	1,0	0,6384	0,5168	0,6165	1,0	0,5597	0,4505	0,5381	0,2530
		1,0	0,7396	0,9756		1,0	0,7208	0,9699	0,3952
			1,0	0,6185			1,0	0,6181	0,3070
				1,0				1,0	0,2280
									1,0

L'interprétation du risque de composition pour ces modèles ne repose donc plus sur un besoin de substituer la consommation des biens non durables pour soutenir la consommation future du service d'habitation qui est en baisse. Elle repose plutôt sur une augmentation de l'utilité marginale associée à un déséquilibre dans la consommation de biens complémentaires en période de récession. La section inférieure du tableau montre cependant que le terme le plus important pour le comportement du noyau général dans le

cas du modèle de Fillat (2008) est celui de la croissance des biens non durables (en bleu) alors que le terme de composition (en rouge) est beaucoup moins volatil. Le terme de composition est cependant prépondérant pour le modèle de Piazzesi *et al*. (2007) et en particulier lors des récessions. Cette observation souligne encore une fois le rôle mitigé du risque de long terme de la consommation et en particulier du risque de composition de la consommation.

Figure 18 : Noyau de tarification Piazzesi *et al.* (2007) et Fillat (2008)



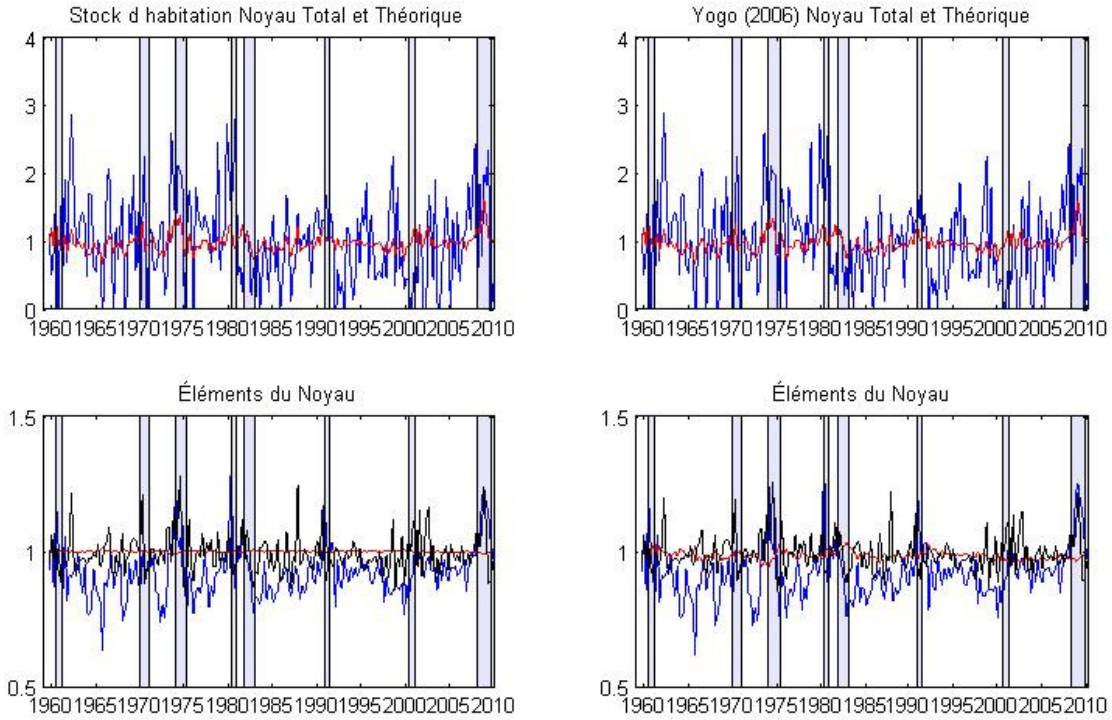
Le tableau 34 et la figure 19 présente les résultats pour le modèle de Yogo (2006) et pour le modèle avec stock d'habitation. Les moyennes des termes pour le modèle de Yogo (2006) sont près de un. Le noyau théorique associé au modèle présente un écart-type de 0,68 comparativement à seulement 0,13 pour le noyau du modèle et 0,02 pour le terme de composition. Le terme de composition est par ailleurs négativement corrélé avec les autres termes et noyaux. L'utilité marginale pour le terme de composition ne semble donc pas contracyclique. Tel que discuté à la section 2.1, le modèle de Yogo (2006), et de façon générale, les modèles avec des biens supplémentaires dans le cadre de la classe de modèles associée à la forme (77), doivent, pour un terme κ positif présenter, une ESA supérieure à l'ESI dans la mesure où le ratio de la consommation du bien supplémentaire sur la consommation des biens non durables est procyclique. L'ESA estimée est supérieure à l'ESI estimée, mais, comme nous l'avons observé à la figure 6, le ratio du stock de biens durables sur la consommation des biens non durables ne semble pas en particulier suivre les cycles économiques et augmente même durant la crise financière. Le terme est donc corrélé négativement avec les autres termes et noyaux dont la composante de l'utilité marginale qui leur aient associée augmente en générale durant les récessions.

Tableau 34 : Structure des facteurs d'actualisation stochastique fondés sur la consommation pour le modèle de Yogo (2006) et pour le modèle avec stock d'habitation

	Yogo (2006)					Stock d'habitation				
	Mth	M	Composition	BND	Marché	Mth	M	Composition	BND	Marché
Moyenne	0,9974	0,9752	0,9859	0,9200	0,9926	0,9974	0,9814	1,0003	0,9239	0,9922
Écart-type	0,6862	0,1301	0,0155	0,0993	0,0657	0,6860	0,1353	0,0036	0,0942	0,0719
	1,0	0,3186	-0,1220	0,2418	0,2759	1,0	0,3170	-0,2688	0,2409	0,2768
		1,0	-0,4608	0,8696	0,6777		1,0	-0,8110	0,8465	0,7196
Corrélations			1,0	-0,5291	-0,2956			1,0	-0,9218	-0,2921
				1,0	0,2434				1,0	0,2442
					1,0					1,0

La figure 19 expose la faible contribution, voir la contribution négative du risque de composition associé aux biens durables. Les résultats sont par ailleurs similaires pour le modèle avec stock d'habitation dont le comportement cyclique est encore plus faible que pour le stock de biens durables tel qu'observé encore une fois à la figure 6.

Figure 19 : Noyau de tarification Yogo (2006) et stock d'habitation



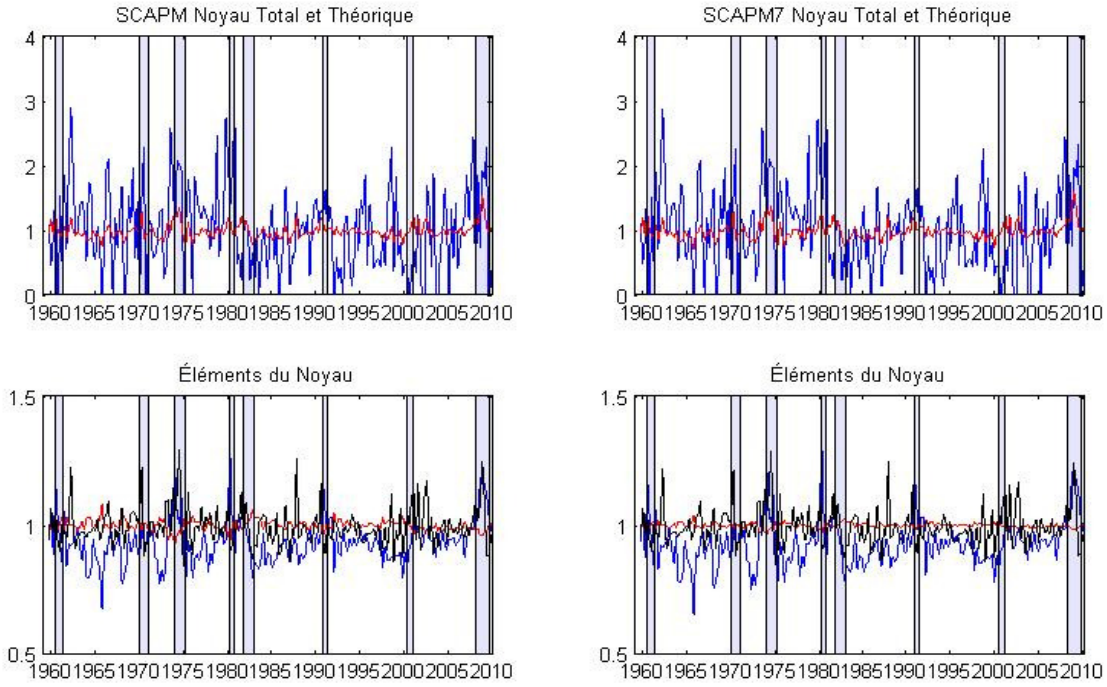
Le tableau 35 présente les résultats pour les modèles avec consommation structurée restreint SCAPM et non restreint SCAPM7. Nous pouvons constater que la généralisation de la fonction de production domestique pour cette classe de modèle à trois biens ne contribue pas positivement au noyau de tarification par rapport à la forme restreinte. Le risque de composition issu de la combinaison de ces biens ne présente donc pas un risque significatif pour expliquer les rendements des actifs financiers.

