HEC MONTRÉAL

Cyclicité dans le risque opérationnel des compagnies d'assurances américaines

par

Raphaël Zerbato

Sciences de la gestion
(Economie Financière appliquée)

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de maitrise ès sciences (M.Sc.)

Mai 2017

© Raphaël Zerbato, 2017

Contents

1 Introduction **2**

2 Revue de littérature **7**
2.1 Contexte, réglementations et modèles 7
2.2 Risque opérationnel des assurances 11
2.3 Les chaines de Markov 13

3 Présentation des données **15**
3.1 Introduction aux données 15
3.2 Mesure d'asymétrie et d'aplatissement 20

4 Présentation du modèle **23**
4.1 Chaine de Markov cachée 23
4.2 Test de caractérisation 27
4.3 Densités et méthodes d'estimation: 28
4.3.1 Loi Normale: 28
4.3.2 Loi Normale asymetrique: 29
4.3.3 Loi Beta Généralisée de type 2: 31

5 Résulats **34**
5.1 Modèle Normale/Normale 34
5.2 Modèle SKN/GB2, GB2/GB2 42
5.2.1 Somme des pertes mensuelles 42
Données complètes: 42
Données sans pertes extrêmes: 53
5.2.2 Moyennes des pertes mensuelles: 60

6 Conclusion **70**

7 Bibliographie **72**

8 Annexe **74**

1 Introduction

Le but de l'existence des règlementations sur les fonds propres des banques et des compagnies d'assurance est le même : il s'agit de protéger les petits épargnants et les propriétaires de police d'assurance d'éventuelles faillites de leurs institutions financières partenaires. Depuis la dernière crise financière, le secteur bancaire n'est maintenant plus le seul à se trouver être la cible des critiques du public. La perte astronomique enregistrée par AIG, American International Group, en Février 2008 et l'utilisation croissante de produits financiers complexes dérivés de l'industrie bancaire par les grands groupes d'assurance, incitent les régulateurs à se pencher sur les niveaux de risque pris au sein de cette industrie. La notion de prise de risque 'légale et mesurée' n'est désormais plus le seul apanage de l'industrie bancaire mais est maintenant partagée par le secteur des assurances et ses nouvelles réglementations. À la différence du secteur bancaire, le secteur de l'assurance a souvent été considéré comme un élément stabilisateur de l'économie. Cela peut expliquer le nombre relativement moins important d'études publiées s'interessant au caractère pro ou contra-cyclique des risques de ce secteur, en particulier le risque opérationnel.

Cependant et comme mentionné plus haut, de nombreux exemples attestent d'un changement d'activité de la part des plus gros groupes d'assurances vers des pratiques traditionnellement associées aux banques. En 2016 les groupes d'assurance étaient responsables de 12% du marché global de la dette privée au États-Unis [1]. En 2015 MetLife.inc la plus grande compagnie de produit d'assurance vie américaine écrivit plus de prêts immobilier qu'au cours de ses 148 ans d'existence. Ce glissement des plus grosses compagnies d'assurances américaines vers des pratiques bancaires est susceptible d'entrainer des niveaux de risque opérationnel plus élevé au sein d'un secteur réputé stable. Déjà plusieurs scandales ont fait surfaces mêlant des pratiques bancaires au sein de grandes compagnies d'assurances.

En 2008 la compagnie AIG enregistrait une perte record, perte qui força le gouvernement américain à la renflouer de peur qu'une chute entraine un boulversement trop important du système financier. Cette perte fut le seul résultat de la division AIG Produits Financiers (AIG Financial Products). Cette unité d'AIG basée à Londres de seulement 377 personnes, alors qu'AIG comptait à l'époque près de 120 000 employé, connu entre 1999 et 2006 une augmentation de son revenu de plus de 400% [2] grâce à son activité de couverture des prêts immobiliers américains. Les banques émettrices souhaitaient se protéger d'éventuels défauts des

[1] https://www.bloomberg.com/news/articles/2016-07-28/as-banks-spurn-risk-insurers-emerge-as-financial-supermarkets

[2] http://www.nytimes.com/2008/09/28/business/28melt.html

emprunteurs américains. À son zénith, la division londonienne d'AIG représentait 17% de la marge opérationnelle du groupe et détenait dans ses livres pour plus de 500 milliards de contrats d'assurances de type Credit Defaut Swap (CDS)[3].

En 2016, la banque WellFargo fut accusée d'avoir frauduleusement ouvert plus de 2 million de comptes bancaires à l'insu de ses clients et fut condamné à verser une amende de 170 million de dollars. Lié par un partenariat avec la compagnie d'assurance californienne Prudential life, la banque est maintenant sous le coup d'une accusation de vente forcée pour avoir fait souscrire à ses clients des produits d'assurance vie Prudential Life. La compagnie d'assurance a également lancé un audit interne de ses activités de ventes et pourrait être sous le coup d'une enquête fédérale.

Afin de comprendre les raisons de l'apparition d'une réglementation internationale dans le domaine de l'assurance, il est intéressant de présenter brièvement les raisons qui ont poussées à l'apparition des accords de Bâle qui représentent la réglementation en vigueur dans le secteur bancaire.

À la fin des années 1980, la crise de la dette des pays émergents met en évidence le danger d'une contagion des créances toxiques alors que la globalisation de l'industrie bancaire bat son plein. À l'initiative du G10, le comité de Bâle rédige les premiers accords de Bâle I en 1988. Ces accords se concentrent sur les institutions émettrices de crédit et font date comme étant les premiers à formuler la nécessité d'assurer tout risque pris par un capital interne de réserve. Le ratio de Cook est l'instrument de mesure proposé, et a pour limite inférieure un total de capital de réserve de 8% des encours de crédit émis par rapport aux capitaux propres de la banque. Ce ratio fut très vite critiqué pour son incapacité à tenir compte de la diversification des risques possibles et fut modifié en 1996 afin de tenir compte du risque de marché.

Les accords de Bâle II en 2004 ont par la suite modernisé cette réglementation. Bâle II s'est bâtit sur trois principaux piliers : 1) Une exigence minimale de fond propre, 2) une surveillance prudente des activités internes et 3) une discipline de marché. Le premier pilier concerne spécifiquement le calcul du capital de couverture permettant de faire face aux trois principaux risques recensés par l'accord, à savoir: le risque de crédit, le risque de marché et le risque opérationnel. La gravité réelle de chaque risque est estimée être de 80% pour le risque de crédit, 15% pour le risque opérationnel et 5% pour le risque de marché (Dionne (2013)). Le deuxième pilier concerne les mesures de validation des procédures de suivi et

[3] https://www.forbes.com/2009/03/13/aig-london-losses-markets-equity-insurance.html

de contrôle des risques. Le troisième pilier soutient le principe de pratiques communes et transparentes de l'industrie bancaire.

Bien que modernisés par rapport à Bâle I, les accords de Bâle II furent critiqués pour leur absence de considération macroéconomique, la négligence du risque systémique et le déséquilibre apparant entre le pilier 1 et les deux autres piliers, qui ne préconisent que des recommandations. Hennani Lameta (2015) relève que dès 2001, la Banque des Règlements Internationaux, l'instance où siège le comité de Bâle, émettait un rapport dans lequel était analysé la relation entre les cycles économiques et l'exposition au risque des banques. Hennani explique que dès 2008, des auteurs, comme Rochet (2008), analysent l'inefficacité des accords de Bâle II qui laissent selon eux trop de liberté aux banques pour choisir des modèles de contrôle interne. Le comportement des actionnaires étant pro-cyclique et les manageurs ayant toute latitude pour choisir un modèle interne 'convenable', ces derniers pouvaient être la cible de pressions politiques d'un actionnariat souhaitant profiter des temps de vaches grasses pour atteindre des rendements importants.

Selon Hennani, la crise financière de 2008 fut un électrochoc et les accords de Bâle III commencèrent à être négociés avec dans l'esprit la nécessité de prendre en compte l'aspect pro-cyclique du risque bancaire ainsi que l'importance démesurée de certains établissements décrits comme 'systémiques'. La réglementation évolue donc actuellement vers un aspect plus macro-prudentiel où l'influence du contexte économique devient critique. Comme dit plus haut, le secteur de l'assurance est maintenant sujet à des changements similaires au niveau international. Dans un contexte de nouvelles réglementations internationales pour l'industrie de l'assurance, ce mémoire s'intéresse à l'effet des cycles économiques sur le risque opérationnel observé dans l'industrie.

Le risque opérationnel fut introduit pour la première fois dans les accords de Bâle II en 2004 alors que des incidents avaient déjà mis en lumière la magnitude que pouvait entraîner de telles pertes. Des scandales comme l'exemple de la banque Barings en 1995 en Angleterre, où un trader prit, à l'insu de sa direction, des positions extrêmes sur le marché japonais et entraîna la chute d'une des plus prestigieuses banques d'affaires anglaise avec une perte de près d'un milliard de dollars.

Comme mentionné plus haut, les accords de Bâle II introduisirent le risque opérationnel comme un des principaux risques au côté des risques de marché et de crédit. Ces accords donnèrent un cadre unifié au risque opérationnel en le définissant et en recommandant une matrice de classification des pertes par unité d'exploitation et par type d'évènement comme le présente le tableau 1. La défini-

tion du risque opérationnel donnée dans le texte de l'accord est : «... le risque de pertes résultant de carences ou de défauts attribuables à des procédures, personnels et systèmes internes ou à des événements extérieurs . » Bâle II [4] (2004). Cette définition souligne le caractère multiforme que peut prendre le risque opérationnel et est à ce jour la plus utilisée dans la littérature. Les accords Européens de Solvabilité 2 pour l'industrie des assurances reprennent cette definition.Le règlement ORSA pour Évaluation interne des risques de Solvabilité (Own risk and Solvency Assessment)[5] des États-Unis, mis en place en 2015 par la NAIC, l'Association Nationale des Commissaires en Assurance, mentionne également explicitement le risque opérationnel comme une des principales familles de risque pour les compagnies d'assurances.

Table 1: Matrice de recensement des risques opérationnels sous Bâle II(2004)

Ligne d'activité	**Type de risque**
Financement des entreprises	Fraude interne
Négociation des ventes	Fraude externe
Banque de détail	Pratiques en matière d'emploi et sécurité sur le lieu de travail
Banque commerciale	Clients produits et pratiques commerciales
Paiements et règlements	Dommages aux actifs corporels
Fonction d'agent	Dysfonctionnements de l'activité et des systèmes
Gestion d'actif	Exécution, livraison et gestion des processus
Courtage de détail	

Si le risque opérationnel des banques ne peut plus être ignoré, les conséquences de ce risque dans le domaine des assurances sont également importantes. Récemment, AIG, a dû faire face à une perte de près de 11 milliards de dollars suite à une exposition non-contrôlée à des Crédit Default Swap (CDSs) mal-évalués lors de la dernière crise financière. L'engouement qu'ont connu ce type de produits dérivés, la mauvaise connaissance de ces produits par les directions et l'oubli des sous-jacents économiques sur lesquels ces CDSs étaient adossés, ont permis de mettre à jour des failles importantes dans les contrôles internes des entreprises financières. La crise résultante de ces manques de contrôle frappe par l'ampleur des pertes subies, reléguant les scandales d'autrefois (Enron, Barings etc...) au rang de faits divers tant l'ampleur des pertes semble d'une autre nature.

[4] P121 chp 5 alinea A

[5] http://www.naic.org/store/free/ORSA_manual.pdf

À partir de la base de données Algo Opdata 2011, ce mémoire analyse l'influence des cycles économiques sur les pertes opérationnelles des compagnies d'assurances américaines. Les modèles internes que proposent les accords de Solvabilité II ou de Bâle II nécessitent l'utilisation de données externes aux compagnies. Les bases de données opérationnelles n'étant pas encore très anciennes, il est nécessaire d'avoir recours à des données externes afin de pouvoir modéliser les évènements rares et d'amplitude élevée. La base de données utilisée regroupe plus de 800 pertes opérationnelles d'un million de dollars et plus de compagnies d'assurances américaines de 1999 à 2011. Les résultats de cette étude sur les pertes opérationnelles permettent d'évaluer l'influence de l'environnement économique lors de l'estimation du capital de couverture nécessaire. L'utilisation des résultats obtenus est double. Premièrement lors du calcul du capital de couverture, la connaissance du contexte économique connu et anticipé peut amener un affinage des modèles. Deuxièmement, lors de l'utilisation de bases de données externes, il est possible de tenir compte d'une certaine corrélation entre les pertes extrêmes obtenues en fonction de la période à laquelle elles ont été obtenues.

Les résultats obtenus nous permettent de mettre en évidence la présence de deux régimes au sein des données de risque opérationnel. Le premier régime couvre la période de l'entre deux crise et globalement de l'automne 2001 à l'été 2007 et le second régime est très largement majoritaire en période de crise (en général plus de 80%) mais est aussi utilisé avant 2001 et de Juillet 2009 à Juin 2011. Ces régimes présentent des caractéristiques différentes, le premier régime pouvant être qualifié de 'central', c'est-à-dire avec un mode élevé et une dispersion plus faible, alors que le second régime peut être qualifié de plus extrême, couvrant à la fois les observations basses mais également les cas les plus extrêmes. Les régimes obtenus ne varient pas si l'on enlève les observations les plus extrêmes (AIG et les attentats du 11 Septembre) mais également si l'on s'intéresse à la perte moyenne mensuelle plutôt qu'à la somme des pertes. Ceci est une bonne indication quant à l'utilité pour une compagnie d'assurance de prendre en compte l'état de l'économie avant de calculer son capital de couverture.

Cette étude s'organise comme suit : la première partie porte sur une revue de la littérature du risque opérationnel, des modèles de mesures et des techniques utilisées dans ce mémoire. La deuxième partie présente la base de données utilisée pour réaliser l'étude. La troisième partie détaille les modèles mathématiques utilisés et la quatrième partie présente les résultats obtenus.

2 Revue de littérature

La revue de littérature de ce mémoire est organisée autour de trois points : une revue de la littérature présentant 1) le contexte, les règlementations et les modèles avancés souvent utilisés pour modéliser le risque opérationnel, 2) le lien entre le risque opérationnel et le contexte macroéconomique ainsi que les similitudes et différences entre le risque opérationnel bancaire et assurantiel, et pour finir 3) une présentation de l'utilisation des modèles de Markov dans la modélisation du risque opérationnel.

2.1 Contexte, réglementations et modèles

Les accords européens de Solvabilité II (2009) sont le pendant pour les assurances des accords de Bâle II (2004). Dans sa thèse Olivier de Lagarde (2010) présente une analyse intéressante des contextes historique et politique qui ont vu naitre ces accords de solvabilité. Historiquement, ces accords s'inscrivent dans la tentative de créer un marché et un cadre légal continental unique pour les compagnies d'assurances européennes. Pour l'auteur, l'incapacité des accords internationaux de Bâle II à prévenir la dernière crise de 2007 a changé la perspective de son étude qui avant la crise tournait autour du concept du « cordonnier malchaussé ». Les accords de Solvabilité II interviennent maintenant dans un contexte où l'industrie financière a mauvaise presse à cause de ses manquements jugés comme responsables de la crise. Certaines critiques adressées tant aux réglementations comptables International Financing Reporting Standards (IFRS) qu'aux accords de la commission de Bâle II tournent autour de l'absence de représentation démocratique au sein de l'élaboration de ces normes.

De ce point de vue, les accords de Solvabilité II représentent une avancée considérable grâce à l'implication de la commission et du parlement européens dans leur élaboration. Les professionnels de l'assurance sont aussi partie prenante dans la création de ces normes mais également et surtout dans la mise en place du mécanisme de contrôle. Ce dernier est d'ailleurs financé par une taxe spéciale sur l'industrie. O. de Lagarde date ainsi les accords de Solvabilité II comme un changement de paradigme dans le domaine de l'assurance où le but n'est plus simplement l'audit d'une compagnie mais d'un secteur d'activité entier. Les accords soutiennent la création d'un cadre technique unifié permettant des mesures cohérentes, mesures nécessaires à l'instauration de la nouvelle notion de légalité dans la prise de risque. Cet état de fait vient de la nécessité de retrouver la confiance du public au vue des dérives récentes de l'industrie. L'auteur note que jusque-là l'industrie semble approuver et accompagner ces changements importants.

Techniquement, les accords de Solvabilité II reprennent les trois piliers cités plus haut proposés par Bâle II. La définition du risque opérationnel et la nomenclature y sont également identiques. Deux méthodes de mesures y sont proposées contre trois pour les accords de Bâle II. La formule standard calcule le capital total en agrégeant les montants trouvés pour chaque risque et en tenant compte des dépendances entre les risques [6] . Les accords laissent cependant la possibilité pour les compagnies d'assurances de développer leurs propres modèles avancés internes. Dans ce cas la Valeur à Risque utilisée est au niveau 99.5%.

Les accords de Solvabilités II sont les premiers, et jusqu'en 2010 les seuls, à mentionner explicitement la nécessité de tenir compte du risque opérationnel dans le calcul du capital de couverture pour le domaine de l'assurance[7] . De nombreuses études mentionnent que les régulations de solvabilité américaines, sous la SMI (Solvency Modernization Initiative) et canadiennes sont en train également d'évoluer vers un cadre général permettant d'unifier les méthodes de calcul de capital [8] . Il est à noter que la NAIC, National Association of Insurance Commissionners des États-Unis, a mis en place une équipe ayant le mandat d'évaluer les possibilités d'introduire une charge de risque opérationnel dans les nouvelles formules de calculs de capital qui seront développées . Le risque opérationnel dans le contexte de l'assurance est donc de plus en plus pris en considération par les réglementations internationales.

La littérature académique corrobore l'importance de l'impact des pertes opérationnelles pour les compagnies financières. Il apparait que les pertes opérationnelles extrêmes ont une probabilité non négligeable de mettre en faillite les compagnies financières. Cummins et al. (2006) mettent en évidence que la diminution de la valeur marchande d'une compagnie suite à une perte opérationnelle excède largement le montant de la perte elle-même. Les auteurs attribuent cet impact plus élevé comme un signe d'anticipation de problèmes sous-jacents qui feront leurs apparitions à la suite de la perte opérationnelle extrême (notamment des problèmes de liquidité). Brown et al.(2009) de leur côté estiment que le risque opérationnel est un facteur d'échec plus important pour les fonds spéculatifs que les risques financiers.

Comme présenté plus haut, les accords internationaux de Bâle II (2004) pour les banques et européens de Solvabilité II (2012) pour les assurances offrent la possibilité d'utiliser un modèle avancé pour le calcul du capital nécessaire à la

[6] Pour plus de précision consulter : https://eiopa.europa.eu/Publications/Quantitative%20impact%20studies/QIS5technical_specifications_20100706.pdf

[7] Sharara et al.(2010a)

[8] Sharara et al.(2010b)

couverture du risque opérationnel de l'entreprise. Le type de modèle utilisé est laissé à la discrétion de la firme, mais les modèles les plus utilisés reposent sur une estimation de la distribution statistique des pertes de la firme. En théorie, la seule source de données représentant parfaitement l'exposition au risque opérationnel d'une firme est son historique de pertes internes. Cependant, afin d'obtenir une meilleure estimation de la gravité et de la fréquence d'évènements extrêmes par définition rares, les accords de Bâle II recommandent d'accompagner l'utilisation des données internes de la compagnie par des données externes récoltées au niveau de l'industrie. Typiquement ces données externes sont utilisées pour modéliser des pertes de grande magnitude et d'occurrence peu fréquente que les jeunes bases de données internes des compagnies recensant le risque opérationnel ne contiennent pas en nombre suffisant. L'utilisation de données externes nécessite cependant des ajustements. Ces pertes doivent être corrigées de certains biais par des méthodes qui seront présentées plus bas avant de pouvoir enrichir la mesure d'exposition des entreprises.