Tableau 35 : Structure des facteurs d'actualisation stochastique fondés sur la consommation pour le SCAPM et pour le SCAPM7

	SCAPM					SCAPM7				
	Mth	M	Composition	BND	Marché	Mth	M	Composition	BND	Marché
Moyenne	0,9974	0,9844	0,9972	0,9323	0,9919	0,9974	0,9825	0,9976	0,9268	0,9921
Écart-type	0,6832	0,1143	0,0211	0,0831	0,0750	0,6850	0,1274	0,0104	0,0904	0,0727
Corrélations	1,0	0,3015	-0,2179	0,2086	0,2772	1,0	0,3113	-0,2309	0,2298	0,2769
		1,0	-0,6889	0,7654	0,8035		1,0	-0,7269	0,8249	0,7450
			1,0	-0,8790	-0,3014			1,0	-0,8429	-0,3046
				1,0	0,2449				1,0	0,2444
					1,0					1,0

La figure 20 expose clairement dans la section inférieure que le caractère contracyclique des noyaux associés à ces modèles est relié au terme de la croissance des biens non durables et au rendement du marché.

Figure 20 : Noyau de tarification Consommation structurée SCAPM et SCAPM7



6. Conclusion

Tout au long de cette thèse, nous nous sommes employés à analyser la relation entre la tarification des actifs financiers et la consommation. Comme nous avons pu le constater lors de notre revue de la littérature, les modèles de tarification fondés sur la consommation présentent, de façon générale, des problèmes pour expliquer les rendements des actifs financiers risqués et le taux sans risque. Les énigmes de la prime de risque et du taux sans risque mettent ainsi en lumière les lacunes des modèles de tarification issus du problème intertemporel fondamental du choix de consommation et de portefeuille des individus.

Le risque de consommation est en fait constitué de différentes dimensions interconnectées. Au-delà du risque de la croissance de la consommation usuelle approximée par les biens non durables et les services, l'intégration de biens de consommation additionnels génère un risque de composition de la consommation susceptible de contribuer à résoudre les énigmes de tarification associées à la prime de risque élevée du rendement du marché et au faible taux sans risque. Le développement de l'utilité d'Epstein-Zin-Weil permet, par ailleurs, d'évaluer de façon prospective le risque de long terme associé aux différents risques de consommation. De récents modèles, dont ceux de Bansal et Yaron (2004) et de Hansen *et al*. (2008), ont par ailleurs souligné la contribution du risque de long terme pour expliquer les rendements des actifs financiers et résoudre les énigmes de tarification dans la mesure où l'élasticité de substitution intertemporelle est supérieur ou égal à un.

La première contribution majeure de notre thèse est la généralisation des modèles de tarification comportant plusieurs biens de consommation dans l'environnement économique classique avec marché complet et agent représentatif. Nous avons ainsi présenté la dérivation des formes non linéaires et linéaires des facteurs d'actualisation stochastiques associés à cette classe de modèles. Nous avons mis en évidence les similitudes entre les modèles pouvant être développés à partir de différentes formes pour la fonction d'utilité intertemporelle, ainsi que pour la fonction de production domestique d'où est issu un service de consommation structurée.

Afin d'identifier et de bonifier le risque de composition de la consommation des individus, nous avons explicitement formulé un modèle mettant en relation deux catégories de biens importantes, tant par leur apport à la consommation des individus, que par leur utilisation récente dans la littérature : les biens durables et les biens d'habitation. *A priori*, tout bien de consommation est potentiellement susceptible de présenter un risque de composition de la consommation. Cependant, ces deux types de biens ont la particularité d'être persistants dans le temps et ainsi générer un risque de consommation à différents horizons.

La seconde contribution importante de notre thèse est une évaluation empirique exhaustive des modèles avec risque de composition de la consommation, dont les modèles avec services d'habitation de Piazzesi *et al*. (2007) et de Fillat (2008) pour lesquels aucune estimation complète n'avait été effectuée. Nous avons également estimé

le modèle avec biens durables de Yogo (2006) et les modèles généraux avec consommation structurée que nous avons développés. Nous avons estimé les modèles à partir de trois approches Nous avons estimé la représentation linéaire en facteurs des modèles où les facteurs de consommation qui leurs sont associés se sont avérés peu performants pour expliquer les rendements des 25 portefeuilles de Fama et French (1992, 1993). Les modèles présentaient pour cette estimation des coefficients d'aversion au risque élevés signalant l'énigme de la prime de risque. Afin d'analyser pleinement l'apport potentiel des risques de consommation de ces modèles, nous avons estimé les modèles sous leur forme non linéaire par la méthode des moments généralisée de Hansen (1982). Nous avons notamment utilisé l'approche d'estimation associée à la distance de Hansen et Jagannathan (1997) où l'inverse de la matrice des paiements est utilisé comme matrice de pondération dans la première ronde d'estimation. Les modèles de tarification fondés sur la consommation sont fortement rejetés dans leur ensemble et présente des coefficients d'aversion au risque élevés et des facteurs d'actualisation subjectif plus supérieurs à un. Les élasticités de substitution intertemporelles estimées étaient généralement très faibles, ne supportant pas les valeurs supérieures à un utilisées pour calibrer les modèles de risque de long terme.

Une attention particulière a été portée lors de l'estimation des modèles à l'instabilité pouvant être générée par les paramètres faiblement identifiables associés à la fonction d'utilité intratemporelle et la fonction de production domestique ainsi que par la singularité de la matrice des paiements et des termes de la matrice de covariance des paramètres. Afin d'identifier ces paramètres, nous avons utilisé une approche reposant sur les relations de cointégration entre les variables économiques développée par Ogaki et Park (1998). Nous avons ainsi pu obtenir des estimée raisonnables des paramètres de ces fonction et procéder à une séries d'estimation des modèles où le terme de risque de composition de la consommation des facteurs d'actualisation stochastique est alors calibré sur ces valeurs. Les résultats obtenus par cette approche d'estimation ont confirmé ceux obtenus précédemment.

À partir de différent tests statistique sur les modèles, dont le *J-test* de Hansen (1982), le *D-test* de Newey et West (1987b), les tests de Wald et le test de différence des distances de Hansen-Jagannathan de Gospodinov *et al.* (2013), nous avons présenté une procédure pour apprécier la pertinence des différents types de risques dans les modèles de tarification où pour chaque modèles, nous avons estimé la représentation reposant sur une fonction d'utilité EZW ainsi que celle reposant sur une fonction d'utilité puissance. Cette procédure de test, qui représente la troisième contribution principale de notre thèse, permet en général de détecter un apport statistiquement significatif des différentes formes de risques de composition de la consommation pour la formulation avec utilité puissance. Les évidences sont cependant moins probantes pour le risque de long terme de la consommation où les tests sont parfois contradictoires dû, notamment, aux erreur-types importantes sur les coefficients d'aversion au risque.