Les modèles avancés reposent en général sur l'estimation de la Valeur à Risque Opérationnelle (VaR) de la compagnie ce qui demande de connaître les distributions statistiques de la fréquence et de la gravité des pertes auxquelles la banque ou la compagnie d'assurance est exposée en fonction de certaines caractéristiques. Ces distributions sont ensuite agrégées en une seule distribution conjointe communément appelée distribution des pertes[9]. Les quantiles de cette distribution conjointe permettent, pour un horizon temporel défini, en général 1 an, d'évaluer la perte opérationnelle maximale au degré de confiance souhaité par la compagnie. La VaR donne ainsi le montant en capital nécessaire pour couvrir le montant total des pertes opérationnelles pour une année avec une probabilité de 99.9% comme demandé dans les accords de Bâle II.

La difficulté des modèles avancés tient au choix et à la paramétrisation des fonctions de densités statistiques décrivant respectivement les sévérités et fréquences des pertes. Dans leur étude, Dutta et Perry (2007) recensent et comparent les différents modèles et méthodes utilisés sur les données internes des entreprises . Le but des auteurs est de donner un cadre d'évaluation commun le plus complet possible des différents modèles internes utilisés. Typiquement les données sur la sévérité des pertes de risque opérationnel présentent de fortes asymétries avec une densité importante pour des valeurs de pertes petites mais un long étalement avec des pertes pouvant atteindre des montants très importants. Les auteurs remarquent que ces caractéristiques entraînent des changements significatifs dans la mesure du risque d'une compagnie suivant les distributions et/ou les méthodes d'estimation

[9]Loss distribution

utilisées.

Dutta et Perry (2007) mettent en évidence la présence d'asymétrie (Skweness) et d'aplatissement (Kurtosis) dans la sévérité de leurs données en effectuant une analyse quantile par quantile. La mesure s'effectue relativement à la loi normale et n'est donc pas une valeur absolue mais une inclinaison relative aux standards de la loi normale. Cette technique est reprise dans cette étude et les résultats montrent des coefficients d'aplatissement et d'asymétrie important et positifs à tous les quantiles.

Les densités testées dans cette étude sont la loi Normale asymétrique de type II, la loi Beta Généralisée de type 2 et la loi Normale. Comme décrit plus bas, l'étude utilise un modèle caché de Markov qui à chaque point associe une probabilité d'appartenance au régime 1 ou au régime 2 et calcule ainsi les paramètres d'une loi statistique dite 'loi émettrice' associée à chaque régime. La loi Normale asymétrique de type II a été utilisée par Dionne et Saissi (2017) dans leur études sur le risque opérationnel des banques et comme son nom l'indique, présente un paramètre permettant de contrôler l'asymétrie de la courbe.

La loi Beta Généralisé de type 2 est utilisée par Dutta et Perry (2007) ainsi que par Dionne et al. (2017) dans leurs études sur le risque opérationnel. Cette loi, décrite initialement par McDonald (1984) et employée dans des études comme Graf et Munnich (2011), fut initialement utilisée afin de modéliser les distributions de revenus dans une économie. Cette loi présente 4 paramètres : A, B, Q, P, qui respectivement modélisent le mode de la distribution, sa forme, sa queue droite et sa queue gauche. La loi Normale est utilisée seule comme référence aux paramètres trouvés pour les autres distributions, ou en couple avec d'autres densités testées.

Modéliser la gravité des pertes opérationnelles est la première étape nécessaire à la construction de modèles LDA[10] avancés. La deuxième étape consiste à évaluer la probabilité d'observer un nombre de perte sur un horizon temporel déterminé, c'est-à-dire la fréquence des pertes. Au cours de leurs travaux de recensement, Dutta et Perry (2007) constatent que la majorité des compagnies interrogées modélisent la fréquence des pertes par des distributions de comptage de type Poisson. Dahen et Dionne (2010) testent deux distributions: la distribution binomiale négative tronquée et la distribution Poisson tronquée. Les lois sont tronquées à 0 car les observations nulles sont, de par la nature du risque opérationnel, beaucoup plus nombreuses que les autres. Ainsi les distributions de fréquence sont modelées comme étant conditionnelles au fait que le nombre de perte soit supérieur à 0

[10] Loss Distribution Approach

sur l'horizon donné. Plus simplement, le modèle cherche à estimer le nombre de pertes probables sur un an, conditionnellement au fait que ce nombre n'est pas nul. Dahen et al.(2010) montrent que la distribution binomiale négative caractérise mieux les données de pertes opérationnelles extrêmes car elle permet à la variance conditionnelle de sa distribution d'être plus élevée que sa moyenne, ce qu'une loi Poisson ne permet pas. Une variance conditionnelle plus élevée est plus adaptée à la nature du risque opérationnel qui comme il est mentionné plus haut, est sujet à des pertes rares mais extrêmes.

2.2 Risque opérationnel des assurances

De plus en plus d'études s'intéressant aux origines du risque opérationnel corroborent les difficultés financières des compagnies avec une exposition au risque opérationnel plus élevée. Un contexte macroéconomique tendu est susceptible d'influer sur la sévérité des pertes en accroissant les difficultés financières de certaines compagnies. Chernobai, Jorion et Yu (2011) s'appuient sur la littérature comptable dans le but d'isoler les variables spécifiques des firmes présentant des Faiblesses de Contrôle Interne (Internal Control Weakness ou ICW). Les variables testées par les auteurs comprennent des éléments comme l'âge de la compagnie, la rémunération du CEO, le levier financier, distance à détresse financière, etc... Leurs résultats montrent que les firmes identifiées comme étant les plus sujettes aux ICWs sont également les firmes qui montrent le plus de pertes opérationnelles. De plus, les auteurs observent spécifiquement une influence plus importantes des variables souvent associées à des entreprises en difficultés financières comme la volatilité du titre boursier ou encore le Tier 1 capital ratio des accords de Bâle sur l'exposition au risque opérationnel.

Esterhuysen, van Vuuren et Styger (2010) arrivent aussi au constat que la sévérité des pertes opérationnelles d'une banque est liée à son environnement et ses variables financières caractéristiques. Dans cette étude, les auteurs s'intéressent aussi aux effets de la crise de 2008 sur les fréquences et les sévérités des pertes opérationnelles. Ils remarquent que si la fréquence des pertes opérationnelles des institutions bancaires ne change pas significativement, la sévérité des pertes est néanmoins beaucoup plus importante au cours de la crise. Les auteurs expliquent cette sévérité accrue par un contexte favorable aux erreurs de management dues à des employés surchargés de travail au cours de la crise ainsi qu'à la multiplication des fusions et acquisitions et autres transactions risquées favorables à des erreurs opérationnelles. Ces conclusions sont tirées du fait que la plupart des erreurs relevées par les auteurs ont pour origines des causes internes à la banque comme des procédures non respectées. Ainsi le contexte de crise a été un terrain favorable

à l'apparition de pertes sévères.

Ces résultats ne sont ainsi pas simplement limités à l'industrie bancaire et sont retrouvés dans d'autres études sur le risque opérationnel. Dionne, Gagné, Gagnon et Vanasse (1997) montrent ainsi que la détresse financière d'une compagnie aérienne a une influence significative sur sa propension à subir un risque opérationnel fort. Ces résultats montrent que les modèles traitant les pertes opérationnelles comme des évènements indépendants sous-évaluent le capital de réserve car ils ne prennent pas en compte la probabilité accrue de perte en cas de contexte difficile pour les entreprises ou de mauvaises pratiques de contrôle interne. Les auteurs montrent que ces conclusions sont partagées pour d'autres secteurs que le secteur bancaire.

La littérature semble donc bien montrer qu'au niveau de l'entreprise, le contexte financier tient une forte influence. Il serait logique de conclure que des conditions financières difficiles apparaissent plus souvent dans un contexte macroéconomique tendu. Dans cet esprit, Allen et Bali (2006) identifient les variables corrélées avec les cycles qu'ils observent dans la mesure de Valeur à Risque (VaR) opérationnelle qu'ils isolent. Leurs résultats soulignent l'aspect pro-cyclique de leur mesure de la VaR opérationnelle avec l'environnement économique des banques. Les variables les plus significativement corrélées avec la VaR opérationnelle sont les variables d'assouplissements monétaires (positif) et les taux d'intérêts (négatif) ce qui permet aux auteurs de conclurent que durant les périodes de surchauffe caractérisées par des taux d'intérêts faibles et de larges assouplissements monétaires, donc typiquement des récessions, les VaRs opérationnelles sont plus élevées. Pour cette étude, les auteurs définissent le risque opérationnel comme le résiduel des baisses importantes des cours boursiers une fois les parts des risques de marché et de crédit retirées. En 2006, les bases de données externes et internes des compagnies financières sur le risque opérationnel n'étaient pas utilisable car ce risque commençait simplement à être pris en compte. Ainsi si les résultats d'Allen et Bali (2006) ont pu être critiqués pour le fait que leur approche ne se basait sur aucune base de données de pertes mais sur des cours boursiers, leurs conclusions restent tout de même une indication importante.

Ce mémoire propose d'analyser la présence de cycles dans les sévérités des pertes opérationnelles des compagnies d'assurances américaines en utilisant une chaine de Markov qui sera présentée plus bas. La présence de cycle haut coïncidant avec des périodes de dépressions économiques serait une indication de l'influence qu'entretient l'économie dans son ensemble sur le secteur de l'assurance. La littérature prête au secteur de l'assurance une stabilité bien supérieure au secteur

bancaire du fait de la nature de ses activités. La différence principale invoquée tient dans le fait que le passif d'une compagnie d'assurance est beaucoup moins liquide que celui d'une banque et protège donc l'assureur d'un évènement de type : panique bancaire. Depuis la crise de 2008 et le cas d'AIG, la littérature s'interroge cependant sur une possible contagion du risque entre les secteurs de l'assurance et de la banque, mais également sur la présence potentiel d'un risque systémique dans le secteur de l'assurance.

2.3 Les chaines de Markov

Un aspect important des modèles mathématiques utilisés est qu'en général ceux-ci supposent l'indépendance statistique des pertes opérationnelles. Les accords de Bâle II (2004) imposent aux établissements financiers d'assigner un montant en capital de risque opérationnel à chaque unité d'exploitation qui les forme. Les recherches sur les modèles internes soulignent la nécessité de prendre en compte la possible diversification du risque opérationnel au sein d'une même entreprise, en prenant en compte les corrélations des risques entre les départements.

Mittnik et Paterlini (2013) ont montré que, contrairement à ce qui était communément attendu, la présence de dépendance entre les pertes opérationnelles de différents départements d'une même entité n'était pas forcément synonyme de diminution de capital de couverture. En utilisant des modèles de dépendance comme la théorie des copules, les résultats obtenus indiquaient que le capital de couverture de l'entité mère était plus élevé que la somme des capitaux de couverture de ses unités d'exploitations calculés séparément. Ces résultats montrent que l'hypothèse d'indépendance des pertes opérationnelles dans les modèles internes peut entraîner de mauvaises estimations des risques encourus. Ce principe de dépendance dans les pertes internes peut être appliqué aux pertes externes. S'il existe une relation entre le risque opérationnelle des compagnies d'assurances et par exemple les cycles économiques, les données externes qui seront incorporées aux modèles internes pourront prendre en compte cette influence. Ce mémoire propose ainsi de vérifier si les conclusions d'Allen et Bali (2006) sont valides pour l'industrie de l'assurance américaine et de mesurer l'influence du contexte macroéconomique en rendant les pertes externes indépendantes conditionnelles au fait d'être dans un régime donné.

Les modèles cachés de Markov sont des cas particuliers de réseaux bayésiens qui sont de plus en plus employés dans l'étude des risques opérationnels à cause de leurs capacités à exprimer des corrélations systémiques. À titre d'exemple, Lu (2013) utilise un modèle caché de Markov modifié pour tenir compte de l'effet de l'environnement macroéconomique sur les risques de défaut des banques. Siu et

al (2006) testent également des chaines de Markov d'ordres différents où les états du monde représentent les états de l'économie en général, sur une simulation de rendement de portefeuille.

Une chaine de Markov[11] est un processus stochastique défini par une matrice de transition (A), une matrice de réalisation (B) et un vecteur de paramètres de départ π. Le monde à chaque période se décompose en un certain nombre d'états i distincts et à chaque état i, la variable observée X (ici les pertes opérationnelles) suit une distribution de probabilité. La distribution de probabilité de la variable X est donc conditionnelle à la réalisation de l'état du monde i sous-jacent. Les chances de transiter d'un état du monde à l'autre à la période suivante sont données par les éléments de la matrice de transition A. En évaluant les différentes distributions des pertes extrêmes pour chaque régime détecté par la chaine de Markov, il est possible d'évaluer la relation entre les périodes de hauts régimes et les cycles des récessions ou de croissance. Les différences dans les paramètres des distributions de fréquence et de gravité observées pour les hauts régimes et les bas régimes permettent de prendre en compte une corrélation dans l'apparition des pertes extrêmes.

Dionne et Saissi (2017) ont montré qu'une chaine de Markov cachée d'ordre 1 décrivait correctement la sévérité des pertes par mois de l'industrie bancaire américaine. L'utilisation d'une chaine de Markov a permis aux auteurs de mettre en évidence l'existence de période de forte exposition au risque opérationnel pour l'industrie bancaire américaine. La période de haut régime la plus significative était associée à la crise financière de 2007-2008. Les auteurs trouvent qu'au cours des régimes hauts, les pertes opérationnelles de l'industrie bancaire américaine obéissent à une loi Student de Type 4 alors que dans les bas régimes, la loi normale est appropriée. La moyenne et la variance des pertes augmentent également significativement dans les régimes élevées. En utilisant les techniques de mise à échelle de Dahen et al. (2010), les auteurs ont testé la validité de leur modèle en effectuant des séries de backtesting pour deux banques. Leurs résultats montrent que les backtests effectués sur les modèles tenant comptent des différents régimes mis en évidence, réussissaient mieux que le modèle classique de scaling utilisé seul. Ces résultats montrent la nécessité de tenir compte des périodes à fort risque systématique lors du calcul de la Valeur à Risque (VaR) opérationnelle d'une compagnie.

[11] Une présentation détaillée de ce modèle est faite dans la partie suivante

3 Présentation des données

3.1 Introduction aux données

Les données utilisées dans cette étude proviennent de la base de données Algo OpData Quantitative Database mise à jour en 2011. Ces données sont confidentielles et peuvent être achetées auprès de la compagnie IBM. Cette base de données contient près de 13 000 observations de pertes de plus d'un million de dollars américains. Les pertes proviennent de sources variées comme des rapports d'institutions régulatrices, des documents légaux, des états-financiers ou des journaux d'affaires. Afin qu'une perte soit inscrite dans la base donnée, il faut que celle-ci soit confirmée par au moins deux sources indépendantes. Chaque perte est accompagnée d'une description de l'évènement, du nom et de la taille[12] de l'entreprise touchée. Chaque perte est également rattachée à un type d'évènement et à une unité d'exploitation[13], par exemple fraude externe dans l'unité d'exploitation des paiements et règlements. La date à laquelle la perte est enregistrée est la date à laquelle celle-ci est écrite dans les livres. Il est à noter que certaines pertes, notamment celles résultantes de procès, peuvent être décalées dans le temps de plusieurs mois du fait de la longueur des procédures.

Nous avons isolé les pertes provenant du secteur de l'assurance et ayant eu lieu aux États-Unis. Celles-ci sont regroupées en 3 unités d'exploitation: Assurance Vie & Santé, Assurance Biens & Dommages et Autres Assurances. Nous avons également isolé les pertes pour lesquelles les entreprises touchées ont un numéro de Classification Industrielle Standard (Standard Industrie Classification,SIC) code commençant par 63 ou 64 pour respectivement: 'Insurance carrier' et 'Insurance agent, broker and service'. La période étudiée va de Janvier 1999 à Juillet 2011. L'échantillon extrait comprend un total de 629 pertes, représentant 85 milliards de dollars[14]. L'annexe 3 offre une description détaillée des 629 pertes par unité d'exploitation et par type d'évènement.

La figure 1 présente la somme des pertes mensuelles pour l'industrie d'assurance américaines avec et sans les évènements extrêmes (SEE) que sont les attaques du 11 Septembre 2001 et la perte d'AIG durant la dernière crise financière. Dans les deux cas ces pertes tombent durant les périodes de crises économiques et de par leurs magnitudes peuvent modifier les résultats obtenus. Les pertes enregistrées comme résultantes des attaques terroristes de New-York présentes dans la base de

[12] Actif total, Nombre d'employés, etc..

[13] Les annexes 2 et 3 présentent la nomenclature des unités d'exploitations et des types d'évènement utilisés

[14] Tous les montants sont actualisés en dollars de 2011.

données sont au nombre de 32, totalisant près de 15 milliards de dollars. 20 pertes sont enregistrées pour le mois de Septembre 2001 pour un montant de 8.4 milliards. La perte d'AIG au cours de la dernière crise financière est de 11 milliards. Les périodes encadrées correspondent aux deux dernières récessions de l'économie américaines, c'est-à-dire d'Avril à Novembre 2001 et de Janvier 2008 à Juillet 2009.