Pour investiguer plus en détail la performance des modèles, nous avons finalement décomposé les facteurs d'actualisation stochastique à partir du terme du risque de composition de la consommation, le terme associé au risque de la consommation des biens non durables et le terme sur le risque de la richesse totale approximé par le

rendement du marché. Le modèle de Yogo (2006), le modèle avec stock d'habitation et les deux modèles avec consommation structurée contribue peu, voir négativement, au noyau de tarification alors que le terme de composition de la consommation qui leur est liés est corrélé négativement avec le terme des biens non durables et du marché, ainsi qu'avec le noyau de tarification théorique valable issu de l'estimation de la distance de Hansen et Jagannathan (1997). La faible performance de ces modèles s'explique par le faible caractère procyclique du ratio de stock de biens durables sur la consommation des biens non durables ou encore les ratios formés à partir du stock de biens d'habitation et de la combinaison des deux dans le cas des modèles avec consommation structurée. Bien que ces modèles puissent théoriquement générer des noyaux de tarification très volatils, l'estimation d'un terme κ inférieur à un et positif désignant une préférence pour la résolution hâtive mène, conjointement avec l'estimation d'une élasticité de substitution intratemporelle inférieure à un mais supérieur à l'élasticité de substitution intemporelle, à un terme de composition de la consommation qui se trouve alors à être plus cyclique pour ces modèles.

À l'opposée, les modèles de Piazzesi *et al*. (2007) et de Fillat (2008) génère un terme de pour le risque de composition de la consommation contracyclique. Le modèle de Piazzesi *et al*. (2007) se démarque par rapport à celui de Fillat (2008) dû à un terme κ également inférieur à un et positif qui fait diminuer le risque de composition de la consommation pource dernier modèle. L'apport du risque de composition de la consommation au CCPAM est cependant lié à un effet de complémentarité de la consommation plutôt que de substitution entre les biens non durables et les services d'habitation puisque la proportion de la consommation des biens non durables n'est pas clairement contracyclique et que l'estimation de l'élasticité de substitution intratemporelle pour ces modèles est inférieure à un.

Finalement, nos différents tests et analyses détectent statistiquement un certain apport du risque de composition de la consommation aux modèles de tarification, mais peu probant à partir des erreurs de tarification que les modèles avec utilité puissance génèrent comparativement aux CCAPM. Au niveau du risque de long terme, la pertinence du risque de long terme associé aux biens non durables et généralement rejetée. Les résultats pour le risque de composition de long terme ne supporte pas, de façon générale, un apport économiquement significatif aux différents modèles de tarification, bien que la restriction paramétrique sur la séparabilité de la consommation dans le temps est rejetée fréquemment.

À la lumière de nos résultats, nous pouvons remettre en question la possibilité qu'un modèle avec un bien de consommation de moindre envergure que les biens durables et d'habitation puisse parvenir, dans le cadre d'analyse général pour les modèle avec consommation, à générer un risque de composition de la consommation statistiquement significatif et surtout, explicable d'un point de vue économique.

Dans le cadre des recherches sur les modèles de tarification où les hypothèses sur l'environnement économique et le cadre d'utilité sont relâchées, la littérature se concentre généralement sur la performance du modèle avec les biens non durables uniquement. Notre thèse démontre cependant que, malgré la performance mitigée des modèles dans

notre cadre d'analyse, que la séparabilité des biens de consommation et la séparabilité temporelle des biens sont généralement rejetées. Il serait donc approprié de tester le relâchement des hypothèses sur l'environnement économique en considérant plus d'un biens d'habitation afin de ne pas causer une distorsion indue dans la nouvelle structure de l'économie d'un modèle pour palier à une insuffisance associée aux différents risque de consommation.

Par ailleurs, de nouvelles approches économétriques permettent d'estimer des éléments non observables des facteurs d'actualisation stochastique reposant, par exemple, sur l'utilité d'Epstein-Zin-Weil où pour des modèles avec habitudes de consommation, dont celles de Chen *et al.* (2013), Gosh *et al.* (2012) et Chen et Ludvigson (2009). Ces approches pourraient être étendues afin d'estimer conjointement la valeur de continuité de la richesse totale, ou encore, le risque de composition de la consommation latent dans le cadre de notre représentation générale des facteurs d'actualisation stochastique.

Comme nous avons pu le voir à travers la formulation intertemporelle du problème de l'agent, il existe une relation fondamentale entre le prix des actifs et le choix de portefeuille à travers le cycle de vie de des individus. Les généralisation des modèles de tarification fondés sur la consommation développée dans notre thèse pourrait être utilisée pour généraliser les modèles de choix dynamiques de portefeuilles avec biens d'habitation uniquement de Coco (2004) et Yao et Zhang (2005a,b) où le risque de composition de la consommation intervient avec différentes contraintes réalistes sur l'environnement économique, telles que l'accès aux marché financier et du crédit, la dynamique du revenu d'emploi, etc..

Nous avons démontré au cours de notre thèse les similitudes des modèles présentant un risque de composition de la consommation et comment ces différents types de risques demeurent peu appropriés pour résoudre les énigmes de tarification dans le cadre d'analyse classique avec agent représentatif. Cependant, la relation entre l'utilité que les individus retirent de leurs différents biens de consommation et la façon dont ils structurent leur consommation dans le temps demeure un élément essentiel pour le développement de modèles de tarification pouvant être interprétés économiquement.

Bibliographie

Bansal, R., et Yaron, A., 2004. Risks for the long-run : A potential resolution of asset pricing puzzles. *Journal of Finance*, 59, 1481-1509.

Beeler, J., et Campbell, J.Y, 2012. The Long-Run Risks Model and aggregate Asset Prices : An Empirical Assessment, *Critical Finance Review*, 1, 141-182.

Breeden, D.T., 1979. An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities, *Journal of Financial Economics* 7, 265-96.

Campbell, J.Y., 2003. Consumption-based Asset Pricing, Chapitre 13, vol. 1B, Handbook of the Economics of Finance, Édité par G.M. Constantinides, M. Harris et R. Stulz, North-Holland, Amsterdam.

Campbell, J.Y. et Cochrane, J.H., 1999. By force of habit : A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior, *Journal of Political Economy* 107, 205-251.

Chen, X., Ludvigson, S.C, 2009. Land of Addicts? An Emppirical Investigation of Habit Based Asset Pricing Models, *Journal of Applied Econometrics*, 24, 1057-1093.

Cocco, J.F., 2004. Portfolio Choice in the Presence of Housing, *Review of Financial Studies*, 18, 535-567.

Constantinides, G.M., 1990. Habit Formation : A Resolution of the Equity Premium Puzzle, *Journal of Political Economy*, 98, 519-543.

Constantinides, G.M., et Duffie, D., 1996. Asset Pricing with Heterogeneous Consumers, *Journal of Political Economy*, 104, 219-240.

Constantinides, G.M.et Ferson, W.E., 1991. Habit Persistence and Durability in Aggregate Consumption : Empirical Tests, *Journal of Financial Economics*, 29, 199-240.

Cochrane, J.H., 2005, Asset Pricing, Revised Edition, Princeton University Press : Princeton, NJ, 533 p.

Dunn, K. B., et Singleton, K. J., 1986. Modeling the Term Structure of Interest Rates Under Non-Separable Utility and Durability of Goods, *Journal of Financial Economics*, 17, 27-55.

Dufour, J-M., et Valéry, P., 2011, Wald-type tests when rank conditions fail : a smooth regularization approach, *working paper*, Université de Montréal.

Eichenbaum, M., et Hansen, L.P., 1990. Estimating Models With Intertemporal Substitution Using Aggregate Time Series Data, *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 53-69.

Engel, R.,et Yoo, B, 1987. Forecasting and Testing in Cointegrated Systems. *Journal of Econometrics*, 35, 143-159.

Epstein, L.G., et Zin, S.E., 1989. Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns : A Theoretical Framework, *Econometrica*, 57, 937-969.

Epstein, L.G., et Zin, S.E., 1991. Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns : An Empirical Analysis, *Journal of Political Economy* 99, 263-286.

Fama, E., et French, K., 1992. The Cross-Section of Expected Stock Returns, *Journal of Finance*, 47, 427-465.

Fama, E., et French, K., 1993. Common Risk Factor in the Returns on Stocks and Bonds, *Journal of Financial Economics*, 33, 3-56.

Chen, X., Favilukis, J. et Ludvigson, S. C.,2013. An Estimation of Economic Models With Recursive Preferences, *Forthcoming in Quantitative Economics*.

Fillat, J. L., 2008. Housing as a Measure for Long Run Risk in Asset Pricing, *working paper*, Federal Reserve of Boston.

Grossman, S.J et Shiller, R.J., 1981, The determinants of the variability of stock market prices, *Americain Economic Review*, 71, 222-227.

Gomes, F., et Michaelides, A., 2003. Portfolio choice with internal habit formation : A life cycle model with uninsurable labor income risk, *Review of Economic Dynamics*, 6, 729- 766.