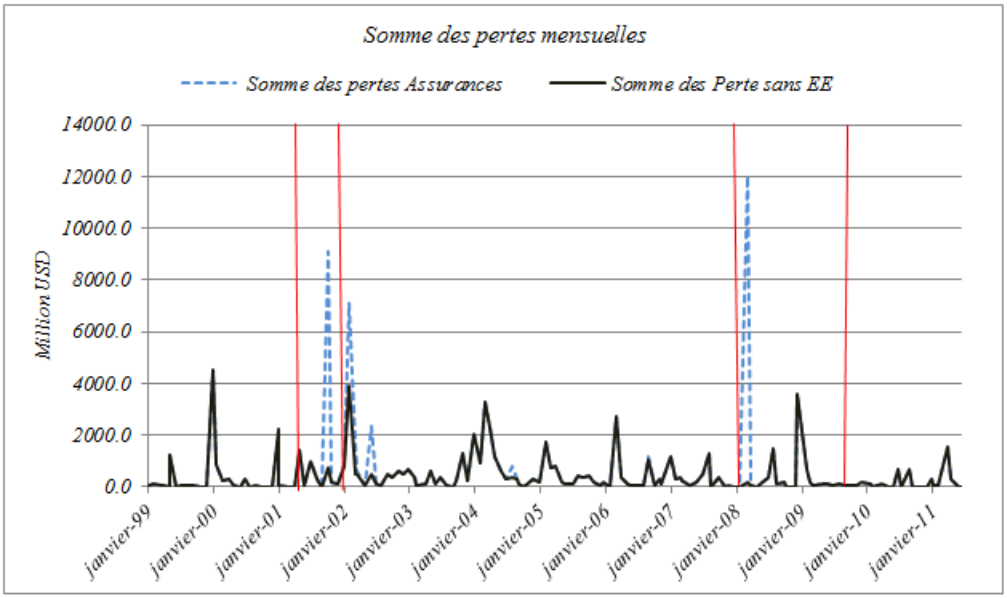

Figure 1: Somme des pertes mensuelles, avec et sans évènements extrêmes

		Séries de données		
Moment	Etat	Perte Mensuelle Moyenne	Somme des pertes mensuelles	Somme SEE
Croissance	Moyenne	102	482	426
	Variance	32 046	873 879	564 100
Récession	Moyenne	242	1 150	401
	Variance	311 737	8 079 359	573 516

Table 2: Somme des pertes mensuelles, avec et sans évènements extrêmes

Le tableau 2 présente la moyenne et la variance des pertes classées en fonction de leur appartenance ou non à une période de récession avec et sans les pertes extrêmes mentionnées plus haut. On constate que les données présentent une

moyenne et une dispersion plus élevées en périodes de récessions économiques qu'en périodes plus calmes. Les résultats obtenus une fois les régimes estimés par le biais d'une chaine de Markov montrent que le mélange de densité décrivant les données le plus fidèlement comprend une densité 'centrale' qui décrit les portions de non-récession et présente une dispersion relativement faible et une densité 'extrême' avec une dispersion importante, une moyenne faible et une queue épaisse, qui explique très largement les périodes de crises. Il est important de noter également que 14 observations sur 151, sont manquantes ou à 0. Huit de ces observations manquantes sont situées dans les premières années de la série c'est-à-dire entre Janvier 1999 et Mars 2001.

Le tableau 3 présente les pertes observées en fonction de certaines caractéristiques des entreprises. La première colonne donne les déciles de la distribution de la variable 'actif total' associée à chaque perte. Il doit être noté que comme la taille des compagnies d'assurances répertoriées augmente, une même compagnie peut être présente dans plusieurs déciles dans le tableau.

Table 3: Nombre de perte et montant des pertes en million par décile d'actifs

Actifs en milliards	**Nombre de pertes**	**Perte totale**	**Perte Moyenne**	**Maximum**	**Médiane**
0-1,9	30	1 878	63	513	15
1,9-4,6	42	5 349	127	1 340	18
4,6-11,1	36	1 832	51	570	11
11,1-30	36	2 904	81	886	11
30-52	55	6 291	114	1 285	25
52-98	37	3 958	107	936	23
98-157	47	7 800	166	2 291	20
157-300	54	12 420	230	3 375	29
300-465	56	6 503	116	1 139	20
465-2 224	56	23 564	421	11 836	16

À la lecture du tableau 3 on s'aperçoit que la probabilité d'observer une perte extrême semble augmenter avec la taille de l'entreprise. Les mesures de médiane bien que globalement plus élevées pour les hauts déciles, n'augmentent pas autant que la perte moyenne qui, passée 30 milliards d'actif, reste au-delà de cent millions. Le nombre de perte est globalement plus élevé pour les déciles d'actifs élevés. La taille de la compagnie semble donc être un facteur aggravant pour la gravité

des pertes. Les compagnies d'assurances les plus importantes sont également les plus susceptibles de s'éloigner de leurs activités traditionnelles d'assurance et par la même, comme mentionner plus haut, sont les plus susceptibles de subir des 'contagions' du secteur bancaire. Il est à noter cependant que les montants de pertes moyennes n'augmentent pas aussi rapidement que les actifs des compagnies d'assurances. Les pertes opérationnelles ont donc un impactes également important sur les petites compagnies d'assurances.

La figure 2 montre l'évolution des pertes mensuelles avec ou sans évènements extrêmes et comment la série réagit aux périodes de récession.

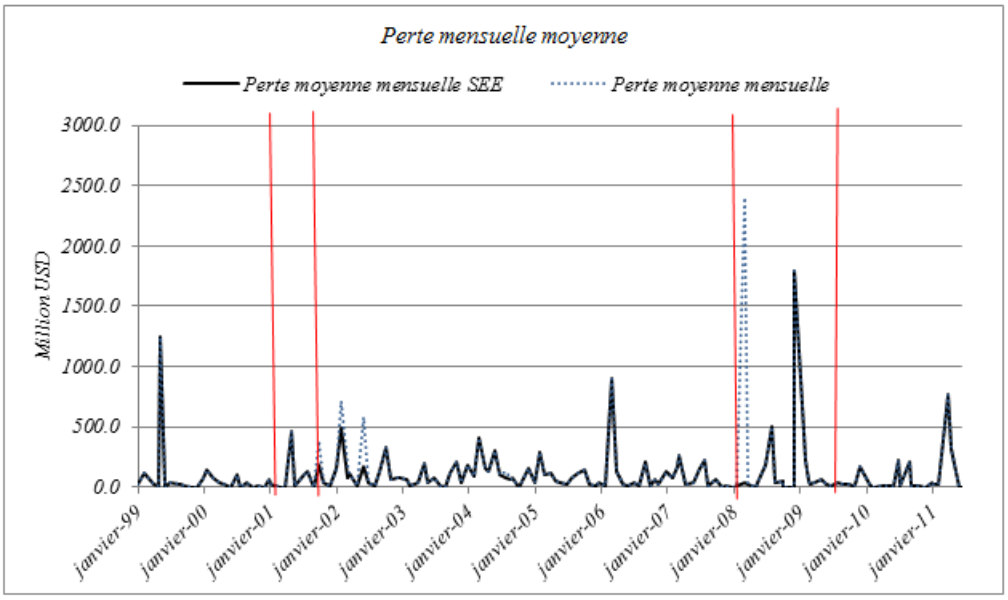

Figure 2: Pertes moyennes mensuelles, avec et sans évènements extrêmes

La figure 3 présente les histogrammes de la somme des pertes mensuelles et des pertes moyennes mensuelles. Les deux présentent une forte asymétrie avec une concentration des données à gauche et une longue queue. En s'intéressant aux histogrammes 3 et 4 on observe que la série MOYENNE est plus ressérrée avec un 'ventre' plus épais, mais une queue moins longue que la série SOMME. Les paramètres des mixtures de densités obtenus sur ses séries reflètent cette observation comme il sera présenté plus bas.

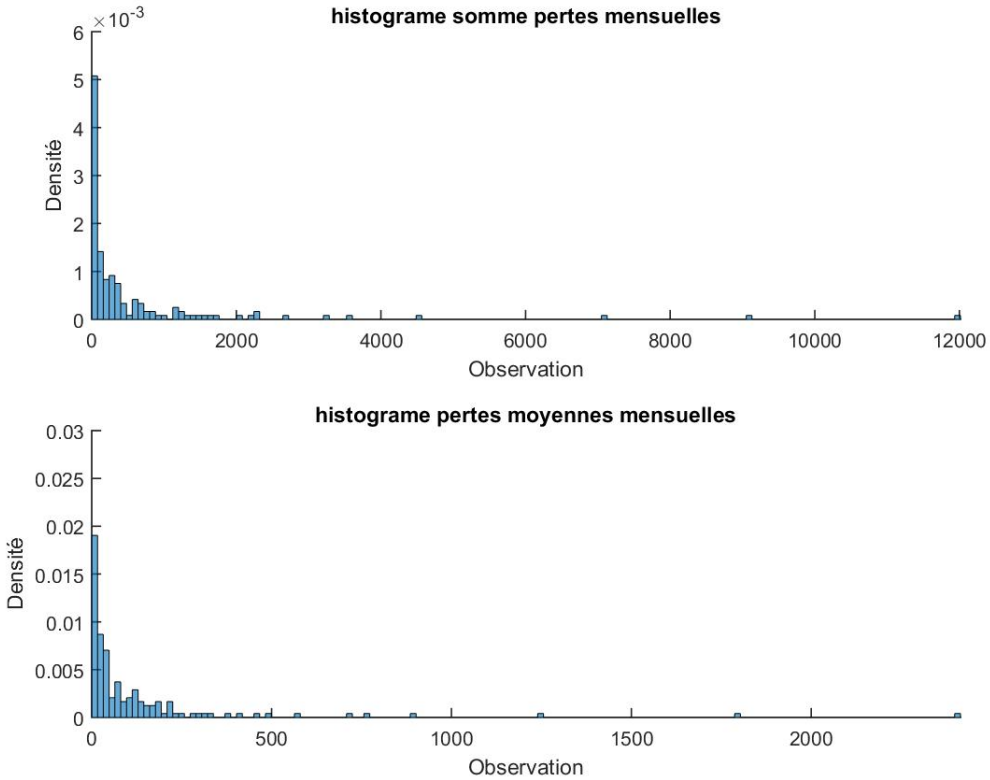

Figure 3: Somme et moyenne des pertes mensuelles

En considérant les 20% des mois connaissant les pertes les plus élevés dans les deux ensembles de données formés, il est intéressant de noter des différences entre les périodes élevées des deux séries et ainsi observer l'effet d'inclure le nombre de pertes mensuelles dans les données. Le seuil de sévérité choisi pour la série SOMME est de 1000 millions et de 200 millions pour la série MOYENNE. Au-delà de ce seuil, il y a 14 périodes étant considérées élevées dans les deux ensembles, 8 était élevées dans la série SOMME et ne le sont plus lorsque la moyenne est considérée et inversement 7 périodes élevées dans la série MOYENNE ne le sont pas dans la série SOMME.

Les régimes détectés sur la série MOYENNE nous donnent une autre perspective sur le comportement du risque opérationnel dans l'industrie de l'assurance. Le tableau 3 montre que plus la taille d'une compagnie est importante plus la probabilité d'observer une perte sévère est élevée. Ainsi utiliser la série MOYENNE permet de mettre les régimes de risque détectés du point de vue de l'entreprise 'moyenne' dans l'industrie.

3.2 Mesure d'asymétrie et d'aplatissement

Ce mémoire tente de caractériser les pertes opérationnelles par des courbes de densités statistiques. Il est donc important d'analyser quantile par quantile les formes que ces données prennent. Suivant la méthode utilisée par Dutta et Perry (2007), nous analysons les 3ème et 4ème moments de la distribution des 151 montants moyens perdus relativement à une distribution normale. Les données de risque opérationnel présentent par nature un fort coefficient d'asymétrie vers la droite ainsi que des queues très épaisses. Si ces caractéristiques sont retrouvées ici, elles seront de bonnes indications afin de choisir des distributions statistiques appropriées aux données.

La mesure d'asymétrie est effectuée de deux façons :

$$X_{0.5} - X_c = X_{1-c} - X_{0.5} \tag{1}$$

L'indice"c" est ici le centile choisi pour la variable X. La formule 1 mesure la distance entre chaque centile et la médiane. Si pour des centiles équivalents (ex : 5ème et 95ème), la distance n'est pas égale alors les données sont asymétriques.

$$midplot_c = 1/2 * (X_c + X_{1-c}) \tag{2}$$

Toujours suivant la méthode utilisée par Dutta et al.(2007), la deuxième formule utilisée mesure l'aspect systématique de l'asymétrie, c'est-à-dire si celle-ci se retrouve dans tous les centiles ou simplement dans les centiles les plus extrêmes. La formule 2 mesure la moyenne des centiles équivalents qui, si les données sont symétriques, doit être égale à la médiane pour tout centile.

La figure 4 présente les résultats obtenus de la distribution empirique de la moyenne des pertes opérationnelles regroupée mensuellement:

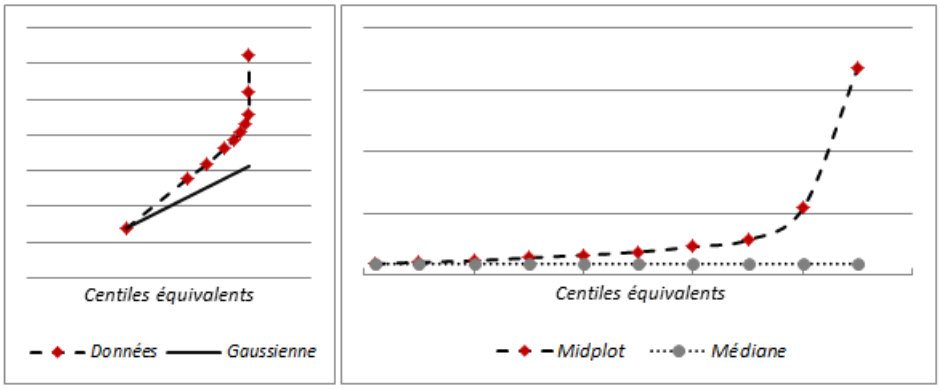

Figure 4: Asymétrie et Asymétrie systématique

Le graphique de gauche de la figure 4 montre l'asymétrie à gauche des données par rapport à une loi symétrique telle que la loi normale. Les centiles de la distribution empirique sont calculés ainsi que la distance par rapport à la médiane au moyen de la formule (1). Pour une loi symétrique telle que la loi normale, la distance entre centiles équivalent (ex : 5ème et 95ème) par rapport à la médiane doit être la même. Rapportée sur un graphique la distance produit donc une ligne droite de pente 1 à mesure que les centiles s'éloigent de la médiane. L'analyse du graphique de gauche de la figure 4 montre une courbe de pente supérieure à 1. Cela montre que l'accroissement de la distance est plus rapide pour les centiles supérieurs par rapport à la médiane que pour les centiles équivalents inférieurs. Cela signifie qu'il y a une aysmetrie avec une distribution décalée à gauche de la médiane, une queue étalée à droite et donc un coefficient d'asymétrie positif.

Le graphique de droite de la figure 2 présente la mesure obtenue grâce à la formule 2. Le graphique montre une asymétrie présente à tous les centiles mais allant en s'accroissant pour les centiles extrêmes. Ce graphique constitue une preuve supplémentaire que les données ont une concentration de masse à la droite de la courbe.

Suivant Dutta et al.(2007), le coefficient d'aplatissement est mesuré en utilisant une mesure dite 'pseudo-sigma'. Toujours dans le principe de mesurer ce moment par rapport au coefficient d'aplatissement d'une loi normale, la mesure s'appuie sur le fait qu'une variable X de moyenne μ et d'écart-type σ suivant une loi normale peut s'écrire: $X = \mu + \sigma * Z$, où Z suit une loi normale standard centrée

réduite. Il en découle qu'une mesure d'épaisseur de queue s'exprimant ainsi :

$$\sigma* = \frac{(Y_c - Y_{1-c})}{2 * Z_c} \tag{3}$$

où l'indice 'c' est un centile choisi. Si les données suivent une loi normale, la mesure sera constante à mesure que les centiles varient. En revanche si la queue de la distribution empirique est plus épaisse que celle d'une normale, la mesure augmentera à mesure que les centiles augmentent. La figure 5 présente la mesure de pseudo-sigma des 151 pertes moyennes mensuelles étudiées:

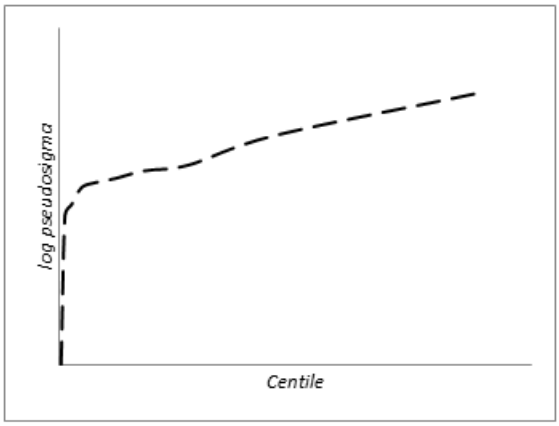

Figure 5: Mesure d'aplatissement

L'exploration des données centile par centile montrent bien que les moments 3 et 4 des données sont fortement positifs. Nous retrouvons donc ici des caractéristiques du risque opérationnel très bien documentées dans la littérature. Ces caractéristiques nous informent également sur le type de densité à priori plus susceptible de convenir à de telles données, à savoir des densités capables de modéliser de fortes asymétries ainsi que des queues épaisses.

Les mesures effectuées dans cette sous-section l'ont été sur les données de pertes moyennes mensuelles (MOYENNE). Les résultats pour la série des somme des pertes mensuelles (SOMME) présentent des caractéristiques similaires à celles obtenus pour la série MOYENNE.

4 Présentation du modèle

4.1 Chaine de Markov cachée

Dans ce mémoire l'algorithme de Baum-Welch est utilisé afin d'estimer les régimes de la chaine de Markov cachée. Les chaines de Markov sont des modèles stochastiques définis par trois éléments traditionnellement appelés (π, A, B). Le modèle postule l'existence d'états du monde ou de régimes possibles sous-jacents à chaque observation. Au temps t, chaque observation peut être dans n'importe quel régime, dont le nombre total est choisi au préalable dans la construction du modèle. Dans notre modèle les régimes ne sont pas observables et doivent être déduits des observations obtenues d'où le nom de modèle de Markov caché. Le but du modèle est ainsi d'estimer les paramètres des matrices A et B qui sont respectivement la matrice de transition de régime et la matrice de réalisation des observations.

Pour le reste du modèle, nous posons les variables suivantes :

- o_{ti} = l'observation au temps t dans l'état du monde i
- O = la séquence d'observation $\{o_1,o_2,\ldots,o_t\}$
- B = la matrice de réalisation de l'observation
- M = le nombre d'observations total
- π = le vecteur de probabilité initial du système
- a_{ij} = est la probabilité de passer du régime i au régime j
- A = la matrice de transition de régime contenant les a_{ij}
- Q = $\{i,j\}$= où i et j sont les régimes Markoviens t
- N = le nombre d'états du système.
- T= la longueur de la chaîne d'observation
- λ = les trois vecteurs de parametre (π, A, B)

Dans cette étude nous utilisons la méthode de Baum-Welsh qui développe un algorithme capable d'estimer les paramètres du modèle en calculant la probabilité d'obtenir la séquence d'observation avec les paramètres obtenus. Les états de la chaîne de Markov n'étant pas observés, ceux-ci sont estimés par la procédure de l'algorithme qui calcule pour chaque observation une probabilité d'appartenir à un des régimes. Le modèle ne requiert comme hypothèse que la densité émettrice associée à chaque régime et le nombre de régimes présumés. Le modèle estimé est donc une chaîne de Markov dont les régimes ne sont pas observés mais induits des observations.

Le modèle doit être initié avec des paramètres aléatoires dans (π, A, B). Intuitivement, l'algorithme est une boucle qui estime une série de paramètres, calcule

la probabilité d'obtenir ces observations en fonction des paramètres estimés. Si la probabilité augmente par rapport à la série de paramètres calculés précédemment l'algorithme recommence et estime de nouveau une nouvelle série de paramètres à partir des paramètres estimés de la boucle précédente. Tant que la probabilité d'observer la séquence d'observations avec les paramètres estimés n'est pas stable, l'algorithme recommence.

Les matrice A et B sont de dimensions N*N et contiennent respectivement les probabilités de transiter de régime en régime et les probabilités conditionnelles au régime d'observer l'observation t.

Ces probabilités sont exprimées à partir des fonctions de densités avec lesquelles nous essayons de caractériser les données. Dans cette étude trois densités sont testées: la Normale $O \sim N(\mu, \sigma)$, la Normale asymetrique $O \sim ESN(\theta, \sigma, \epsilon)$, et la loi Beta Généralisé de type 2 $O \sim GB2(a, b, p, q)$. Ces lois et leurs méthodes d'estimations seront présentées individuellement dans la section 4.3.

L'algorithme utilisé dans cette étude est l'algorithme digamma qui se développe comme suit :

$$\gamma_{i,j} = \frac{\alpha_t(i) a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{P(O \mid \lambda)} \tag{4}$$

L'algorithme digamma s'interprète comme la probabilité d'être à l'état i au temps t et de transiter à l'état du monde j au temps *t+1*. Le dénominateur normalise la probabilité au monde réel des observations.

Afin de donner un bref aperçu du fonctionnement de l'algorithme, nous décomposons ici l'alpha-pass ou communément appelé pass-forward qui correspond à $\alpha_t(i)$.

Il est plus simple de nous placer dans le cadre du modèle utilisé dans cette étude car celui-ci ne comporte que 2 régimes : haut et bas. Les observations sont les 151 pertes mensuelles moyennes observées pour les compagnies d'assurances américaines entre Janvier 1999 et Juillet 2011.

Nous changeons donc les notations définies plus haut pour N=2, h pour le régime 1 et b pour le régime 2. Les matrices A et B sont maintenant de dimensions 2*2 et prennent cette forme:

$$A = \begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{j,i} & a_{j,j} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} f_i(O_t) & 0 \\ 0 & f_j(O_t) \end{pmatrix}$$

Les éléments de la matrice A sont les probabilités de transition entre les différents régimes. Les éléments de la matrice B sont, par exemple, les deux fonctions de densité GB2 correspondant à chaque régime. Elles donnent donc la 'probabilité' d'observer la perte o en fonction du régime sous-jacent.

Toujours dans le cadre de notre étude, il convient de décomposer l'alpha-pass:

$$\alpha_t(i) = [\sum_{i=1}^{2} \alpha_{t-1}(j) a_{ji}] b_i(o_t) \tag{5}$$

L'alpha-pass est la probabilité d'observer la séquence partielle d'observations jusqu'au temps t, c'est à dire:

$$\alpha_t(i) = P(o_0, o_1..., o_t, x_t = q_i \mid \lambda) \tag{6}$$

L'alpha-pass peut être estimé de manière récursive en suivant la procédure ci-dessous:

1. Initialiser les π probabilités initiales et calculer $\alpha_0(i) = \pi_i b_i(o_{t=1})$, pour i allant de 1 à 2.

2. Pour t allant de 1 à 151 mois et i allant de 1 à 2, calculer l'alpha-pass:

$$\alpha_t(i) = [\sum_{i=1}^{2} \alpha_{t-1}(j) a_{ji}] b_i(o_t) \tag{7}$$

3. De l'équation (5), il apparait clairement que l'alpha-pass calculé à l'observation finale 151 donne la probabilité d'observer O, vecteur d'observations, connaissant les paramètres du modèle. Ce résultat est important car comme il est mentionné plus haut, c'est cette probabilité qui nous sert de juge de paix sur la validité des paramètres estimés. Ainsi:

$$P(O \mid \lambda) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_{t=151}(i) \tag{8}$$

L'équation (9) présente l'algorithme Beta, également appelé le backward-pass :

$$\beta_t(i) = \sum_{i=1}^{2} a_{ji} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j) \tag{9}$$

La construction de l'algorithme Beta est donc très similaire à celle de l'algorithme Alpha, l'équation (5), à ceci près que ce premier calcule la probabilité d'observer la séquence d'observations commençant à l'observation 151 en fonction des paramètres du modèle.

En associant les deux algorithmes, nous obtenons la formule $\gamma(i)$ qui est clairement la probabilité que l'état sous-jacent à t soit i:

$$\gamma_i = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(O \mid \lambda)} \tag{10}$$

Une fois la probabilité γ_i calculée , il faut pouvoir estimer la probabilité observée de changer de régime au cours de la séquence. À cette fin nous utilisons la formule 'digamma' ci-dessous:

$$\gamma_t(i,j) = \frac{\alpha_t(i)a_{i,j}b_j(O_{t+1})\beta_{t+1}(j)}{P(O/\lambda)} \tag{11}$$

La probabilité $\gamma_t(i,j)$ est donc la probabilité d'être au temps t dans le régime i et de transiter au temps $t+1$ au régime j. En sommant les digammas obtenues pour un temps t sur l'indice j , nous retrouvons donc $\gamma_t(j)$.

$$\gamma_t(j) = \sum_j \gamma_t(i,j) \tag{12}$$

La procédure d'estimation des paramètres des matrices A et B grâce à l'algorithme Baum-Welch, s'établit donc comme suit :

1. Pour i allant de 1 à 2, calculer:

$$\pi_i = \gamma_0(i) \tag{13}$$

2. Pour i allant de 1 à 2 et j allant de 1 à 2, calculer:

$$a_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^{150} \gamma_t(i,j)}{\sum_{i=1}^{150} \gamma_t(i)} \tag{14}$$

3. Les éléments de la matrice B sont estimés ici par la méthode du maximum de vraisemblance et donc peuvent différer par densité utilisée (voir section 4.3).

4.2 Test de caractérisation

L'algorithme d'estimation est malheureusement soumis à l'incertitude des para mètres initiaux donnés aux densités à la première itération. Une modification de ces paramètres peut entraîner d'importants changements dans les résultats finaux et rendre difficile la sélection de résultats appropriés.

Afin de remédier à ce problème et de choisir un mélange de densité approprié, une rapide analyse de sensibilité des paramètres de départ est présentée ainsi que les différents types de résultats obtenus. Dans le but de discriminer entre les mélanges de densité ainsi obtenus, nous utilisons les graphiques présentant les quantiles empiriques des données et les quantiles théoriques de la densité trouvée présentés (QQ plot), ainsi que la procédure des pseudo-résidus décrite par Zucchini et MacDonnald (2009).

Un QQ plot est un outil présentant la relation entre les quantiles d'un échantillon empirique et les quantiles théoriques d'une loi à laquelle on teste la paternité de l'échantillon. Si les quantiles ainsi présentés tombent relativement près d'une droite, et donc présente un aspect linéaire, cela donne une bonne indication quant à la validité de l'hypothèse testée. En effet cela indique que la distance entre chaque paire de quantile théorique et son équivalent empirique est proportionnellement similaire.

La méthode des pseudo-résidus décrite par Zucchini et al.(2009) s'appuie sur le fait que si la variable aléatoire X a pour fonction de distribution cumulative $F(x) = u$, alors u suit une loi uniforme sur [0,1]. En appliquant la fonction quantile de la loi normale standard à la variable u, $\Phi(u) = Z$, alors la variable Z, appelée normale pseudo-résidu, doit suivre une loi normale si la loi testée suit correctement les données. Afin de s'assurer que les pseudo-résidus trouvés pour chaque mélange de densité suivent une loi normale, nous utiliserons un QQ plot ainsi qu'un test T, le test du Chi carré et le test de Shapiro-Wilk. Les résultats des trois tests sont présentés pour un alpha de 5 pourcents ainsi que la P-Value obtenue.

Le test Shapiro-Wilk se base sur la corrélation entre les données et les scores correspondant de la loi normale et est recommandé comme étant le plus fiable par Thode (2002) afin de tester la normalité d'un échantillon. Le test statistique

s'établit comme suit:

$$W = \frac{\sum_{t=1}^{n} a_i x_i^2}{\sum_{t=1}^{n} x_i - \overline{x}} \tag{15}$$

où x_i est la i ème valeur ordonnée de l'échantillon, $\overline{x}$ est la moyenne échantillonale et la constante a_i s'exprime comme suit:

$$a_i = \frac{m^T V^- 1}{(m^T V^- 1 V^- 1 m^T)^(1/2)} \tag{16}$$

$'m'$ étant le vecteur des valeurs ordonnées correspondantes tirées d'un échantillon de loi Normale et V, la covariance de ces statistiques. H_0 pose l'hypothèse que l'échantillon est effectivement tiré d'une loi Normale. Par conséquent pour un niveau de signification donné, si la p-value obtenue est supérieure au seuil, l'hypothèse que l'échantillon est tiré d'une loi Normale ne peut être rejetée. Tous les tests dans cette étude sont proposés avec un niveau de signification α de 5%.

4.3 Densités et méthodes d'estimation:

4.3.1 Loi Normale:

Comme constaté plus haut, les pertes opérationnelles présentent une importante aysmétrie et une épaisseur de queue supérieure à celle d'une loi Normale. Par conséquent nous ne nous attendons pas à observer des résultats concluant avec ce type de densité. Cependant il est intéressant d'utiliser ces résultats comme point de référence dans l'analyse des mélanges de densités subséquemment testés.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * exp(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}) \tag{17}$$

Les paramètres μ et σ sont estimés par maximum de vraissemblance à chaque itération. C'est-à-dire pour le régime j :

$$\hat{\mu_j} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \gamma_{tj} O_t}{n} \qquad \hat{\sigma_j^2} = \frac{\sum_{t=1}^{n} (O_t - \mu_j)^2 * \gamma_{tj}}{\sum_{t=1}^{n} \gamma_{tj}} \tag{18}$$

Où γ_{tj} est la probabilité que l'observation O_t au temps t provienne du régime j.

4.3.2 Loi Normale asymetrique:

La loi Normale asymetrique de type II est une extension de la loi Normale permettant d'obtenir des formes de densités asymétriques :

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x^2}{2(1+\epsilon)^2}) \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x^2}{2(1-\epsilon)^2}) \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases} \tag{19}$$

L'équation (19) présente la densité d'une loi Normale asymetrique Standard. Comme l'équation (19) le montre, la loi Normale asymetrique est une transformation de la loi Normale Standard en ajoutant le paramètre ϵ, compris entre -1 et 1, contrôlant l'asymetrie de la densité. Comme le montre Mudholkar et al.(2000), si $x \sim ESN(0, 1, \epsilon)$ et $x = (O - \theta)/\sigma$ alors $\frac{f_0(\frac{(x-\theta)}{\sigma})}{\sigma}$ correspond à une fonction de densité de loi $ESN(\theta, \sigma, \epsilon)$. Les paramètres θ et σ contrôlent respectivement le mode et l'écart-type de la densité.

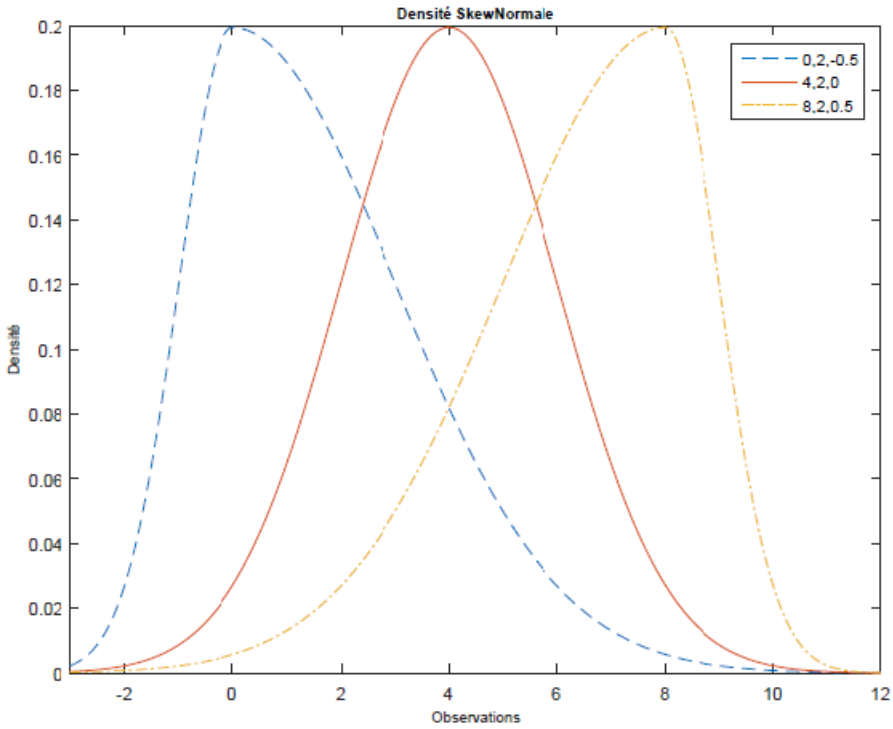

Figure 6: Densités SKN

La méthode d'estimation utilisée est la méthode du maximum de vraisemblance décrite par Mudholkar et al.(2000). Cette méthode exploite le fait que l'on peut

obtenir une estimation des paramètres séquentielle conditionnellement à la connaissance des premiers.

Par le lemma 4.1 de Mudholkar et al.(2000), il existe un entier naturel $k = k(x_1, ..., x_n)$ tel que la fonction de vaisemblance $l(\theta, \sigma^2, \epsilon)$ s'écrit:

$$l(\theta, \sigma^2, \epsilon) = -\frac{n}{2} log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\Big[\sum_{t=1}^{k} \frac{(O_t - \theta)^2}{(1+\epsilon)^2} + \sum_{t=k+1}^{n} \frac{(O_t - \theta)^2}{(1-\epsilon)^2}\Big] \tag{20}$$

Par le lemma 4.3, les auteurs montrent que pour un σ fixe et pour tout $1 \leq k < n$ alors le minimum local de la fonction (20), determine le maximum local de la fonction de log vraisemblance, pour $j = 1, 2, ..., n-1$:

$$g_j(x, \theta, \epsilon) = \frac{1}{4}\Bigg(\Big[\sum_{t=1}^{l}(O_t - \theta)^2\Big]^{1/3} + \Big[\sum_{t=l+1}^{n}(O_t - \theta)^2\Big]^{1/3}\Bigg)^3 \tag{21}$$

Les auteurs observent que la fonction est généralement monotone dans la plupart des intervalles formés par les observations. Par conséquent le problème revient à trouver l'intervalle présentant le minimum de (20). Dans cette étude, les observations sont ordonnées par ordre croissant et en utilisant la fonction 'linespace' de Matlab, l'intervalle entre chaque paire d'observations est fractionnée en 101 unités de longueurs équivalentes. L'image de chaqu'un des 100 modes potentiels ainsi crées entre deux observations est alors testée et gardée en mémoire. Le mode est ensuite estimé en trouvant le minimum de la matrice (100*N) ainsi formée.

Une fois le mode trouvé, les auteurs montrent que les équations (22) et (23) déterminant les paramètres σ et ϵ maximisent la fonction de vraisemblance:

$$\hat{\epsilon} = \frac{\Big[\sum_{t=1}^{l}(O_t - \hat{\theta})^2\Big]^{1/3} - \Big[\sum_{t=l+1}^{n}(O_t - \theta)^2\Big]^{1/3}}{\Big[\sum_{t=1}^{l}(O_t - \hat{\theta})^2\Big]^{1/3} + \Big[\sum_{t=l+1}^{n}(O_t - \theta)^2\Big]^{1/3}} \tag{22}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{4n}\Big[\Big(\sum_{t=1}^{l}(O_t - \hat{\theta})^2\Big)^{1/3} + \Big(\sum_{t=l+1}^{n}(O_t - \hat{\theta})^2\Big)^{1/3}\Big]^3 \tag{23}$$

Dans cette étude, la loi Normale asymetrique est utilisée de paire avec une autre densité afin de modéliser un mélange de densité. L'influence de chaque densité dans le mélange est determiné par le poid γ_{ti} qui indique la probabilité que l'observation O_t soit émise par la densité qualifiée de régime j comme présentée dans la partie précédente sur les chaines de Markov. Le poids γ_{ti} est incorporé dans l'estimation

de la loi Normale asymetrique en changeant l'équation de vraisemblance (20) de manière à pondérer la distance $O_t - \theta$ par le poid γ_{ti} de l'observation O_t ainsi le compte d'observation n devient pondéré par la somme des poids γ_j pour le régime j, qui représente la taille relative de la loi dans l'échantillon.

$$l(\theta, \sigma^2, \epsilon) = -\frac{\sum_t \gamma_{ti}}{2} log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\Big[\sum_{t=1}^{k} \frac{(O_t - \theta)^2 * \gamma_{ti}}{(1+\epsilon)^2} + \sum_{t=k+1}^{n} \frac{(O_t - \theta)^2 * \gamma_{ti}}{(1-\epsilon)^2}\Big] \quad (24)$$

La technique d'estimation par maximum de vraisemblance proposée par les auteurs reste valide et les résultats ne changent pas, à ceci près que les équations (21),(22) et (23) incorporent maintenant les poids γ du modèle de Markov:

$$g_j(x, \theta, \epsilon) = \frac{1}{4}\left(\Big[\sum_{t=1}^{l}(O_t - \theta)^2 * \gamma_{tj}\Big]^{1/3} + \Big[\sum_{t=l+1}^{n}(O_t - \theta)^2 * \gamma_{tj}\Big]^{1/3}\right)^3 \quad (25)$$

$$\hat{\epsilon}_j = \frac{\Big[\sum_{t=1}^{l}(O_t - \hat{\theta})^2 * \gamma_{tj}\Big]^{1/3} - \Big[\sum_{t=l+1}^{n}(O_t - \theta)^2 * \gamma_{tj}\Big]^{1/3}}{\Big[\sum_{t=1}^{l}(O_t - \hat{\theta})^2 * \gamma_{tj}\Big]^{1/3} + \Big[\sum_{t=l+1}^{n}(O_t - \theta)^2 * \gamma_{tj}\Big]^{1/3}} \quad (26)$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{4\sum_t \gamma_{tj}}\Big[\Big(\sum_{t=1}^{l}(O_t - \theta)^2 * \gamma_{tj}\Big)^{1/3} + \Big(\sum_{t=l+1}^{n}(O_t - \theta)^2 * \gamma_{tj}\Big)^{1/3}\Big]^3 \quad (27)$$

Pour plus de précisions quant aux preuves et pour les cas particuliers où les modes se trouvent dans le premier ou le dernier intervalle, se conférer à l'article Mudholkar et al. (2000).

4.3.3 Loi Beta Généralisée de type 2:

La loi Béta Généralisé de Second type est une loi dérivée de la loi Beta par McDonald (1984) afin de décrire la distribution de revenus dans une économie. Elle fut développée pour modéliser des données présentant d'importants coefficients d'aplatissement et/ou d'asymétrie.

La densité est donnée par l'équation :

$$f(O; a, b, p, q) = \frac{a}{b * B(p, q)} \frac{(O/b)^{ap-1}}{(1 + (O/b)^a)^{p+q}} \quad (28)$$

Où $B(p, q)$ est la fonction Beta. Les paramètres a, b, p, q sont positifs et contrôlent la forme de la courbe respectivement la forme globale, l'échelle de la

courbe, la queue gauche et la queue droite. Cummins et al.(1992) utilisent déjà cette densité dans le but de modéliser les pertes des compagnies d'assurance.