Gospodinov, N., Kan et R., Robotti, C., 2013. Chi-squared tests for evaluation and comparison of asset pricing models, *Journal of Econometrics*, 173, 108-125.

Hall, R. E., 1978. Stochastic Implications of the Life-Cycle-Permanent Income Hypothesis : Theory and Evidence, *Journal of Political Economy*, 86, 971-987.

Hall, R. E., 1988. Intertemporal Substitution in Consumption, *Journal of Political Economy*, 96, 339-357.

Hansen, L.P., Heaton, J.et Luttmer, E. G. J, 1995. Econometric Evaluation of Asset Pricing Models. *The Review of Financial Studies*, 8, 237-274.

Hansen, L.P., Heaton, J.et Li, N., 2008. Consumption Strikes Back? Measuring the long-run risk, *Journal of Political Economy*, 116, 260-302.

Hansen, L.P., 1982. Large Sample Properties of Generalized Methods of Moments Estimators, *Econometrica*, 50, 1029-1054.

Hansen, L.P., et Jagannathan, R., 1991. Restrictions On the Intertemporal Marginal Rates of Substitution Implied by Asset Returns, *Journal of Political Economy*, 99, 225-262.

Hansen, L.P., et Jagannathan, R., 1997. Assesing Specific Errors in Stochastic Discount Factor Models, *Journal of Finance*, 52, 557-590.

Hansen, L.P., et Singleton, K., 1982. Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectation Model, *Econometrica*, 50, 1269-1288.

Hansen, L.P., et Singleton, K., 1983. Stochastic consumption, risk aversion and the temporal behavior of asset returns, *Journal of Political Economy*, 91, 249-268.

Harrison, M. J. et Kreps, D. M., 1979. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, *Journal of Economic Theory*, 20, 381-408.

Heaton, J., 1995. An Empirical Investigation of Asset Pricing with Temporally Dependent Preference Specifications, *Econometrica*, 63, 681-717.

Jagannathan, R., Wang, Z., 1996. The Conditional CAPM and the Cross-Section of Expected Returns, *Journal of Finance,* 51, 3-53.

Kreps, D., et Porteus, E., 1978. Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory, *Econometrica,* 46, 185-200.

Keller, W. J., 1976. A nested CES-type utility function and its demand and price-index functions, European Economic Review, 7, 175-186.

Lintner, J., 1965. Security Prices, Risk and Maximum Gain from Diversification, *Journal of Finance,* 20, 587- 615.

Lucas, R.E., 1978, Asset Prices in an Exchange Economy, *Econometrica* 46, 1429-1446.

Markowitz, H., 1952, Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 7, 77-99.

Mehra, R., et Prescott,E., 1985. The Equity Premium : A Puzzle, *Journalof Monetary Economics* 15, 145-161.

Merton, R.C., 1973. An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, *Econometrica* 41, 867-887.

Mossin, J., 1966. Equilibrium in a Capital Asset Market, *Econometrica*, 35, 768-783.

Moore, E. H. 1920. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bulletin of the American Mathematical Society,* 26, 394-395.

Newey, W.K., West, K.D., 1987a. A simple positive semi-definite heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimator, *Econometrica*, 55, 703-708.

Newey, W.K et West, K.D., 1987b. Hypothesis testing with efficient method of moments estimation. International Economic Review, 3, 777-787.

Ogaki, M., et Reinhart, C. M., 1998. Measuring Intertemporal Substitution : The role of Durable Goods, *Journal of Political Economy*, 106, 1078-1098.

Ogaki, M., et Park,J.Y, 1998. A Cointegration Approach to Estimating Preference Parameters. *Journal of Econometrics*, 82, 107-134.

Pakos, M., 2006. Asset Pricing With Durable Goods : Potential Resolution of Some Asset Pricing Puzzles, *Working paper,* Université de Chicago.

Penrose, R., 1955. A generalized inverse for matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* 51 : 406–413.

Piazzesi, M., Schneider, M., et Tuzel, S., 2007, Housing, Consumption, and Asset Pricing, *Journal of Financial Economics*, 7, 265-96.

Ryder, H. E., Jr.et Heal, G. M. ,1973. Optimum Growth with Intertemporally Dependent Preferences, *Review Economics Studies* 40 ,1-33.

Roll, R., 1977. A Critique of the Asset Pricing Theory's Test : Part I, *Journal of Financial Economics*, 4, 129-176.

Saikkonen, P., 1991, Asymtotically Efficient Estimation of Cointegration Regression, Economic Theory,Cambridge University Press, 7, 1-21.

Samuelson, P.A., 1969. Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming, *Review of Economics and Statistics*, 51, 239-246.

Sato, K., 1967. A Two-Level Constant-Elasticity-of-Substitution Production Function. *The Review of Financial Studies,* 34, 201-218.

Stock, J. H, et Watson, M. W.,1993. A Simple Estimator of Cointegrating Vectors in Higher Order Integrated Systems, *Econometrica,* 61, 783-820

Sharpe, W., 1964. Capital asset prices : A theory of market equilibrium under conditions of risk, *Journal of Finance*, 19, 425-442.

Shiller, R.J., 1981. Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends?, *The American Economic Review*, 71, 421-436

Shiller, R.J., 1982. Consumption, Asset Markets and Macroeconomic Fluctuations, *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy,* 17, 203-238

Weil, P. 1989. The Equity Premium Puzzle and the Risk-Free Rate Puzzle, *Journal of Monetary Economics*, 24,401-21.

Yao, R., et Zhang, H., 2005a. Optimal consumption and portfolio choice with risky housing and borrowing constraints, *Review of Financial Studies,*1 , 197-239.

Yao, R., et Zhang, H., 2005b. Optimal life-cycle asset allocation with housing as collateral, and borrowing constraints, *working paper*, Université du Texas.

Yogo, M., 2006. A consumption-based explanation of expected stock returns. *Journal of Finance*, 61, 539-580.

Annexe A : Dérivation du modèle avec consommation structurée

À partir de l'équation de Bellman (65) de la section 3.3.2, l'homogénéité temporelle du problème de l'agent permet de déduire que la valeur optimale est proportionnelle à la richesse totale.

(A1) $$J_t(\tilde{W}_t) = \Phi_t \tilde{W}_t$$

Afin de faciliter la dérivation des conditions de premier ordre, nous pouvons substituer la valeur des stocks de biens durables et d'habitation dans la fonction de production domestique par une fonction de leur prix et de la proportion investie.

(A2) $$\omega_{n+1,t} = \frac{P_{h.t} H_t}{(\tilde{W}_t - c_t)} \rightarrow H_t = \frac{\omega_{n+1,t}(\tilde{W}_t - c_t)}{P_{h.t}}$$

(A3) $$\omega_{n+2,t} = \frac{P_{d.t} D_t}{(\tilde{W}_t - c_t)} \rightarrow D_t = \frac{\omega_{n+2,t}(\tilde{W}_t - c_t)}{P_{d.t}}$$

En utilisant ces expressions, la fonction de production domestique prend la forme suivante où les stocks sont maintenant remplacés par les équations(A2) et (A3).

(A4) $$u(c_t, S_t) = c_t \left[(1-w) + w \left[\left[\eta \left(\frac{\omega^*_{n+1,t}}{P_{H,t}}\right)^{1-\frac{1}{a}} (1-\eta) \left(\frac{\omega^*_{n+2,t}}{P_{D,t}}\right)^{1-\frac{1}{a}} \right]^{\frac{a}{a-1}} \left(\frac{\tilde{W}_t}{C_t} - 1\right) \right]^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = c_t \xi_t$$

En reformulant l'équation de Bellman (65) avec la fonction de production domestique (51) ainsi qu'en utilisant l'expression de la valeur optimale (A1) de même que l'expression de la richesse totale à *t+1* (55), la condition de premier ordre par rapport à la consommation des biens non durables permet d'obtenir une expression pour le terme d'espérance dans l'équation de Bellman. En dénotant les valeurs optimales des variables de choix par c_t* et $\omega^*_{i,t}$, l'utilisation de cette expression dans l'équation de Bellman permet de démontrer que la valeur optimale est caractérisée par l'expression (A5).

(A5) $$\Phi_t = \left(\frac{c_t^*}{\tilde{W}_t}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \left[(1-\beta)(1-w)\xi_t^{\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\rho}\right)} \right]^{\frac{\rho}{\rho-1}}, \quad \forall t$$

En insérant cette expression dans la condition de premier ordre par rapport à la consommation des biens non durables, nous obtenons l'équation d'Euler pour la richesse

totale (A6) composée des équations auxiliaires (A6.1) à (A6.3) et du facteur d'actualisation stochastique (A7).

(A6) $$E_t\left[M^*_{t+1}R^*_{\tilde{W},t+1}\right] = \left[1 - S_t(\omega^*)\frac{u_{S_t}}{u_{c_t}}\right]^{\kappa}$$

(A6.1) $$R^*_{\tilde{W},t+1} = \sum_{i=0}^{N+2}\omega^*_{i,t}R_{i,t+1}$$

(A6.2) $$S_t(\omega^*) = \left[\eta\left(\frac{\omega^*_{n+1,t}}{P_{H,t}}\right)^{1-\frac{1}{a}}(1-\eta)\left(\frac{\omega^*_{n+2,t}}{P_{D,t}}\right)^{1-\frac{1}{a}}\right]^{\frac{a}{a-1}}$$

(A6.3) $$\frac{u_{St}}{u_{Ct}} = \frac{w}{(1-w)}\left(\frac{S_t}{C_t}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}}$$

(A7) $$M^*_{t+1} = \left[\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\frac{1}{\rho}}\left(\frac{\xi_{t+1}}{\xi_t}\right)^{\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\rho}\right)}R^{*\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)}_{\tilde{W}_t,t+1}\right]^{\kappa}$$

Similairement, à partir des conditions de premier ordre par rapport aux $i=0,1,\ldots,N$, actifs financiers, nous pouvons démontrer que les primes de risque sur les rendements des actifs financiers à l'équilibre doit respecter les équation d'Euler (A8).

(A8) $$E_t[M^*_{t+1}(R_{i,t+1} - R_{0,t+1})] = 0 \quad ,\forall i = 0,1,\ldots,N$$

Les conditions de premier ordre par rapport à $\omega_{N+1,t}$ et $\omega_{N+2,t}$ nous permettent, pour leur part, d'obtenir à l'équilibre les équations d'Euler (A9) et (A10) pour leurs primes de risque où les conditions de premier ordre de la fonction d'utilité intratemporelle par rapport à la consommation des biens non durables et les services de la fonction de production des biens domestiques apparaissent explicitement :

(A9) $$E_t[M^*_{t+1}(R_{N+1,t+1} - R_{0,t+1})] = -\left[\frac{S_{H_t}}{P_{h,t}}\frac{u_{S_t}}{u_{c_t}}\right]\left[1 - S_t(\omega^*)\frac{u_{S_t}}{u_{c_t}}\right]^{\kappa-1}$$

(A10) $$E_t[M^*_{t+1}(R_{N+2,t+1} - R_{0,t+1})] = -\left[\frac{S_{D_t}}{P_{d,t}}\frac{u_{S_t}}{u_{c_t}}\right]\left[1 - S_t(\omega^*)\frac{u_{S_t}}{u_{c_t}}\right]^{\kappa-1}$$

En utilisant les équations d'Euler précédentes, nous pouvons démontrer que l'équation d'Euler pour le rendement d'un actif financier est donné par :

(A11) $$E_t\left[M^*_{t+1}R_{i,t+1}\right] = \left[1 - S_t(\omega^*)\frac{u_{St}}{u_{Ct}}\right]^{\kappa-1} ,\forall i = 0,1,\ldots,N$$

Finalement, en appliquant les normalisations (A12) et (A13) pour la richesse totale et le facteur d'actualisation stochastique, nous pouvons reformuler ce dernier selon l'équation (A11) et obtenir les équations d'Euler sous les formes usuelles (66) à (70) présentées dans le texte :

(A12) $$R_{\tilde{W},t+1} = [1 - S_t(\omega^*)\frac{u_{St}}{u_{Ct}}]^{-1} R^*_{\tilde{W},t+1}$$

(A13) $$M_{t+1} = \left[1 - S_t(\omega^*)\frac{u_{St}}{u_{Ct}}\right]^{1-\kappa} M^*_{t+1} = \left[\beta(\frac{c_{t+1}}{c_t})^{\frac{-1}{\rho}}(\frac{\xi_{t+1}}{\xi_t})^{(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\rho})} R_{\tilde{W},t+1}^{1-\frac{1}{\kappa}}\right]^{\kappa}$$

Annexe B : Dérivation générale des facteurs d'actualisation stochastique avec plusieurs biens de consommation

L'homogénéité de l'utilité EZW (25) permet d'utiliser le théorème d'Euler pour reformuler la fonction d'utilité selon la forme (B1) où la consommation présente et future est exprimée selon son utilité marginale. L'indice inférieure i dans l'utilité EZW $U_{i,t}$ désigne la dérivée partielle de la fonction par rapport à l'élément i de la fonction.

(B1) $$U_t = U_{1,t}u_t + E_t[U_{2,t}U_{t+1}]$$

En utilisant la consommation des biens non durables comme numéraire et en divisant l'équation (B1) par sa valeur en termes d'utilité marginale du numéraire, nous obtenons l'expression (B2).

(B2) $$\frac{U_t}{U_{1,t}u_{c,t}} = \frac{u_t}{u'_{c,t}} + E_t[\frac{U_{2,,t}U_{1,t+1}u_{c,t+1}}{U_{1,t}u_{c,t}}\frac{U_{t+1}}{U_{1,t+1}u_{c,t+1}}]$$

L'expression (B2) exprime la valeur actuelle de l'utilité en termes d'utilité marginale des biens non durables. Le premier terme de l'expression représente la valeur actuelle de la consommation et le second terme la valeur présente de la consommation future, toutes deux en termes d'utilité marginale des biens non durables. Puisque le second terme de l'espérance représente la valeur de l'utilité de la consommation future exprimée en fonction de l'utilité marginale future de la consommation des biens non durables, le premier terme de l'espérance est alors un facteur d'actualisation stochastique. Le facteur d'actualisation stochastique du modèle prend alors la forme (B3). La formulation (75) est finalement obtenue en substituant les expressions des dérivées.

(B3) $$M_{t+1} = \frac{U_{2,t}U_{1,t+1}u_{c,t+1}}{U_{1,t}u_{c,t}}$$

L'homogénéité du problème temporel associé à l'utilité EZW permet de définir le terme prospectif du facteur d'actualisation stochastique (75) en fonction de la croissance de la richesse totale (B4). La valeur $P_{W,t}$ de la richesse totale en terme du numéraire est obtenue par la relation (B5). Le numérateur représente la valeur de l'équivalent certain de l'utilité future $EC_t(U_{t+1})$ en termes d'utilité marginale totale. Cette valeur est ensuite exprimée en termes de l'utilité marginale du numéraire.

(B4) $$\frac{U_{t+1}}{E_t\left[U_{t+1}^{1-\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}} \equiv \frac{U_{t+1}}{EC_t(U_{t+1})} \equiv F(\frac{W_{t+1}}{W_t})$$

(B5) $$P_{W,t} = \frac{U_{EC_t,t} EC_t(U_{t+1})}{U_{1,t} u_{c,t}}$$

La valeur de la richesse totale $P_{W,t+1}$ à la période suivante et de son dividende $D_{W,,t+1}$ est égale à la valeur de continuation de l'utilité à la période suivante exprimée toujours en terme du numéraire selon l'équation (B6). Le rendement de la richesse totale prend alors la forme (B7) en utilisant l'équation (B5) pour la valeur de la richesse totale de la période courante (B6) et finalement (B8), en substituant la valeur des dérivées.

(B6) $$P_{W,t+1} + D_{W,t+1} = \frac{U_{t+1}}{U_{1,t+1} u'_{c,t+1}}$$

(B7) $$R_{W,t+1} = \frac{U_{t+1}}{U_{1,t+1} u_{c,t+1}} \frac{U_{1,t} u_{c,t}}{U_{EC_t,t} EC_t(U_{t+1})}$$

(B8) $$R_{W,t+1} = \beta^{-1} \left(\frac{u_{t+1}}{u_t} \right)^{\varepsilon - \frac{1}{\rho}} \left[\frac{c_{t+1}}{c_t} \right]^{1-\varepsilon} \left[\frac{U_{t+1}}{EC_t(U_{t+1})} \right]^{\frac{1}{\rho}}$$

En réarrangeant l'équation (B8), nous obtenons l'équation (B9) qui fait apparaître le terme prospectif du facteur d'actualisation stochastique (75) et qui, une fois substituée, permet d'obtenir la représentation (77) du facteur d'actualisation stochastique avec la croissance de la richesse totale.