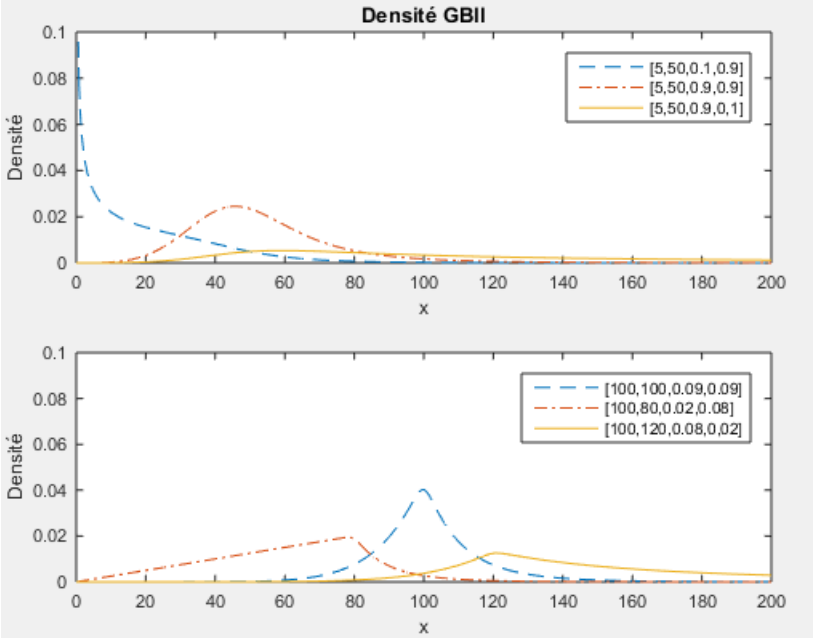

Figure 7: Densités GB2

Le log de la fonction de densité s'exprime:

$$\begin{aligned} log(f) = log(a) - log(b) - log(\Gamma(p)) - log(\Gamma(p+q)) \\ +(ap-1)log(O/b) - (p+q)log(1+(O/b)^a), \end{aligned} \tag{29}$$

où Γ est la fonction Gamma. La fonction de vraisemblance de la fonction GB2 ne peut pas être optimisée de façon analytique mais au moyen d'algorithme d'optimisation numérique. Dans cette étude, l'algorithme de point intérieur (Interior Point Algorithm) de la commande Matlab 'fmincon' est utilisé pour l'optimisation.

De la même façon que pour la loi Normale asymetrique vue précédement, le poids γ obtenu par le modèle de Markov doit être incorporé dans l'équation de vraisemblance. L'optimisation numérique se fait sur l'équation 30 au moyen de l'aglorithme du point intérieur sous Matlab[15].

$$\begin{aligned} log(L_j) = \sum_{t=1}^{n} \Big[(\gamma_{jt})(log(a) - log(b) - log(\Gamma(p)) - log(\Gamma(p+q))) + \\ (\gamma_{jt})(ap-1)log(O_t/b) - (\gamma_{jt})(p+q)log(1+(O_t/b)^a)) \Big] \end{aligned} \tag{30}$$

[15]fonction fmincon

La fonction génératrice des moments centrés de la loi GB2 est donnée par l'équation:

$$E(x^k) = b^k \frac{\Gamma(p + k/a) * \Gamma(q - k/a)}{\Gamma(p) * \Gamma(q)} \tag{31}$$

où k est l'ordre du moment calculé.

5 Résulats

Comme vu précédemment, les données présentent des mesures d'aplatissement et d'asymétrie fortement plus élevées que celles d'une loi Normale. Les résultats obtenus confirment cette observation et sont en ligne avec les caractéristiques attendues de comportement de données de risque opérationnel.

Les mixtures de densités donnant les meilleurs résultats comprennent: une densité 'centrale' intervenant principalement dans les pertes ayant lieu entre les deux récessions, c'est-à-dire globalement entre Novembre 2001 et Novembre 2009, et une densité 'extrême' couvrant les pertes des deux récessions. Ces résultats sont valables à plus ou moins d'intensité pour toutes les combinaisons de densités testées et ce peu importe si les pertes exceptionnelles sont inclues ou pas.

Comme vu précédemment, les données en périodes de crises présentent une variance plus importante que les pertes en période de croissance. La même chose n'étant pas vrai pour la fréquence des pertes (nombre de pertes par mois), cela indique que la sévérité des pertes est différente en temps de récession qu'en temps de calme. Ces conclusions concordent avec les résultats trouvées par Dionne et Saissi (2017) portant sur les banques. Cette section présente les résultats obtenus par les modèles s'ajustant le mieux à chaques séries étudiées. Les résultats trouvés présentent des caractéristiques semblables et notamment des changements de régimes similaires.

5.1 Modèle Normale/Normale

Comme le montre l'analyse des données de perte, les mesures d'asymétrie systématique et d'épaisseur de queue empirique sont bien plus élevées que celle d'une loi Normale. Un mélange de loi Normale permet de modéliser des données asymétriques ayant des queues plus épaisse qu'une loi Normale seule. Le modèle utilisé suppose cependant que les données suivent une loi Normale conditionnellement au régime. La présence d'asymétrie systématique mesurée à tous les centiles dans la sous-section 3.2 devrait dégrader la capacité d'un mélange de loi Normale a correctement caractériser les données de pertes opérationnelles.

Par conséquent un mélange de loi Normale n'est pas particulièrement indiqué afin de caractériser les données de pertes opérationnelles. Cette sous-section est utile car elle présente l'interprétation des figures ainsi que les résultats d'un modèle que nous savons être peu adapté aux données. Nous avons donc une limite inférieure à ce que l'on peut considérer comme des résultats acceptables pour décrire les données.

	Model Normal/Normal			
	Normale 1		Normale 2	
Paramètres initiaux	Mu	0.1	Mu	50
	Sigma	500	Sigma	500
Paramètres finaux	Mu	110.7	Mu	1.86e(03)
	Sigma	125	Sigma	2.3e(03)
	Probabilité de transition modèle 1			
	à régime 1		à régime2	
De régime 1	0.76		0.24	
De régime 2	0.62		0.38	
	Test de Normalité sur pseudo-résidus			
	1 if H1 true 5%		P value	
T-Test	0		0.58	
Chi-Square	1		3.69e(-07)	
Shapiro-Wilk	1		3.79e(-09)	
	Critères			
	AIC		BIC	
	1.66		22.56	

Table 4: Résultats modèle Normale/Normale

Loi/ Etat	Crise	Non-Crise	Taille
Normal 1	0.72	0.72	0.72
Normal 2	0.28	0.28	0.28

Table 5: Probabilités conditionnelles

La table 4 présente les paramètres initiaux et finaux des densités utilisées pour caractériser les régimes des données des pertes moyennes mensuelles. La table 4 présente également la matrice de transition entre régime calculée par le modèle ainsi que les tests des normalités effectués sur les pseudo-résidus tels qu'introduits dans la section 4.2. Les tests sont présentés pour un alpha de 5% et la P-value obtenue est indiquée.

Les paramètres finaux des densités Normales 1 et 2 du modèle Normale/Normale montrent que la première densité Normale 1 se positionne plus bas que la densité Normale 2 ($\mu_1 = 110.7 < \mu_2 = 1860$) et possède un écart-type nettement plus faible (σ_1=125 $<$ σ_2=2300). La densité Normale 1 est donc utilisée afin de décrire les mois de sévérité plus faible alors que la densité Normale 2 positionnée plus haut, décrit principalement les mois de sévérité importante. Comme nous le verrons plus tard, cette configuration haut/bas n'est pas retrouvée lorsque d'autres densités sont testées et ne donne pas les meilleurs ajustements. Comme attendu, seul le T-test ne nous permet pas de rejeter que la distribution des pseudo-résidus est normale, ce qui semble indiquer que le modèle ne permet pas de décrire les données correctement.

La table 5 présente la probabilité conditionnelle au fait d'être en récession économique ou non, d'être en régime 1 ou 2. La colonne intitulée 'Taille' donne la probabilité d'observer le régime 1 ou 2 dans l'échantillon des pertes. Ainsi dans le cas de la mixture Normale/Normale, la 1ère loi explique le plus de données de l'échantillon (72%) alors que la 2ème loi ne représente que 28% de l'échantillon et est très aplatie, pouvant ainsi couvrir les pertes extrêmes observées. Le modèle Normale/Normale ne discrimine pas spécialement entre les périodes de crises et de non-crises car les probabilités conditionnelles de la table 5 sont identiques peu importe l'état de l'économie.

La figure 8 nous permet de visualiser l'allure de la densité estimée et ainsi affine notre analyse des résultats des tests des tables 4 et 5.

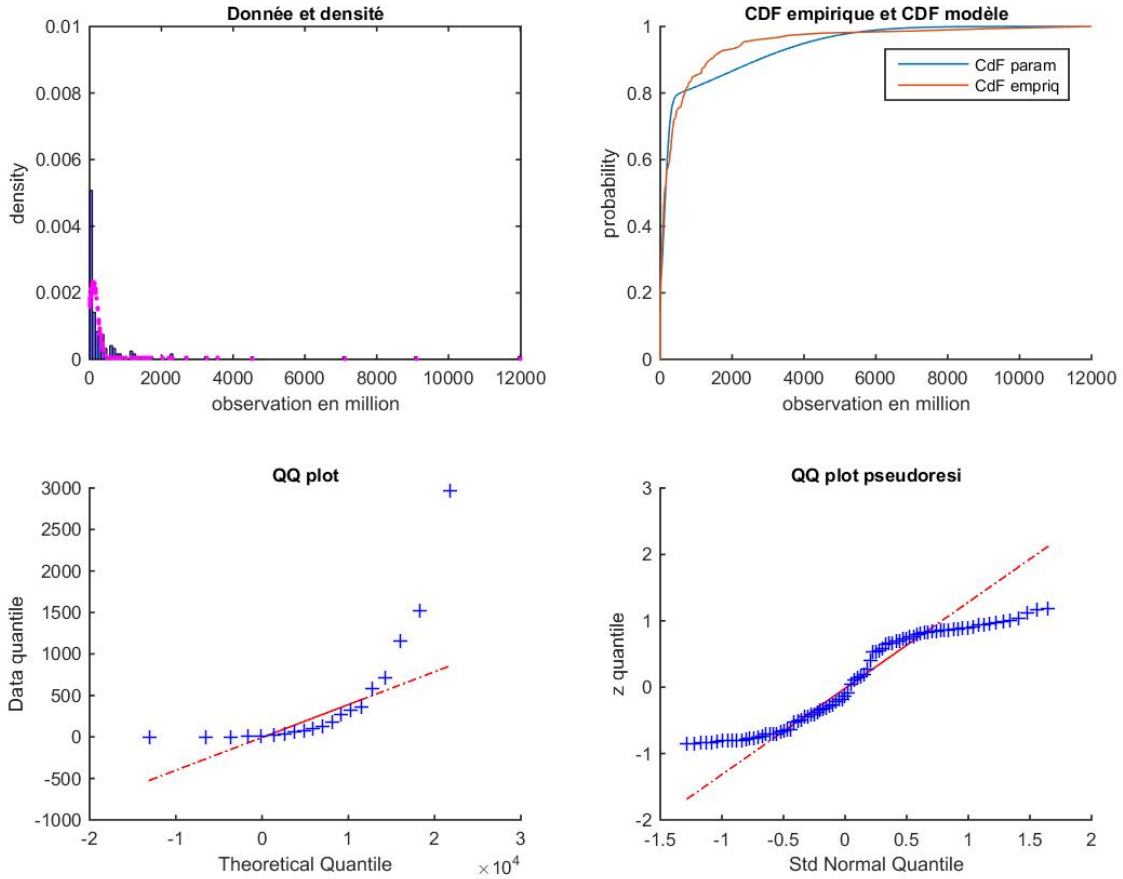

Figure 8: Résultats Mixture Normale

La première sous-figure intitulée 'Données et densité' présente l'histogramme des données et l'image de chaque observation donnée par le mélange de densité trouvé par le modèle. Cette sous-figure donne une indication visuelle utile afin de déterminer si les données sont bien décrites par le modèle. Plus la forme de la densité épouse l'histogramme des données, plus la densité semble appropriée. Cependant, la hauteur des histogrammes dépend du nombre d'intervalles choisi pour faire le graphique. Ceci peut faire varier l'allure générale du graphique.

La deuxième sous-figure intitulée 'CDF empirique et modèle' permet de contourner ce problème en faisant se superposer les deux courbes de distribution cumulative et CDF empirique et CDF modèle. De la même façon, plus les courbes sont proches l'une de l'autre, meilleure est l'indication que le modèle décrit correctement les données.

Les sous-figures 3 et 4, 'QQ plot' et 'QQ plot pseudoresi' sont les QQ plots respectivement des données et des pseudo-résidus définis par Zucchini et al.(2009) et décrits dans la sous-section 'Test de caractérisation des données'. Plus les paires de quantiles empiriques/théoriques sont proches de la droite bleue en pointillés, plus l'échantillon suit la loi théorique testée pour le décrire.

La sous-figure 3, 'QQ plot' met en relation les quantiles du mélange de densités calculées et les quantiles empiriques des données et vient donner une indication visuelle de la non-adéquation de la mixture Normale/Normale aux données. La sous-figure 4, 'QQ plot pseudoresi', vient confirmer ou infirmer les tests de normalité du tableau 4 requis par la méthode des pseudo-résidus développée par Zucchini et al.(2009). Dans le cas du modèle Normale/Normale, les deux QQ plots ne possèdent pas de tendance linéaire claire. En conclusion, le modèle Normale/Normale donne un exemple visuel d'un modèle ne correspondant pas bien aux données.

La figure 9 est utile pour présenter les paramètres initiaux et la convergence obtenus du modèle. L'algorithme utilisé étant sensible à ces paramètres initiaux, il est important de verifier que les résultats obtenus soient robustes à des changements de configuration initiale. Cette figure est présentée pour tous les modèles subséquents afin de montrer que les régimes détectés sont robustes à des configurations initiales différentes.

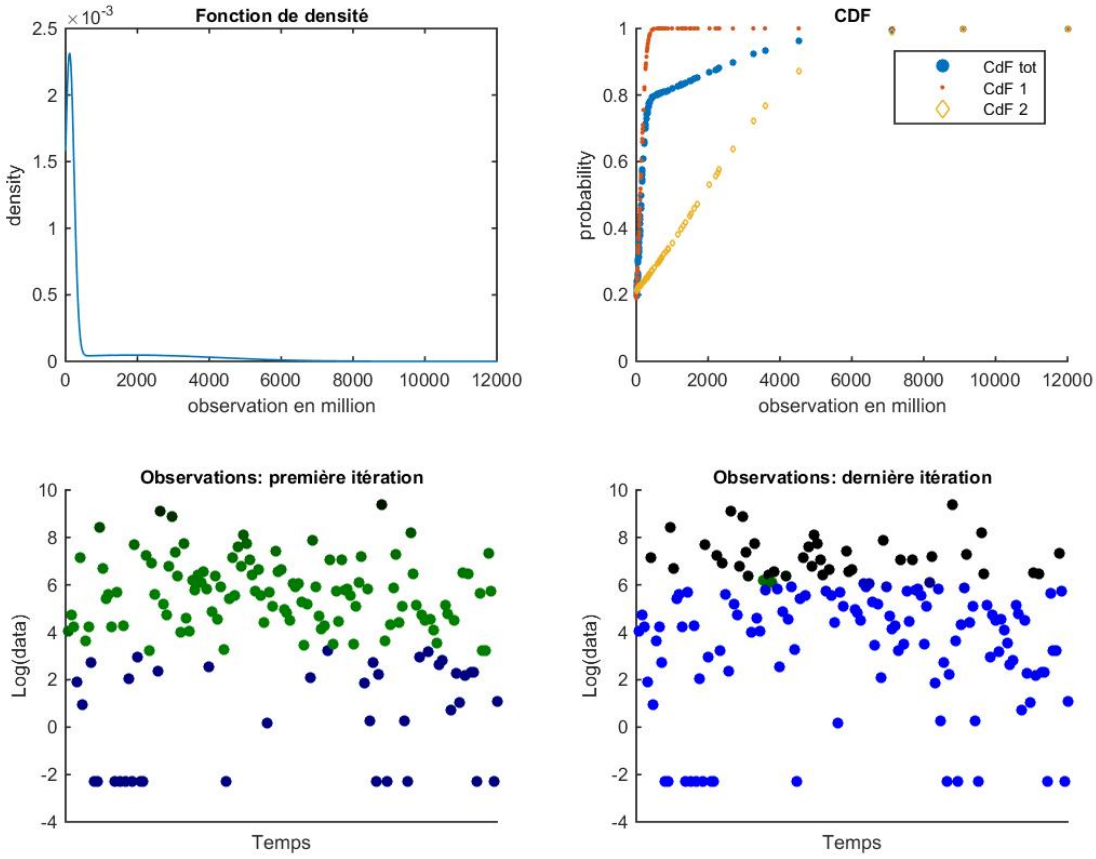

Figure 9: Résultats Normale 2

La première sous-figure de la figure 9 présente la forme du mélange de densité obtenu. La seconde sous-figure intitulée 'CDF' présente les fonctions de probabilité cumulatives des deux densités composant le mélange de densité final estimé. Le graphique nous permet d'évaluer facilement l'influence de chaque loi dans le mélange final en fonction de la valeur de l'observation. Plus la fonction CDF_{tot} est proche de la CDF d'une des deux densités plus celle-ci est influente à cette valeur de perte.

Les deux dernières sous-figures intitulées 'Observations : Première et dernière Itération' présentent les observations en nuage de point. A chaque observation est associée le poids γ calculé par le modèle de Markov à la première itération de l'algorithme, c'est-à-dire aux paramètres initiaux et par la suite aux paramètres

finaux (dernière itération). Ces deux sous-figures donnent une idée de l'évolution des poids au fur et à mesure de la progression de l'algorithme et permettent de contrôler les poids alloués par les paramètres initiaux. Dans le cas Normale/Normale, initialement la loi 1 décrit les observations basses (couleur bleue fonçée) alors que les observations plus élevées sont partagées equitablement entre les deux lois (couleur verte claire). Seules les observations les plus hautes (vert foncé) semblent appartenir à la loi 2. Comme vu précédemment, le modèle Normale/Normale converge vers une configuration: régime 1 pour bas et régime 2 pour haut, comme la division entre observations bleues et noires de la sous-figure 'Observations: dernière itération' montre clairement.

La couleur des observations permet d'apprecier l'appartenance calculée par le modèle à un régime. Si l'observation est teintée de bleue, celle-ci à une probabilité supérieur à 70% d'appartenir au régime 1 et inversement, si celle-ci est teintée de noire, elle appartient au régime 2. Les observations peuvent montrer un dégradé de couleurs allant du bleue foncé au vert foncé en passant par le vert clair. Le bleue foncé indique une observation disputée mais tendant à appartenir à la source 1, le vert clair indique une observation également disputée entre les deux régimes et le vert foncé indique une observation disputée mais tendant à appartenir à la source 2.