(B9) $$\left[\frac{U_{t+1}}{EC_t(U_{t+1})} \right]^{\gamma - \frac{1}{\rho}} = R_{W,t+1}^{1-\kappa} \beta^{\kappa-1} \left(\frac{u_{t+1}}{u_t} \right)^{(\kappa-1)(\varepsilon - \frac{1}{\rho})} \left[\frac{c_{t+1}}{c_t} \right]^{(\kappa-1)(1-\varepsilon)}$$

Annexe C : Description des données de consommation

Le tableau 36 présente les données de consommation utilisées pour la construction des différentes séries utilisées pour l'évaluation des modèles.

Tableau 36 : séries de consommation

Séries	Date
Durable goods : NIPA Table 2.3.5. Personal Consumption Expenditures by Major Type of Product (Q) Ligne 3	1947-I to 2010-IV
Nondurable goods : NIPA Table 2.3.5. Personal Consumption Expenditures by Major Type of Product (Q) Ligne 8	1947-I to 2010-IV
Services : NIPA Table 2.3.5. Personal Consumption Expenditures by Major Type of Product (Q) Ligne 13	1947-I to 2010-IV
Housing and Utilities services : NIPA Table 2.3.5. Personal Consumption Expenditures by Major Type of Product (Q) Ligne 15	1959-I to 2010-IV
Housing Investment : Table 5.3.5. Private Fixed Investment by Type (Q) Ligne 17	1947-I to 2010-IV
Durable goods Price Index : NIPA Table 2.3.4. Price Indexes for Personal Consumption Expenditures by Major Type of Product (Q) Ligne 3	1947-I to 2010-IV
Nondurable goods Price Index : NIPA Table 2.3.5. Table 2.3.4. Price Indexes for Personal Consumption Expenditures by Major Type of Product (Q) Ligne 8	1947-I to 2010-IV
Services Price Index : NIPA Table 2.3.4. Price Indexes for Personal Consumption Expenditures by Major Type of Product (Q) Ligne 13	1947-I to 2010-IV
Housing and Utilities services Price Index : NIPA Table 2.3.4. Price Indexes for Personal Consumption Expenditures by Major Type of Product (Q) Ligne 15	1959-I to 2010-IV
Housing Investment Price Index : NIPA Table 5.3.4. Price Indexes for Private Fixed Investment by Type (Q) Ligne 17	1947-I to 2010-IV
Population : NIPA Table 7.1. Selected Per Capita Product and Income Series in Current and Chained Dollars (A) Ligne 18	1947-I to 2010-IV
Housing Services : NIPA Table 2.4.5. Personal Consumption Expenditures by Type of Product (A) Ligne 50	1929-2010
Household Utilities Services : NIPA Table 2.4.5. Personal Consumption Expenditures by Type of Product (A) Ligne 55	1929-2010
Housing Services Price Index : NIPA Table 2.4.4. Price Indexes for Personal Consumption Expenditures by Type of Product (A) Ligne 50	1929-2010
Household Utilities Services Price Index : NIPA Table 2.4.4. Price Indexes for Personal Consumption Expenditures by Type of Product (A) Ligne 55	1929-2010
Durable Stock : Fixed Asset Table 1.1. Current-Cost Net Stock of Fixed Assets and Consumer Durable Goods (A) Ligne 13	1925-2010
Residential Stock : Fixed Asset Table 1.1. Current-Cost Net Stock of Fixed Assets and Consumer Durable Goods (A) Ligne 7	1925-2010

BEA NIPA Tables disponibles à : http://www.bea.gov/iTable/iTable.cfm?ReqID=9&step=1#reqid=9&step=1&isuri=1
BEA Fixed Assets Tables disponibles à : http://www.bea.gov/iTable/iTable.cfm?ReqID=10&step=1#reqid=10&step=1&isuri=1

L'ensemble des données réelles par habitant sont obtenues en divisant les séries de consommation par leurs indices de prix, la population et finalement par quatre pour obtenir les données trimestrielles. Depuis le passage en 1996 du BEA des indices de prix fixes aux indices de prix enchaînés, l'agrégation des séries de consommation doit s'effectuer à travers le calcul d'un indice de prix enchaîné de Fisher pour ces séries. L'agrégation simple des séries, par exemple celles des biens non durables et des services, n'est plus appropriée. L'indice de prix enchaîné peut ensuite être utilisé pour obtenir la consommation réelle du groupe de biens de consommation.

Nous définissons un nouveau groupe de biens non durables et de service afin d'exclure le service attribuable aux biens d'habitation. Nous construisons ensuite l'indice de prix enchaîné de Fischer pour ce groupe de biens pour obtenir leur valeur réelle. Le service d'habitation trimestriel est lui-même une agrégation des services d'habitation et des services publics. Pour créer une agrégation trimestrielle des différents services d'habitation, nous utilisons une table détaillée disponible annuellement où ils sont séparés des services publics. Nous évaluons par la suite la proportion respective que ces deux types de services représentent pour chaque année et utilisons ces proportions pour reconstruire l'agrégation trimestrielle. Une approche similaire est utilisée pour construire

l'indice de prix enchaîné correspondant. La procédure de réagrégation des données tronque une observation pour l'indice de prix; ce qui nous laisse une série dont la première observation est au second trimestre de 1959. L'évaluation du stock de biens durables débute avec la valeur réelle du stock net de biens durables lors du trimestre précédent la première observation trimestrielle des investissements en biens durables qui correspondent aux dépenses sur les biens durables. En utilisant l'équation (49) pour la méthode de l'inventaire perpétuel à partir de la valeur de départ, nous pouvons itérer l'équation dans le temps jusqu'à la fin des données du quatrième trimestre de 2010 et résoudre ensuite pour le taux de dépréciation trimestrielle implicite. L'approche est identique pour les biens d'habitation où la valeur réelle du stock net des résidences privées fixes du trimestre précédent le premier trimestre où l'investissement dans les résidences privées fixe est disponible est utilisée comme point de départ à l'application de l'équation (50) pour la méthode de l'inventaire perpétuel.

Les données de consommation reflètent la consommation au cours d'une période. Nous devons donc fixer une norme temporelle lorsque nous évaluons le taux de croissance périodique de la consommation afin de le relier aux données de rendement selon que nous considérons qu'elle se réalise en début ou en fin de période. Nous utilisons la convention de début de période. Par exemple, le taux de croissance entre les données recueillies en T1-2010 et T4-2009 est le taux de croissance associé à T4-2009. Les taux de croissance sont donc enregistrés avec un retard par rapport à la norme temporelle des données brutes. Les résultats sont peu affectés par le choix de la convention temporelle.

Annexe D : Tests statistique de Gospodinov *et al.* (2013) sur les modèles emboîtés

Gospodinov *et al.* (2013) présentent différents tests statistiques pour les modèles de tarification d'actifs financiers. Dans le cas du test sur la différence des carrés des distances de Hansen-Jagannathan présentés à l'équation (104) entre un modèle *i* et une représentation plus général du modèle *j*, la statistique du test suit une distribution non conventionnelle associée à une somme de variables Chi-carré avec un degré de liberté pondérée par les valeurs propres de la matrice (D1) où nous utilisons la notation employée aux section 4.3.1 à 4.3.5. La matrice ψ est la matrice des dérivées premières par rapport aux paramètres de la matrice des restrictions sur le modèle général *j* pour obtenir le modèle *i*. La matrice C est présentée à l'équation (D2) où A_{kk} est la matrice des dérivées secondes du facteur d'actualisation stochastique et u_t est défini à l'équation (D3). Finalement, dans le cas où les modèles sont mal énoncés et que la distance de Hansen-Jaggannthan est positive, la matrice de covariance des paramètres est définie à l'équation (D4) où le terme l_t est défini à l'équation (D5) où A_k est la matrice des dérivées premières du facteur d'actualisation stochastique. Cette matrice de covariance peut également être estimée de façon consistante par l'approche de Newey et West (1987a).

(D1) $$(\psi(C + F'\Omega^{-1}F)^{-1}\psi')^{-1}\psi \operatorname{cov}(\hat{\theta})\psi'$$

(D2) $$C = E[u_t A_{kk}]$$

(D3) $$u_t = g(\hat{\theta}, X_t)'\Omega^{-1}x_t$$

(D4) $$\operatorname{cov}(\hat{\theta}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} E[l_t l_t']$$

(D5) $$(C + F'\Omega^{-1}F)^{-1}[F'\Omega^{-1}g(\hat{\theta}, X_t) + (A_k - F'\Omega^{-1}x_t)u_t]$$

Annexe E : Représentation des modèles en facteurs

Les équations suivantes présentent l'expression des modèles linéaires factoriels associés aux différents modèles de tarification avec consommation estimés à la section 4.4 et dérivés à partir de l'approximation linéaire des facteurs d'actualisation stochastique de la section 3.3.2. Les modèles sont représentés pour la forme impliquant directement les termes de covariance avec les facteurs de risque afin de déterminer les paramètres du facteur d'actualisation correspondant. La représentation des modèles sous cette forme est obtenue à partir de la formulation générale (84).

Le CCAPM est présenté à l'équation (E1) et le coefficient d'aversion au risque à (E2) où b_1 est le coefficient sur le terme de covariance.

(E1) $$E[R_{i,t} - R_f] = b_1 \operatorname{cov}(R^e_{i,t}, \Delta c_t)$$

(E2) $$\gamma = b_1$$

Le modèle EZW est présenté à l'équation (E3) et les paramètres à (E4).

(E3) $$E[R_{i,t} - R_f] = b_1 \operatorname{cov}(R^e_{i,t}, \Delta c_t) + b_2 \operatorname{cov}(R^e_{i,t}, r_{W,t})$$

(E4) $$\gamma = b_1 + b_2\,, \quad \rho = \frac{1 - b_2}{b_1}$$

Le modèle factoriel de Piazzesi *et al.* (2007) est présenté à l'équation (E5) où α est le taux de croissance logarithmique de la proportion des dépenses en biens non durables excluant le service d'habitation sur la consommation totale des biens non durables. L'expression des paramètres est présentée à (E6).

(E5) $$E[R_{i,t} - R_f] = b_1 \operatorname{cov}(R^e_{i,t}, \Delta c_t) + b_2 \operatorname{cov}(R^e_{i,t}, \Delta \alpha_t)$$

(E6) $$\rho = b_1^{-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{b_2 + 1}{b_2 + b_1}$$

Le modèle factoriel de Fillat (2008) est présenté à l'équation (E7) et l'expression des paramètres à (E8).

(E7) $$E[R_{i,t} - R_f] = b_1 \operatorname{cov}(R^e_{i,t}, \Delta c_t) + b_2 \operatorname{cov}(R^e_{i,t}, \Delta \alpha_t) + b_3 \operatorname{cov}(R^e_{i,t}, r_{W,t})$$

(E8) $$\gamma = b_1 + b_3\,, \quad \rho = \frac{1 - b_3}{b_1} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{1 - b_2 - b_1}{b_1 - b_2}$$

Le modèle factoriel de Yogo (2006) et le modèle avec stock d'habitation sont dérivées pour une approximation Cobb-Douglas de l'utilité intratemporelle. L'ESA et le coefficient de proportionnalité ne peuvent être identifiés simultanément. Nous présentons le résultat pour le coefficient de proportionnalité. L'ESA doit alors être prédéterminée. Les deux modèles prennent la forme (E9) où le terme *g* représente respectivement les biens durables et les biens d'habitation alors que les paramètres sont présentés à (E10).

(E9) $$E[R_{i,t} - R_f] = b_1 \operatorname{cov}(R^e_{i,t}, \Delta c_t) + b_2 \operatorname{cov}(R^e_{i,t}, \Delta g_t) + b_3 \operatorname{cov}(R^e_{i,t}, r_{W,t})$$

(E10) $$\gamma = b_1 + b_2 + b_3, \quad \rho = \frac{1 - b_3}{b_1 + b_2} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{b_2}{b_1 + b_2 + \dfrac{b_3 - 1}{\varepsilon}}$$

Le modèle avec consommation structuré contraint est également présenté pour une approximation Cobb-Douglas de l'utilité intratemporelle. L'ESA et le coefficient de proportionnalité ne peuvent non plus être identifiés simultanément. Nous présentons le résultat pour le coefficient de proportionnalité. L'ESA doit alors être prédéterminée. Le modèle est présenté à l'équation (E11) et les paramètres à (E12) et (E13).

(E11) $$E[R_{i,t} - R_f] = b_1 \operatorname{cov}(R^e_{i,t}, \Delta c_t) + b_2 \operatorname{cov}(R^e_{i,t}, \Delta d_t) + b_3 \operatorname{cov}(R^e_{i,t}, \Delta h_t) + b_4 \operatorname{cov}(R^e_{i,t}, r_{W,t})$$

(E12) $$\gamma = b_1 + b_2 + b_3 + b_4, \quad \rho = \frac{1 - b_4}{b_1 + b_2 + b_3}, \quad \omega = \frac{b_2 + b_3}{b_1 + b_2 + b_3 + \dfrac{b_4 - 1}{\varepsilon}} \quad \text{et}$$

(E13) $$\eta = \left[\frac{b_2 + b_3}{b_1 + b_2 + b_3 + \dfrac{b_4 - 1}{\varepsilon}} \right]^{-1} \left[\frac{b_1 + b_2 + b_3}{1 - b_4} - \frac{1}{\varepsilon} \right]^{-1} \left[\frac{b_3}{1 - b_4} \right]$$

Annexe F : Statistiques descriptives des termes de composition de la consommation des facteurs d'actualisation stochastique

Tableau 37 : Statistiques descriptives pour les termes de composition de la consommation des facteurs d'actualisation pour un ESI de 0.01 et un coefficient d'aversion au risque de 105

	Piazzesi et *al*. (2007)	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7	Taux sans risque	Marché	SMB	HML
Moyenne	1,0382	1,0412	0,9279	1,0019	0,9900	0,9872	0,003	0,01	-0,003	0,002
Écart-type	0,205	0,217	0,081	0,020	0,138	0,062	0,007	0,09	0,055	0,058
AutoCorr(1)	0,30	0,30	0,54	0,41	0,35	0,34	0,69	0,07	-0,01	0,12
AutoCorr(2)	0,15	0,15	0,41	0,27	0,22	0,20	0,54	-0,09	0,12	0,01
AutoCorr(3)	0,12	0,12	0,38	0,23	0,18	0,16	0,51	-0,05	-0,01	-0,04
AutoCorr(4)	0,01	0,01	0,28	0,07	0,03	0,03	0,44	-0,04	0,16	0,00
Piazzesi et *al*. (2007)	1,00	1,000	-0,41	-0,67	-0,62	-0,62	-0,16	-0,04	-0,18	0,01
Fillat (2008)		1,00	-0,41	-0,67	-0,62	-0,62	-0,16	-0,04	-0,18	0,01
Yogo (2006)			1,00	0,69	0,81	0,85	0,18	0,05	0,15	-0,06
Stock d'habitation				1,00	0,97	0,96	0,14	0,01	0,18	-0,03
SCAPM					1,00	0,99	0,14	0,01	0,20	-0,03
SCAPM7						1,00	0,16	0,02	0,19	-0,04
Taux sans risque							1,00	0,03	-0,03	0,15
Marché								1,00	-0,16	-0,11
SMB									1,00	-0,11
HML										1,00

Tableau 38 : Statistiques descriptives pour les termes de composition de la consommation des facteurs d'actualisation pour un ESI de 1.5 et un coefficient d'aversion au risque de 105