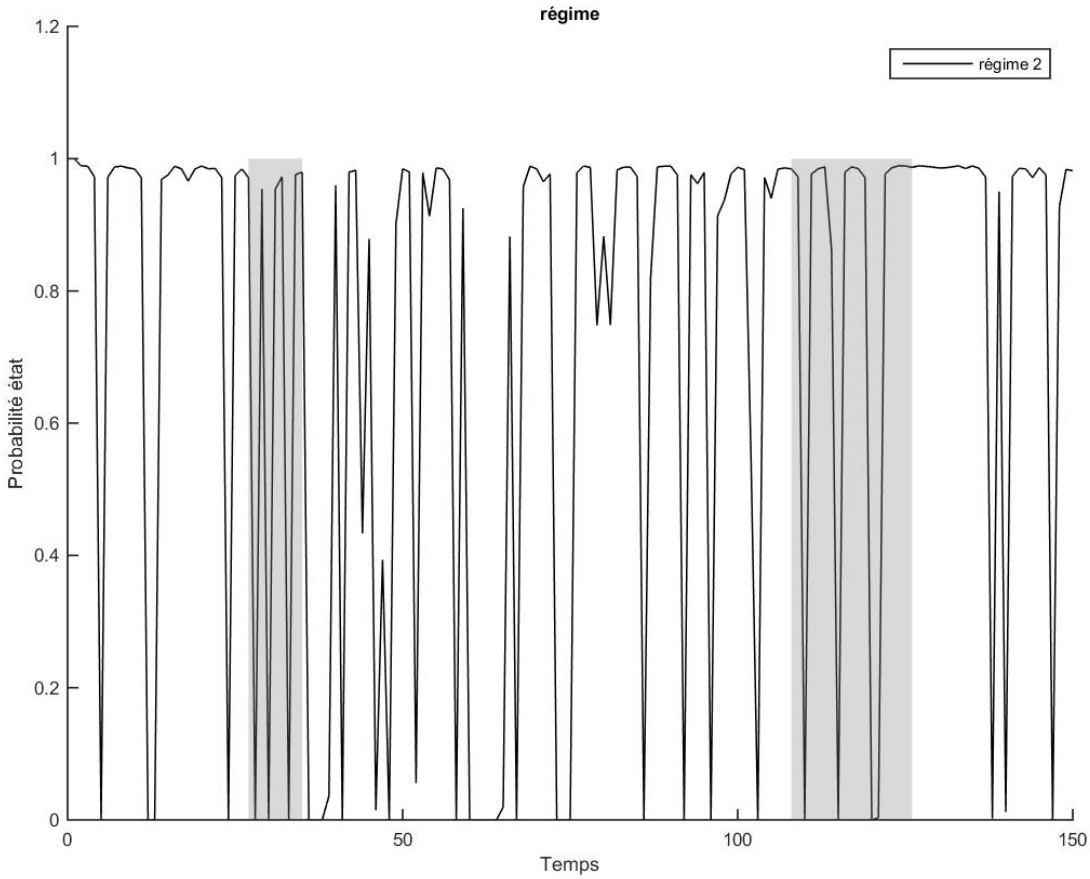

Figure 10: Régime 2, Modèle Normale/Normale

La figure 10 montre la probabilité de chaque mois d'appartenir au régime 2. Comme le modèle ne compte que deux régimes, la probabilité de l'observation d'appartenir au régime 2 est égale à un moins la probabilité d'appartenir au régime 1. Les périodes grisées sur le graphique sont les périodes de récessions économiques les plus récentes. Il est difficile d'évaluer les résultats obtenus grâce à ce modèle car comme vu précédemment, la densité normale 2 décrit principalement les pertes élevées et celles-ci semblent réparties relativement équitablement.

5.2 Modèle SKN/GB2, GB2/GB2

Cette sous-section est divisée en deux parties : la première présente les résultats des modèles sur la série formée par les sommes des pertes mensuelles (SOMME), la seconde présente les résultats des modèles sur la série des pertes mensuelles moyennes (MOYENNE). Comme vu plus haut, les modèles internes évaluent le risque en modélisant une distribution de sévérité (gravité des pertes) et de fréquence d'occurrence (nombre de pertes). Établir la série des pertes moyennes mensuelles permet de vérifier si les résultats des régimes obtenus sur la sévérité des pertes sont similaires lorsque le nombre de pertes mensuelles est pris en compte.

5.2.1 Somme des pertes mensuelles

Les résultats obtenus par les mixtures NormaleAsymetrique/GB2 et GB2/GB2 lorsqu'appliqués à la série temporelle de la somme des pertes mensuelles (SOMME) sont similaires et fortement significatifs. Globalement, ces deux types de mixtures donnent de meilleurs résultats que toute autre combinaison testée comme NormaleAsymetrique/NormaleAsymetrique, GB2/Normale ou NormaleAsymetrique /Normale.

Données complètes: Le tableau 6 présente les paramètres initiaux et finaux des deux mélanges NormaleAsymetrique/GB2 et GB2/GB2 appliqués aux données des sommes des pertes. La partie gauche du tableau donne les paramètres du modèle NormaleAsymetrique/GB2 alors que la partie droite présente ceux du modèle GB2/GB2.

	Model 1				Model 2			
	SKN		GBII		GBII 1		GBII 2	
Paramètres initiaux	Mode	150	A	8	A	5	A	8
	Sigma	200	B	50	B	10	B	90
	Eps	0	P	0.09	P	0.09	P	0.01
			Q	0.2	Q	0.01	Q	0.09
Paramètres finaux	Mode	13	A	0.43	A	1.5	A	0.24
	Sigma	225	B	3.7e(07)	B	777	B	6.0e(09)
	Eps	-0.99	P	0.93	P	0.46	P	2.26
			Q	170	Q	1.11	Q	169
	Probabilité de transition modèle 1				Probabilité de transition modèle 2			
	à régime 1		à régime2		à régime 1		à régime2	
De régime 1	0.81		0.19		0.98		0.0164	
De régime 2	0.04		0.96		0.016		0.984	
	Test de Normalité sur pseudo-résidus				Test de Normalité sur pseudo-résidus			
	1 if H1 true 5%		P value		1 if H1 true 5%		P value	
T-Test	0		0.63		0		0.60	
Chi-Square	0		0.66		0		0.76	
Shapiro-Wilk	0		0.13		0		0.28	
	Critères				Critères			
	AIC		BIC		AIC		BIC	
	883		917		879		912	

Table 6: Somme des pertes mensuelles, Données complètes

Plusieurs observations peuvent être faites par rapport aux paramètres finaux obtenus pour les régimes des deux modèles. Les densités 1 des deux modèles remplissent le même rôle et décrivent les observations de sévérité modérée. La loi GB2 1 possède une queue moins épaisse, commandée par son paramètre A1=1.5, que les lois GB2 2 (A2=0.24) et GB2 (A = 0.43) et possède un coefficient d'asymétrie positif. La loi Normale asymetrique possède également coefficient d'asymétrie positif et son mode se situe autour de 13, décrivant les pertes intermédiaires.

On remarque également que les paramètres finaux de la loi GB2 du modèle SKN/GB2 et de la loi GB2 2 du modèle GB2/GB2 sont proches. Les deux ont un paramètre de mode très élevé (B= 3.7e07 et B=6.0e09), des paramètres

d'épaisseure de queue similaires mais une épaisseur de queue légèrement supérieure pour la densité GB2 du modèle SKN/GB2. La figure 11 montre les deux densités des deux modèles présentées individuellement.

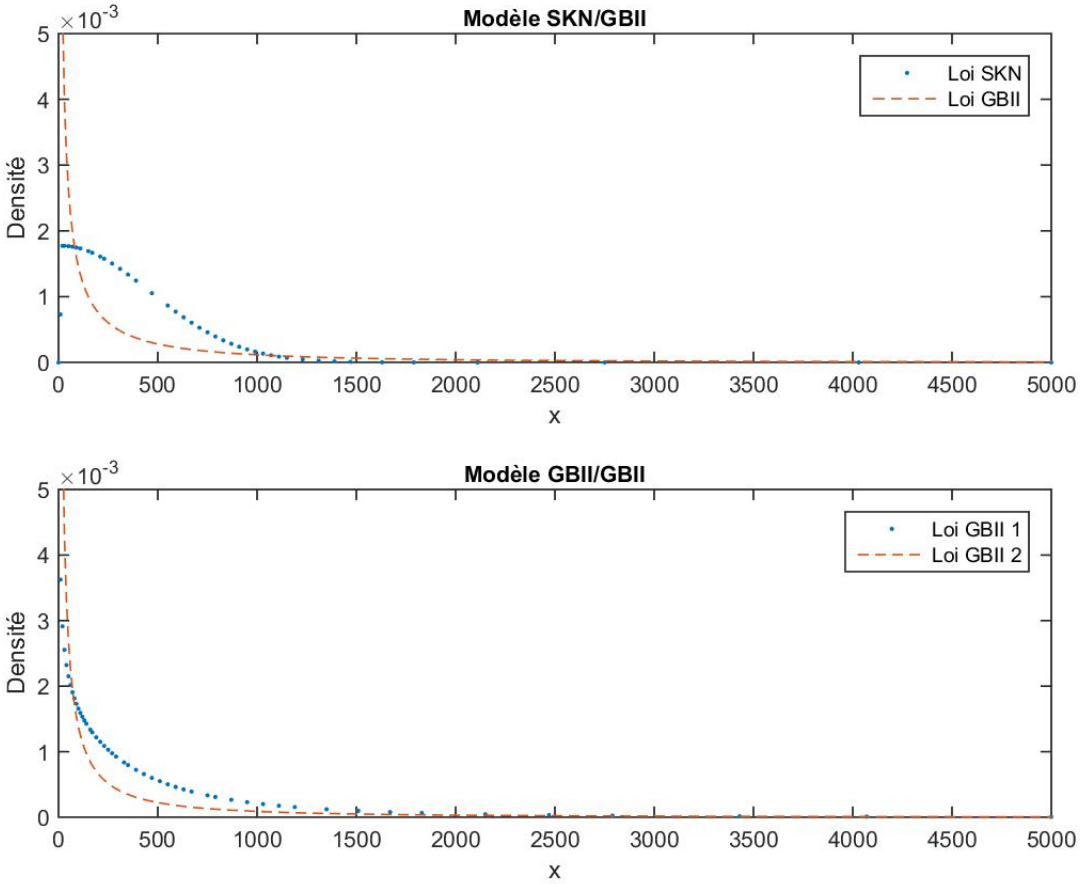

Figure 11: Les modèles

On peut voir clairement les configurations similaires des deux modèles ainsi que l'allure très similaire des densités 2 (GB2 et GB2 2). La différence majeure apparait dans la convexité vs concavité des régimes 1 des deux modèles ainsi que dans leur épaisseur de queue. Dans le cas de la loi Normale asymetrique, cette épaisseur de queue diminue beaucoup plus rapidement que dans la loi GB2 1.

Ces différences sont reflétées dans les régimes détectés pour chaque observation. Les figures 12 et 13 présentent le poids alloué au régime 2 pour chaque observation. On remarque que le régime 1 est présent dans la période entre ré-

cessions de Novembre 2001 à Juillet 2009. Le changement de régime est très clair pour le modèle GB2/GB2 (figure 12) alors que pour le modèle SKN/GB2 (figure 13), la densité Normale asymetrique, ne possédant pas de queue épaisse, peine à être présente. Une explication pourrait être que la présence d'un coefficient d'aplatissement important à tous les centiles (voir fig 4) diminue la capacité de la loi Normale asymetrique à épouser les données.

Les périodes de récession, en gris dans les figures 12 et 13, s'étendent d'Avril 2001 à Novembre 2001 et de Décembre 2007 à Juillet 2009. Pour le modèle GB2/GB2 la transition du régime 2 au régime 1 se produit au cours de la crise 2001 et la deuxième transition a lieu juste avant la crise de 2008. La table 7 donne les probabilités conditionnelles à l'état de l'économie (récession ou croissance) d'observer le régime 1 ou le régime 2.

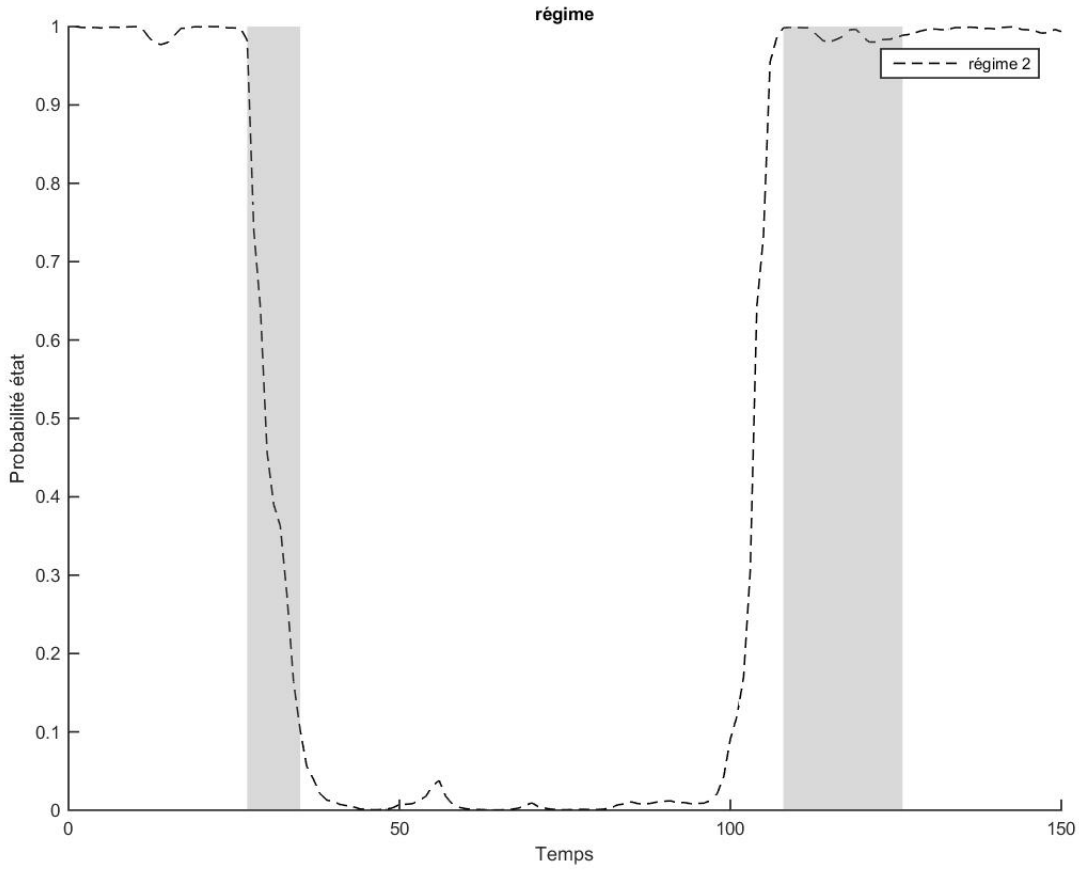

Figure 12: Régime 2, GB2|GB2

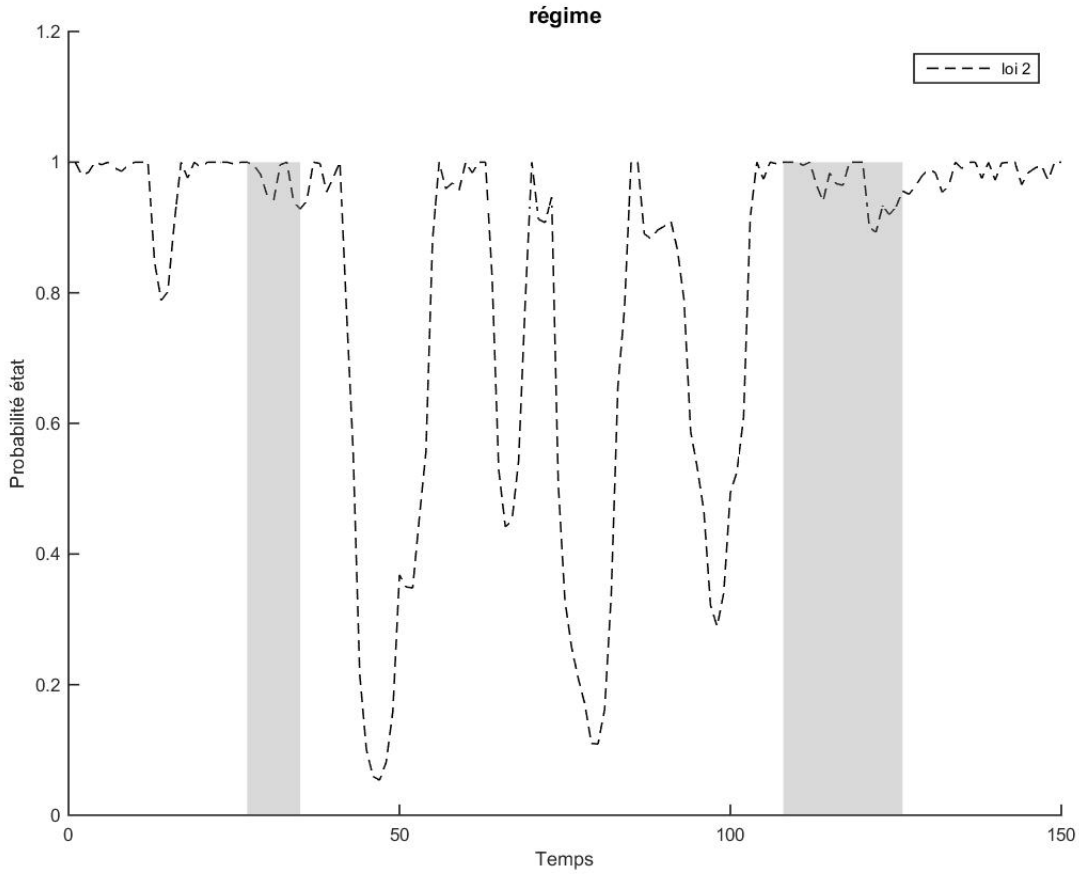

Figure 13: Régime 2, SKN|GB2

Comme le montrent les figures 12 et 13, la démarcation des régimes est plus nette dans le cas du modèle GB2/GB2. Ces résultats se retrouvent dans les probabilités conditionnelles des deux régimes tel que présentées dans le tableau 7. La loi GB2 1 est principalement utilisée dans les périodes de non-crise (55%) alors que la loi GB2 2 domine largement l'état de crise (85%). La distinction est moins claire dans le cas du modèle SKN/GB2 où la loi GB2 est majoritaire au travers des périodes. La loi Normale asymetrique apparait cependant dans les périodes de croissance 22% du temps contre 3% durant les récessions.

Loi/ Etat	Crise	Non-Crise	Taille
SKN	0.03	0.22	0.19
GBII	0.97	0.78	0.81
GBII 1	0.15	0.55	0.48
GBII 2	0.85	0.44	0.52

Table 7: Probabilité conditionnelle

Afin de différencier la validité d'un modèle par rapport à l'autre nous utilisons la méthode des pseudo-résidus tel que présenté dans la section 4.2. Le tableau 6 présente les résultats des trois tests de normalités effectués sur les pseudo-résidus obtenus pour les deux modèles GB2/GB2 et SKN/GB2 ainsi que leurs P-values associées.

Les tests ne nous permettent pas de rejeter la distribution normale des pseudo-résidus et par conséquent valident les deux modèles. Cependant des P-values généralement plus élevées pour le modèle formé des densités GB2/GB2, indiquent une confiance plus élevée quant à la normalité des pseudo-résidus. Les QQ plots des figures 14 et 15 nous confirment la supériorité du modèle GB2/GB2 sur le modèle SKN/GB2.

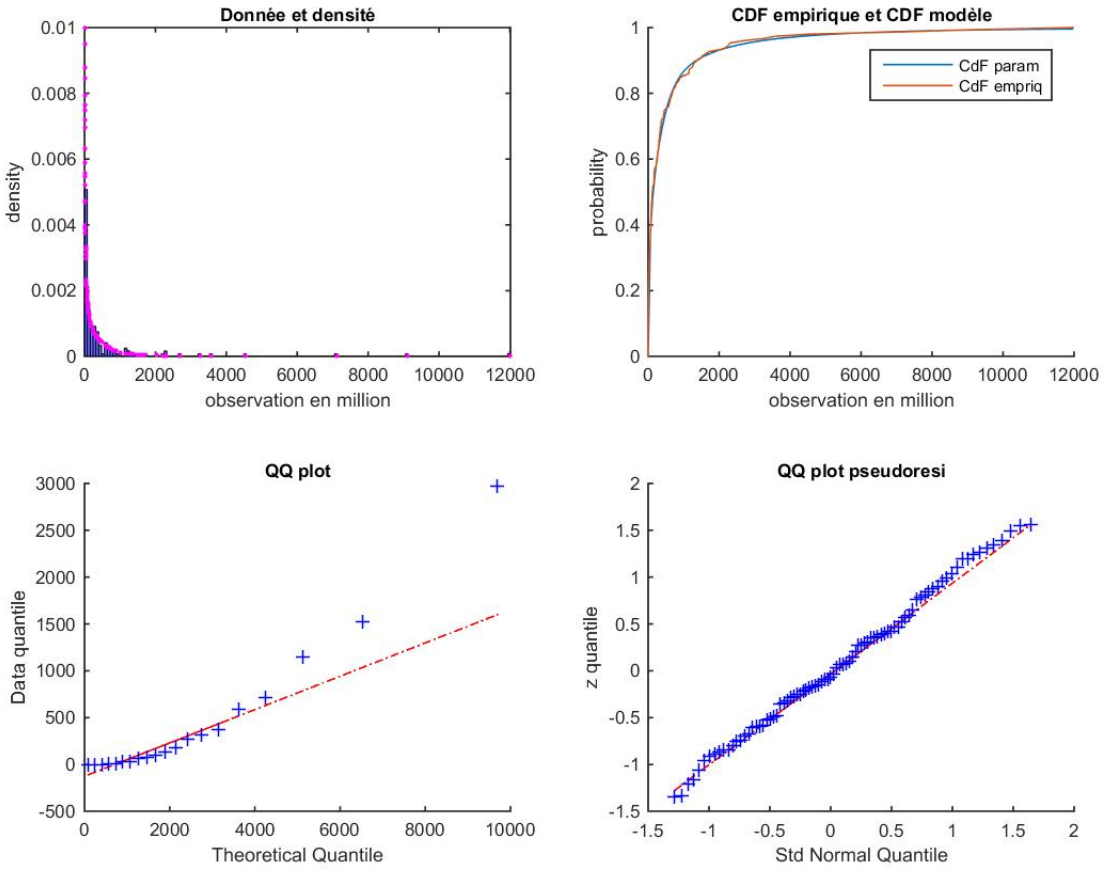

Figure 14: Somme des pertes mensuelles, SKN|GB2

Le QQ plot des quantiles correspondant modèle/données (sous-figure 3 'QQ plot' de la figure 14) atteste de la difficulté du modèle SKN/GB2 à décrire les quantiles les plus élevés. Ainsi, bien que le QQ plot des pseudo-résidus confirme la normalité des pseudo-résidus annoncée dans le tableau 6, le modèle SKN/GB2 semble moins bien caractériser les données que le modèle GB2/GB2. La figure 15 présente les QQ plot du modèle GB2/GB2.

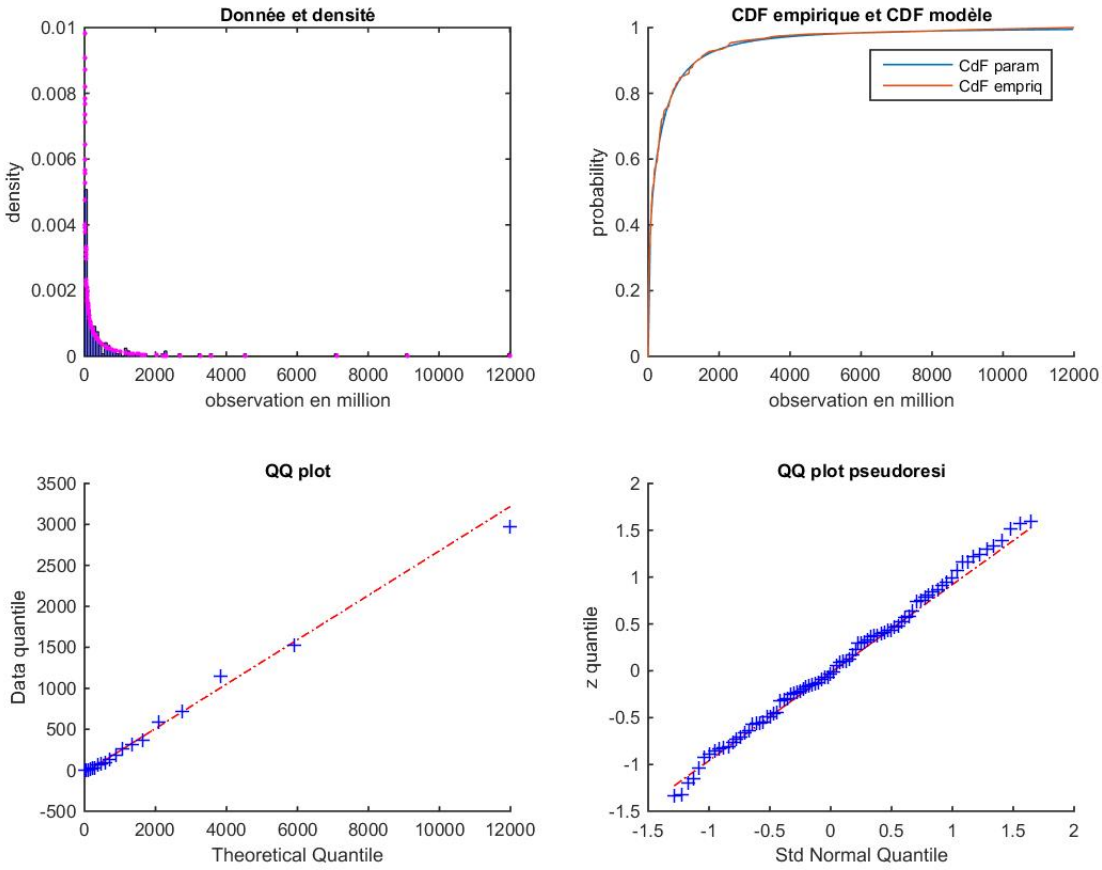

Figure 15: Somme des pertes mensuelles 1, GB2|GB2

La sous-figure 3 de la figure 15 'QQ plot' présente la relation entre les quantiles des données et les quantiles théoriques du mélange de densité trouvés et possède une tendance linéaire nette. Comme vu précédemment cette tendance est un signe positif de la capacité du modèle GB2/GB2 à épouser correctement les données. La CDF empirique et la CDF du modèle se superposent mieux que celles du modèle SKN/GB2 et le QQ plot des pseudo-résidus confirme que ceux-ci sont normaux. Les P-values des tests de normalité effectués sur les pseudo-résidus du modèle GB2/GB2 sont également plus élevées que celles obtenues sur le modèle SKN/GB2.

Toutes ces indications nous conduisent à valider la supériorité du modèle GB2 /GB2 sur le modèle SKN/GB2. La mixture de densités GB2/GB2 parametrée sur la série SOMME et présentée dans la sous-figure 1 de la figure 17, a pour équation:

$$mix_{GB2/GB2} = 0.48*GB2(1.5, 777,046, 1.11)+0.52*GB2(0.24, 6.0e(09), 2.26, 169) \quad (32)$$

Les figures 16 et 17 montrent les fonctions de densité obtenues par les deux modèles ainsi que la distribution des poids par observation de la première à la dernière itération. Les modèles sont sensibles aux paramètres initiaux et les résultats finaux peuvent n'être que le reflet du choix des premiers. Les sous-figures 3 et 4 des figures 16 et 17 permettent ainsi d'apprécier l'évolution de l'algorithme qui converge vers des résultats similaires de points de départ différents.

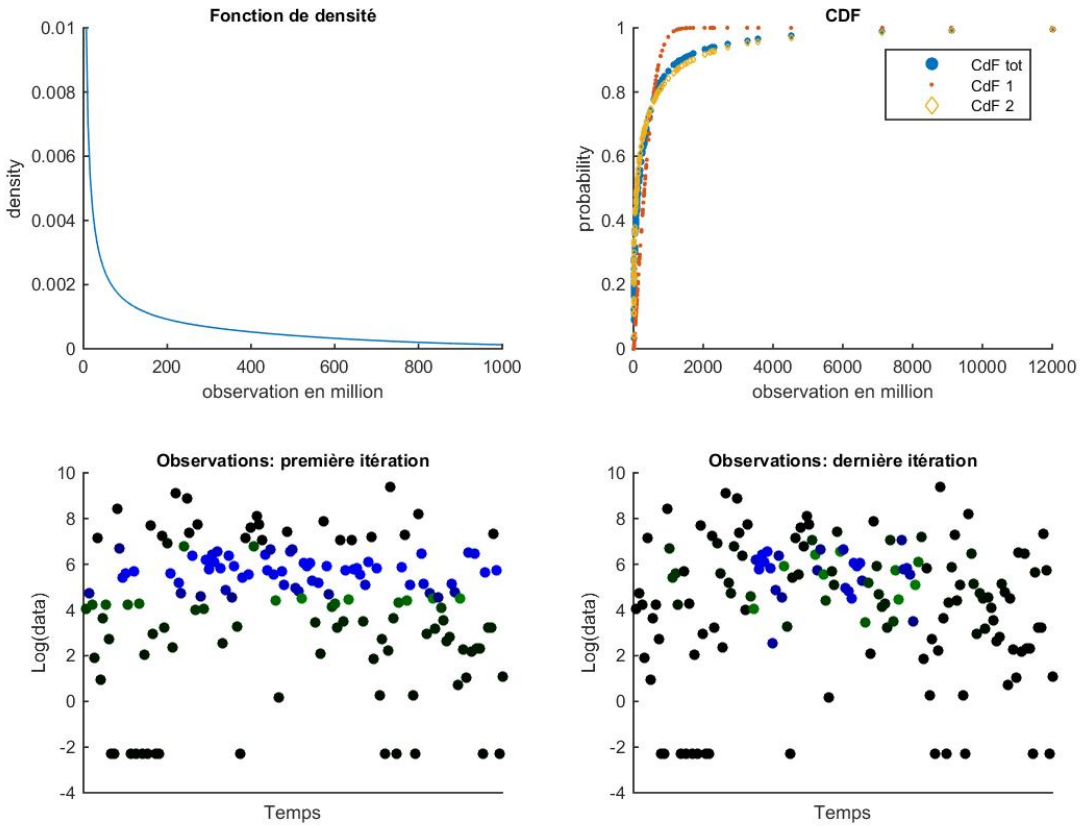

Figure 16: Somme des pertes mensuelles 2, SKN|GB2

De la sous-figures 3 de la figure 16, on peut voir qu'initialement les observations décrites par la loi Normale asymetrique(observation en bleues) sont groupées autour de la valeur de $log(data) = 6$ et sont réparties équitablement à travers l'échantillon. La loi GB2 décrit les observations aux franges (observation en noire). La sous-figure 4 nous permet d'apprécier le resserrement de la loi Normale asymetrique autour des observations entre la période de Juin 2001 à Décembre 2007.

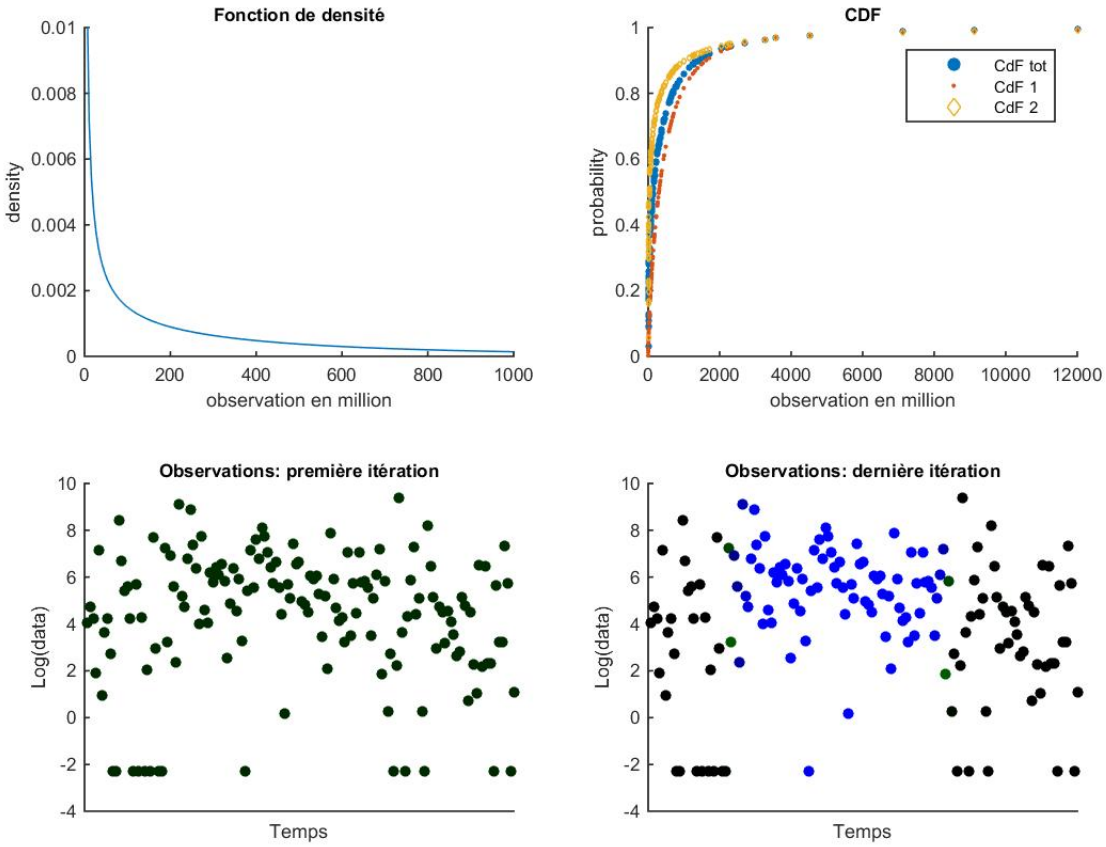

Figure 17: Somme des pertes mensuelles 2, GB2|GB2

La figure 17 présente les mêmes résultats que la figure 16 mais pour le modèle GB2/GB2. On peut observer que le point de départ du modèle GB2/GB2 est différent de celui du modèle SKN/GB2. La sous-figure 3 de la figure 17 montre que les observations sont disputées entre les deux lois de façon égale comme la couleur uniforme l'indique. Cependant la situation finale ressemble à celle obtenue dans le modèle SKN/GB2 avec une loi GB2 1 utilisée afin de décrire les observations entre Juin 2001 et Juillet 2007. Cette observation relativise l'influence des paramètres de départ sur les résultats obtenus.

Le modèle GB2/GB2 donne les meilleurs résultats et divise les observations en deux régimes: un régime central suivant une densité $o \sim GB2(1.5, 777, 046, 1.11)$ et comprenant 76 observations et un régime extrême suivant une densité $o \sim GB2(0.24, 6.0e(09), 2.26, 169)$, comprenant 74 observations. En s'intéressant aux

deux ensembles d'observations séparément, il apparait que le régime 2 est le plus extrême. Ce dernier décrit les observations basses, 50 sont inférieures à 100 millions, mais compte quelques pertes très importantes. Globalement, la moyenne des pertes décrites par le régime 2 extrême est de 459 millions pour un écart-type de 1536 millions et une médiane à 38 millions. Les données correspondantes au régime 2 détectés ont également des moments centrés empiriques 3 et 4 très élevés. Le coefficient aplatissement de la série est de 42.8 alors que son coefficient d'asymétrie est de 5.9 contre une mesure de 3 pour une loi Normale.

Le régime 1 présente une moyenne plus élevée de 750 millions, un écart-type plus faible de 1416 millions et une médiane de 322 millions. Les moments centrés 3 et 4 du régimes sont plus faible que ceux du régime 2 'extrême', avec un coefficient d'aplatissement de 22.2 et un coefficient d'asymétrie de 4.19. Les données du régime 2 semblent donc montrer une plus forte volatilité et une queue nettement plus épaisse. Cependant cette volatilité est principalement due à la perte extrême d'AIG durant la dernière crise financière. Une fois cette observation enlevée, l'écart-type diminue nettement à 746 million.

Les évènements du 11 Septembre 2001 forment le deuxième outlier et comme vu précédemment ont des conséquences qui se répercutent jusqu'en 2006. La plupart des pertes du 11 Septembre ont cependant été enregistré au moment de l'attaque elle-même. Septembre 2001 se situe en période de transition entre les régimes 1 et 2, avec une probabilité d'appartenir au régime 1 de 60%. Il est donc intéressant de vérifier l'influence de ses quelques pertes extrêmes sur les résultats obtenus.

Données sans pertes extrêmes: Comme vu précédemment, la perte d'AIG explique la plus grande partie de la variance des données appartenant à la loi 2. Les évènements du 11 Septembre se situent également à la période de transition entre les deux régimes.

Il est intéressant de voir l'influence que ces deux évènements exercent sur loi 2 et si une fois ces observations retirées, les régimes détectés restent semblables. Les nouvelles observations pour Septembre 2001 et Février 2008 sont respectivement 720 millions au lieu de 9 milliards et 170 millions au lieu de 12 milliards. Les nouvelles observations se situent donc un peu en dessous de la moyenne de 422 millions et au-dessus de la médiane de 120 millions.

Plusieurs pertes ayant pour origines les attentats de New-York ont été enregistré plus tardivement suite aux décisions juridiques différées. En plus de l'observation du 11 Septembre 2001, 8 observations entre Janvier 2002 et Décembre 2006 sont affectées. Globalement les 8 nouvelles observations sont significativement diminuées. Il est intéressant de tester si l'influence du régime 2 determiné précédement est toujours aussi nette losrque les conséquences de cet évènement exceptionnel sont mises de côté.