	Piazzesi et *al*. (2007)	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7	Taux sans risque	Marché	SMB	HML
Moyenne	0,9998	1,2718	0,8875	1,0178	1,4023	0,9895	0,003	0,01	-0,003	0,002
Écart-type	0,002	0,891	0,129	0,125	2,419	0,472	0,007	0,09	0,055	0,058
AutoCorr(1)	0,27	0,35	0,54	0,39	0,08	0,25	0,69	0,07	-0,01	0,12
AutoCorr(2)	0,12	0,17	0,41	0,26	0,05	0,15	0,54	-0,09	0,12	0,01
AutoCorr(3)	0,10	0,15	0,37	0,21	0,02	0,10	0,51	-0,05	-0,01	-0,04
AutoCorr(4)	0,00	0,04	0,27	0,06	-0,04	-0,02	0,44	-0,04	0,16	0,00
Piazzesi et *al*. (2007)	1,00	-0,897	0,40	0,65	0,38	0,54	0,15	0,04	0,21	-0,02
Fillat (2008)		1,00	-0,38	-0,62	-0,27	-0,46	-0,18	-0,06	-0,10	0,00
Yogo (2006)			1,00	0,69	0,55	0,81	0,17	0,05	0,16	-0,06
Stock d'habitation				1,00	0,68	0,90	0,13	0,01	0,19	-0,03
SCAPM					1,00	0,88	0,02	-0,02	0,20	0,01
SCAPM7						1,00	0,10	0,00	0,22	-0,01
Taux sans risque							1,00	0,03	-0,03	0,15
Marché								1,00	-0,16	-0,11
SMB									1,00	-0,11
HML										1,00

Tableau 39 : Statistiques descriptives pour les termes de composition de la consommation des facteurs d'actualisation pour un ESI de 0,01 et un coefficient d'aversion au risque de 10

	Piazzesi et *al*. (2007)	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7	Taux sans risque	Marché	SMB	HML
Moyenne	1,0382	1,0019	0,9933	1,0001	0,9984	0,9987	0,003	0,01	-0,003	0,002
Écart-type	0,205	0,018	0,007	0,002	0,012	0,005	0,007	0,09	0,055	0,058
AutoCorr(1)	0,30	0,27	0,55	0,41	0,37	0,35	0,69	0,07	-0,01	0,12
AutoCorr(2)	0,15	0,13	0,42	0,27	0,23	0,20	0,54	-0,09	0,12	0,01
AutoCorr(3)	0,12	0,10	0,38	0,23	0,20	0,17	0,51	-0,05	-0,01	-0,04
AutoCorr(4)	0,01	0,00	0,28	0,07	0,05	0,04	0,44	-0,04	0,16	0,00
Piazzesi et *al*. (2007)	1,00	0,991	-0,41	-0,67	-0,64	-0,63	-0,16	-0,04	-0,18	0,01
Fillat (2008)		1,00	-0,41	-0,66	-0,63	-0,62	-0,15	-0,04	-0,21	0,02
Yogo (2006)				0,70	0,81	0,85	0,18	0,06	0,15	-0,07
Stock d'habitation				1,00	0,98	0,96	0,14	0,01	0,17	-0,03
SCAPM					1,00	0,99	0,16	0,02	0,19	-0,04
SCAPM7						1,00	0,17	0,02	0,19	-0,04
Taux sans risque							1,00	0,03	-0,03	0,15
Marché								1,00	-0,16	-0,11
SMB									1,00	-0,11
HML										1,00

Tableau 40 : Statistiques descriptives pour les termes de composition de la consommation des facteurs d'actualisation pour un ESI de 1.5 et un coefficient d'aversion au risque de 10

	Piazzesi et *al*. (2007)	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7	Taux sans risque	Marché	SMB	HML
Moyenne	0,9998	1,0064	0,9889	1,0009	0,9919	0,9921	0,003	0,01	-0,003	0,002
Écart-type	0,002	0,052	0,012	0,011	0,080	0,036	0,007	0,09	0,055	0,058
AutoCorr(1)	0,27	0,28	0,55	0,41	0,36	0,35	0,69	0,07	-0,01	0,12
AutoCorr(2)	0,12	0,13	0,42	0,27	0,22	0,20	0,54	-0,09	0,12	0,01
AutoCorr(3)	0,10	0,11	0,38	0,23	0,19	0,17	0,51	-0,05	-0,01	-0,04
AutoCorr(4)	0,00	0,00	0,28	0,07	0,04	0,03	0,44	-0,04	0,16	0,00
Piazzesi et *al*. (2007)	1,00	-0,999	0,41	0,66	0,62	0,62	0,15	0,04	0,21	-0,02
Fillat (2008)		1,00	-0,41	-0,66	-0,63	-0,62	-0,15	-0,04	-0,20	0,02
Yogo (2006)			1,00	0,70	0,81	0,85	0,18	0,06	0,15	-0,07
Stock d'habitation				1,00	0,98	0,96	0,14	0,01	0,18	-0,03
SCAPM					1,00	0,99	0,15	0,02	0,19	-0,04
SCAPM7						1,00	0,16	0,02	0,19	-0,04
Taux sans risque							1,00	0,03	-0,03	0,15
Marché								1,00	-0,16	-0,11
SMB									1,00	-0,11
HML										1,00

Annexe G : Procédure de test pour l'estimation des modèles sur la période 1960-2007 précédent la crise financière

Tableau 41 : Test de Wald sur les modèles emboîtés Test de différence sur les modèles emboîtés (D-Test) pour la période 1960-2007

Test de différence (D-test) Newey-West (1987b) sur les J-Stats de modèles emboîtés pour l'estimation sur la période 1960-2007 avant la crise financière. Les *p-values* sont présentés sous les statistiques du test et sont reportées en caractère gras lorsque significatives à au moins 5%. La première colonne présente le test de différence pour les modèles avec fonction d'utilité puissance par rapport au CCAPM.

	CCAPM	EZW	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
CCAPM		0,344	0,670	0,323	0,670	0,362	0,348
		0,557	0,715	0,851	0,715	0,834	0,840
EZW			0,326	-0,022	0,326	0,018	0,003
			0,568	1,000	0,568	0,894	0,953
Piazzesi et al. (2007)	0,786		-0,116				
	0,375						
Ogaki et Reinhart (1998)	-1,106			1,429			
				0,232			
Stock d'habitation crra	-0,013				0,683		
					0,408		
SCAPM crra	-0,135					0,497	
						0,481	
SCAPM7 crra	-0,081						0,428
							0,513

Tableau 42 : Test de Wald sur les modèles emboîtés pour la période 1960-2007

P-value des test de Wald pour les restrictions entre les modèles de consommation emboîtés sur la période 1960-2007 précédent la crise financière. Dans le cas des modèles avec utilité puissance, la contrainte pour obtenir le CCAPM est l'équalité de l'ESA et l'ESI $\varepsilon=\rho$. La contrainte sur les modèles avec un risque de composition de la consommation pour obtenir le modèle EZW est également l'équalité de l'ESA et l'ESI alors que l'équalité du coefficient d'aversion au risque et l'inverse de l'ESI $\gamma=1/\rho$ permet d'obtenir les modèles avec utilité puissance. Finalement, les deux contraintes permettent d'obtenir le CCAPM à partir de ces derniers modèles. La première colonne présente les *p-values des* tests de Wald pour les modèles avec fonction d'utilité puissance par rapport au CCAPM.

	CCAPM	EZW	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
CCAPM		0,141	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**
EZW			**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**
Piazzesi et al. (2007)	**0,000**		0,558				
Ogaki et Reinhart (1998)	**0,000**			**0,030**			
Stock d'habitation crra	**0,000**				0,558		
SCAPM crra	**0,000**					**0,006**	
SCAPM7 crra	**0,000**						**0,042**

Tableau 43 : Test sur la différence des distances de Hansen-Jagannathan des modèles emboîtés pour la période 1960-2007

Test de Gospodinov et *al*. (2013) sur la différence des carrés des HJD et du produit du nombre d'observations pour les modèles de consommation emboîtés sur la période 1960-2007 précédent la crise financière. Les *p-values* sont présentées sous les statistiques du test et sont reportées en caractère gras lorsque significatives à au moins 5%. La première colonne présente le test de différence pour les modèles avec fonction d'utilité puissance par rapport au CCAPM.

	CCAPM	EZW	Fillat (2008)	Yogo (2006)	Stock d'habitation	SCAPM	SCAPM7
CCAPM		2,913	5,120	2,732	5,120	2,102	2,566
		1,000	0,855	0,705	0,855	0,735	0,767
EZW			2,207	-0,180	2,207	-0,810	-0,346
			0,000		0,000		
Piazzesi et al. (2007)	3,45		1,673				
	0,000		**0,000**				
Ogaki et Reinhart (1998)	-2,24			3,202			
				0,000			
Stock d'habitation crra	0,06				5,064		
	0,003				**0,000**		
SCAPM crra	0,26					1,841	
	0,000					**0,000**	
SCAPM7 crra	0,17						2,398
	0,000						**0,000**