Dans cette section le modèle GB2/GB2 est utilisé sur les sommes des pertes mensuelles desquelles ont été retirées AIG et le 11 Septembre (SOMME SEE). Le tableau 8 donne les paramètres initiaux et finaux des densités GB2 testées:

	Modèle 3			
	GBII 1		GBII 2	
Paramètres initiaux	A	50	A	80
	B	10	B	90
	P	0.09	P	0.003
	Q	0.01	Q	0.09
Paramètres finaux	A	1.82	A	0.34
	B	792	B	9.46e(07)
	P	0.38	P	1.22
	Q	1.14	Q	170
	Probabilité de transition modèle 1			
	à régime 1		à régime2	
De régime 1	0.98		0.2	
De régime 2	0.02		0.98	
	Test de Normalité sur pseudo-résidus			
	1 if H1 true 5%		P value	
T-Test	0		0.55	
Chi-Square	0		0.83	
Shapiro-Wilk	0		0.39	
	Critères			
	AIC		BIC	
	861		894	

Table 8: Somme pertes mensuelles, SEE

Les paramètres finaux présentés dans le tableau 8 montrent que le modèle GB2 donne des résultats similaires pour les données complètes ou sans événements extrêmes. Les seules différences notables concernent les lois des régimes 2. On constate un déplacement du mode vers la gauche pour la loi GB2 2 du modèle de la série sans évènements extrêmes ainsi qu'une queue moins épaisse. Ces conclusions sont logiques si l'on considère que parmi les observations retirées figurent les deux pertes les plus importantes qui étaient auparavant décrites par le régime 2. Ces différences ne sont cependant pas significatives pour la détection de régimes. Les allures des densités GB2 estimées pour les données complètes et pour les données sans événements extrêmes sont similaires comme on peut le voir dans la figure 18.

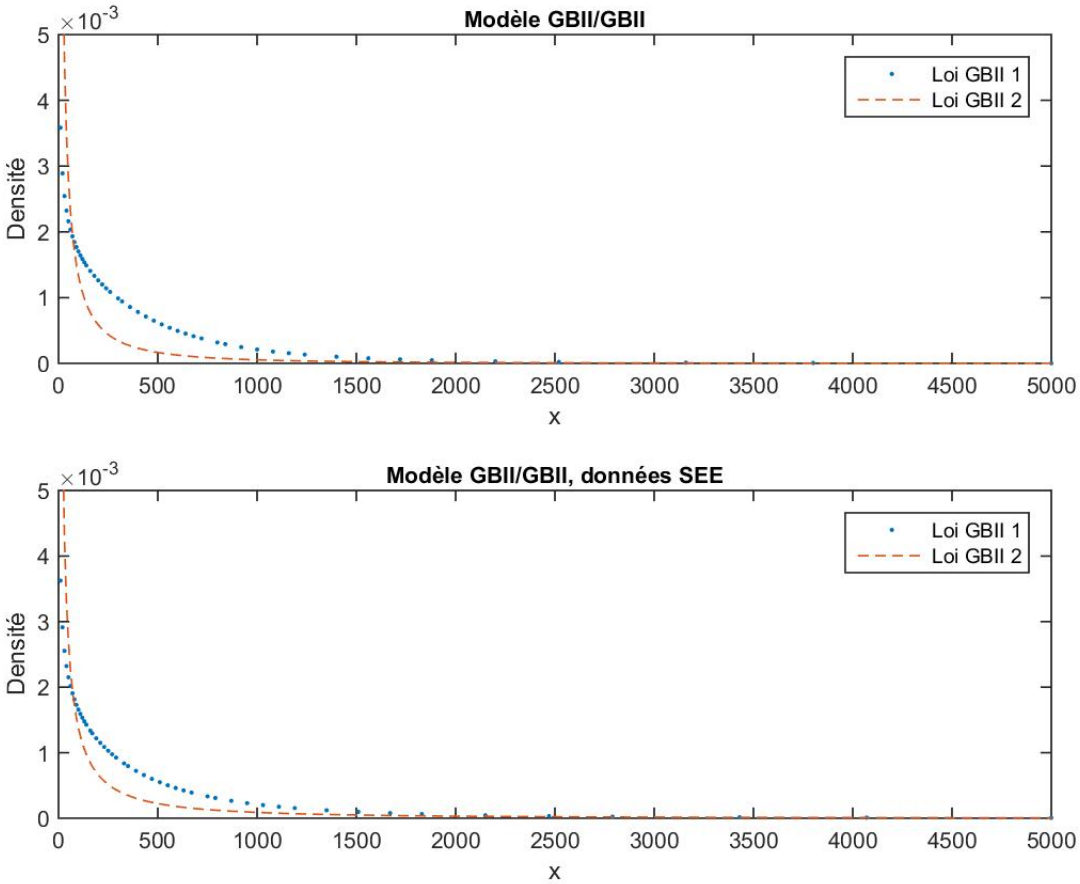

Figure 18: Modèle GB2/GB2, Données SOMME/SEE

La figure 19 montre les observations pour lesquelles le régime 2 est détecté par le modèle pour la série SEE.

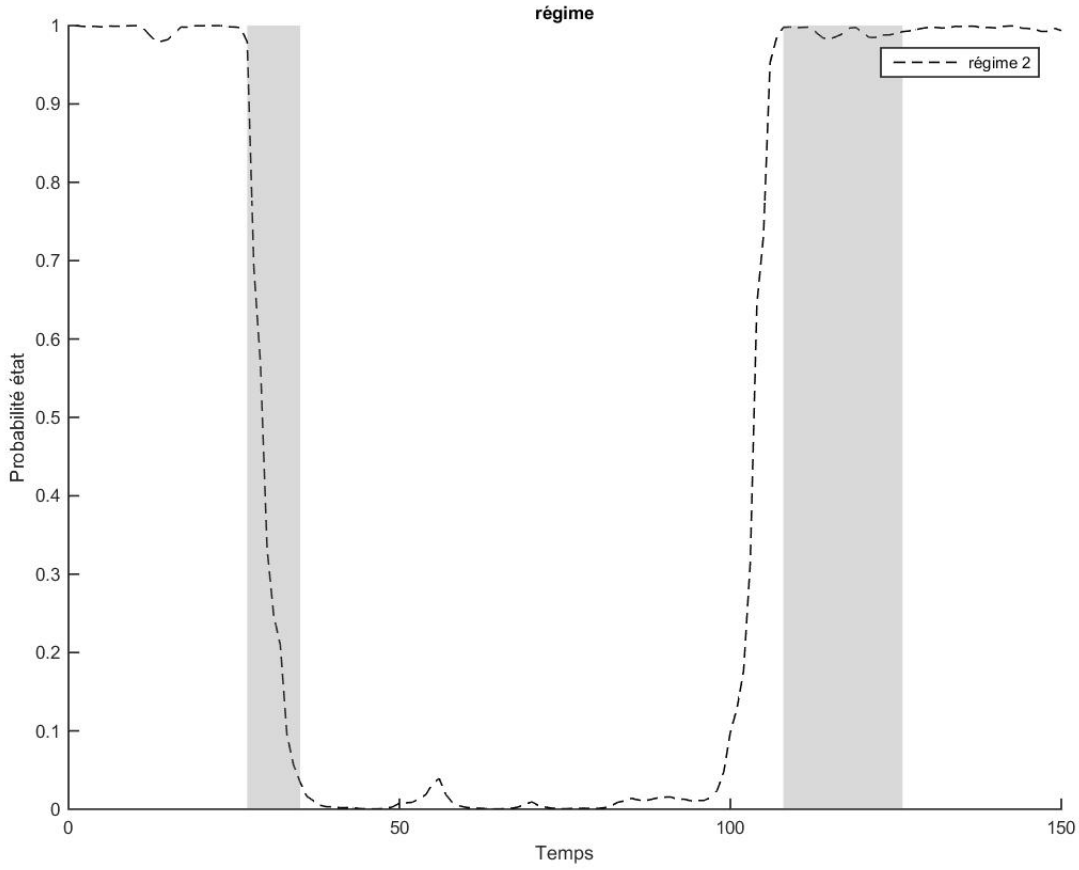

Figure 19: Somme des pertes mensuelle SEE, GB2|GB2

Il y a de légères différences qui apparaissent avec les résultats obtenus sur les données brutes. La plus notable est le décalage du 1er changement de régime (régime 2 au régime 1) qui commence à la même date d'Avril 2001 mais qui est plus rapide dans le cas de la série SEE, car dès Juin 2001, la probabilité que l'observation appartienne au régime 1 est déjà de 82% alors que lorsque les évènements du 11 Septembre sont inclus, ce niveau arrive en Novembre 2001.

Le décalage semble bien avoir lieu à cause du retrait des évènements du 11 Septembre qui semblaient être un point 'd'ancrage' de la loi 2 de par sa magnitude. Dès lors que cette observation est réduite, la transition est beaucoup plus

rapide. Par conséquent la loi 1 a une taille légèrement plus importante et la probabilité d'être en régime 1 sachant que l'on est en période de crise est un peu plus élevée à 18% contre 15% précédemment. Outre ce changement, les probabilités conditionnelles d'observer le régime 1 ou 2 connaissant l'état de l'économie (récession ou non) sont similaires aux résultats obtenus précédemment: le régime 2 est largement plus probable en période de crise (82%) alors que globalement le régime 1 domine les périodes de croissance (56%).

Loi/ Etat	Crise	Non-Crise	Taille
GBII 1	0.18	0.56	0.49
GBII 2	0.82	0.44	0.51

Table 9: Somme pertes mensuelles, SEE

Les tests statistiques effectués sur les pseudo-résidus obtenus après l'utilisation du modèle GB2/GB2 sur la série somme SEE donnent des résultats de fit satisfaisants avec des P-values généralement élevées (T-test 0.55, Chi-square 0.83 Shapiro-Wilk test 0.39). La figure 20 confirme le bon ajustement du modèle aux données. Les CDFs empirique et paramétrique se superposent correctement et la sous-figure 3 présente le QQ plot des données et du modèle montre une claire tendance linéaire à tous les quantiles, ce qui est une bonne indication sur la validité du modèle.

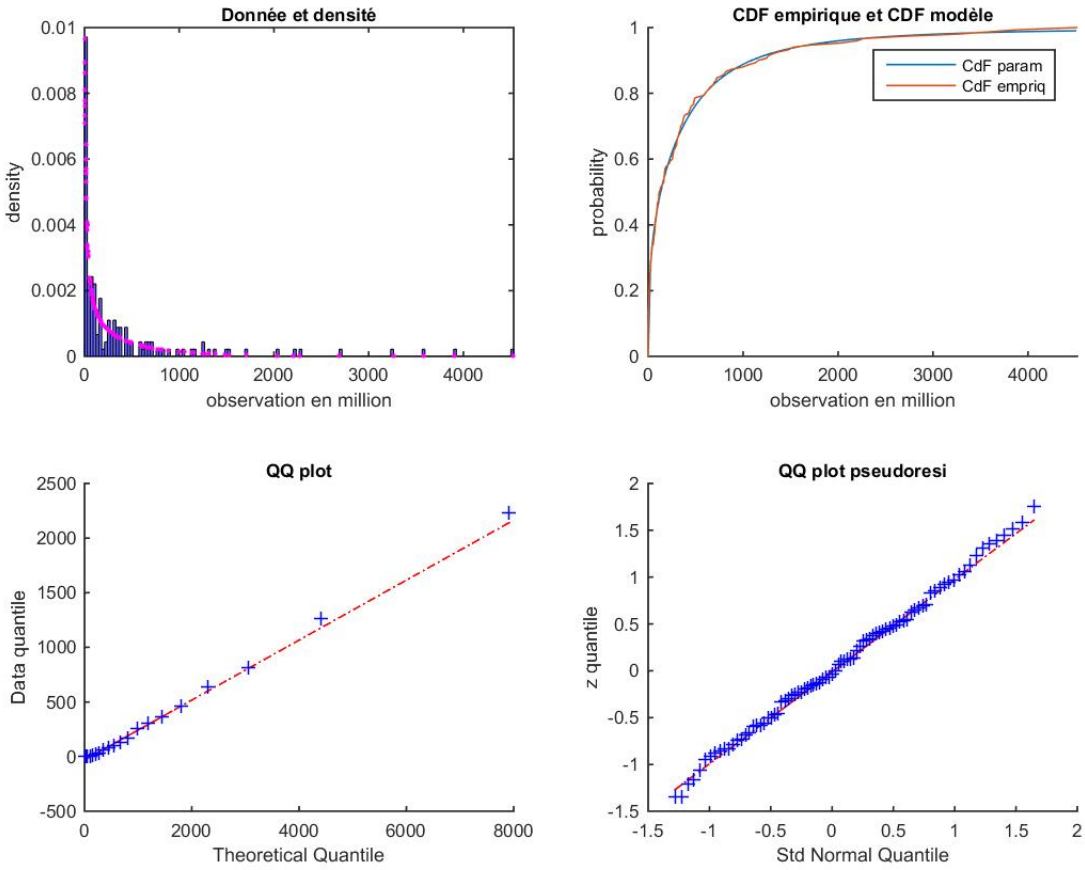

Figure 20: Somme des pertes mensuelle SEE, GB2|GB2

Enfin la figure 21 montre que le point initial de l'algorithme est encore une fois différent des précédents et converge malgré tout vers un résultat similaire. La sous-figure 3 montre des paramètres initiaux différents de ceux testés sur les séries précédentes. On peut voir que cette fois si, la loi GB2 1 couvre les observations les plus hautes, alors que les observations entre $2 < log(data) < 4$ sont partagées entre les deux lois et que les observations $log(data) < 2$ sont décrites par la loi GB2 2.

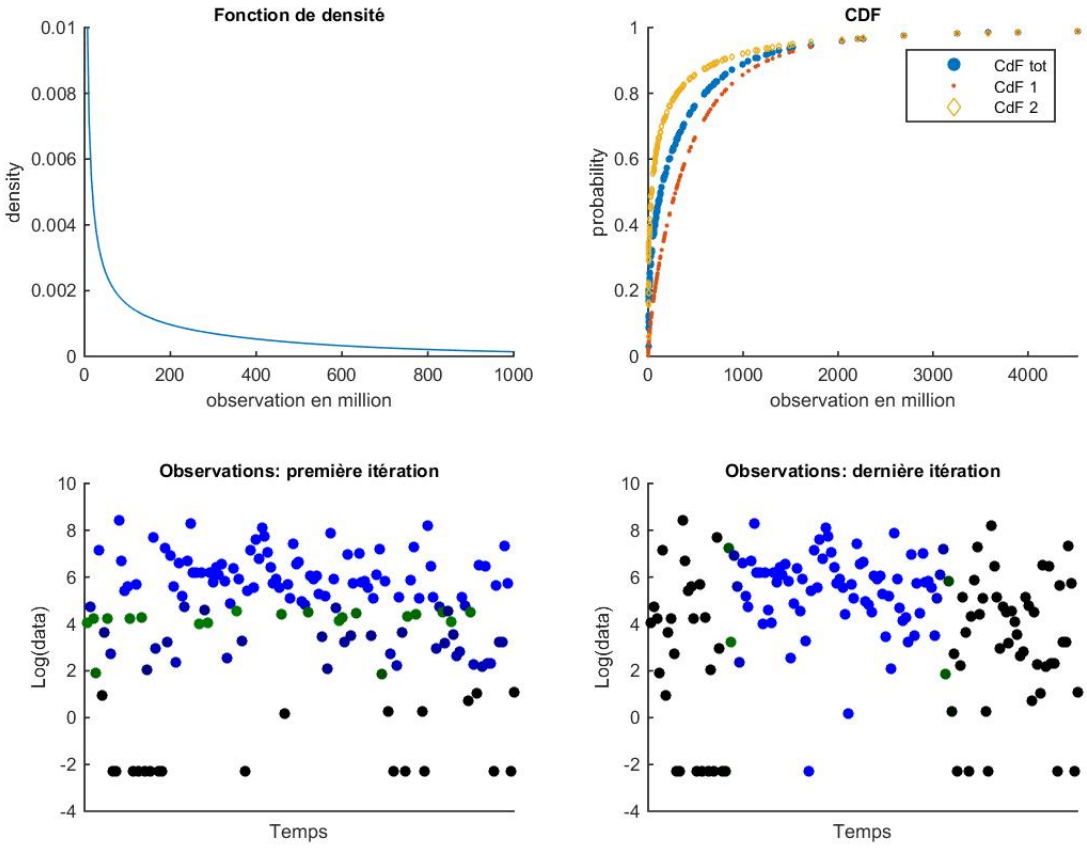

Figure 21: Somme des pertes mensuelle SEE, GB2|GB2

On peut voir que les résultats finaux du modèle GB2/GB2 sur la série de données 'Somme sans pertes extrêmes' sont très similaires avec ceux obtenus par le modèle GB2/GB2 utilisé sur la série 'Somme'. Comme vu plus haut, la différence la plus notable est une transition du régime 2 au régime 1 plus rapide du fait de la diminution de la perte liée aux attentats du 11 Septembre. Ainsi nous pouvons conclure que les régimes détectés sont robustes aux retraits des évènements extrêmes malgré l'influence que ceux-ci ont sur la variance des données du régime 2 détectée précédemment.

5.2.2 Moyennes des pertes mensuelles:

Dans cette section la série utilisée est celle des pertes moyennes mensuelles. Comme indiqué précédemment, cette série permet de se mettre à l'échelle d'une compagnie d'assurance vis-à-vis de la sévérité possible des pertes. Les deux mélanges de densité GB2/GB2 et SKN/GB2 ont été testé sur cette série afin de mettre en évidence de possible régimes et d'analyser si ceux-ci correspondent aux régimes trouvés pour la série SOMME.

	Model 1				Model 2			
	SKN		GBII		GBII 1		GBII 2	
Paramètres initiaux	Mode	50	A	5	A	2	A	10
	Sigma	110	B	50	B	10	B	1
	Eps	0	P	0.1	P	0.05	P	0.09
			Q	0.9	Q	0.05	Q	0.01
Paramètres finaux	Mode	0.1	A	0.34	A	29.21	A	0.27
	Sigma	72.7	B	2.6e(07)	B	134	B	2.0e(08)
	Eps	-0.99	P	1.75	P	0.023	P	2.34
			Q	170	Q	0.056	Q	169
	Probabilité de transition modèle 1				Probabilité de transition modèle 2			
	à régime 1		à régime2		à régime 1		à régime2	
De régime 1	0.91		0.09		0.98		0.02	
De régime 2	0.04		0.96		0.02		0.98	
	Test de Normalité sur pseudo-résidus				Test de Normalité sur pseudo-résidus			
	1 if H1 true 5%		P value		1 if H1 true 5%		P value	
T-Test	0		0.69		0		0.58	
Chi-Square	0		0.90		0		0.71	
Shapiro-Wilk	0		0.41		0		0.30	
	Critères				Critères			
	AIC		BIC		AIC		BIC	
	719		749		717		750	

Table 10: Paramètres des modèles, donnée Pertes Moyennes

Le tableau 10 présente les paramètres initiaux et finaux des deux mixtures donnant les meilleurs résultats d'ajustements aux données de la série MOYENNE.

Le modèle SKN/GB2 paramétré sur la série MOYENNE présente des différences avec celui obtenu sur la série SOMME. Si les deux lois GB2 sont relativement semblables, les lois Normale asymetrique SOMME et Normale asymetrique MOYENNE diffèrent fortement. On constate que dans le cas du modèle paramétré sur la série MOYENNE, la loi Normale asymetrique a son mode beaucoup plus bas et un écart-type bien plus resserré que son homologue paramétrée sur la série SOMME. La figure 22 permet de visualiser les différences entre les deux lois Normales asymetriques obtenues.

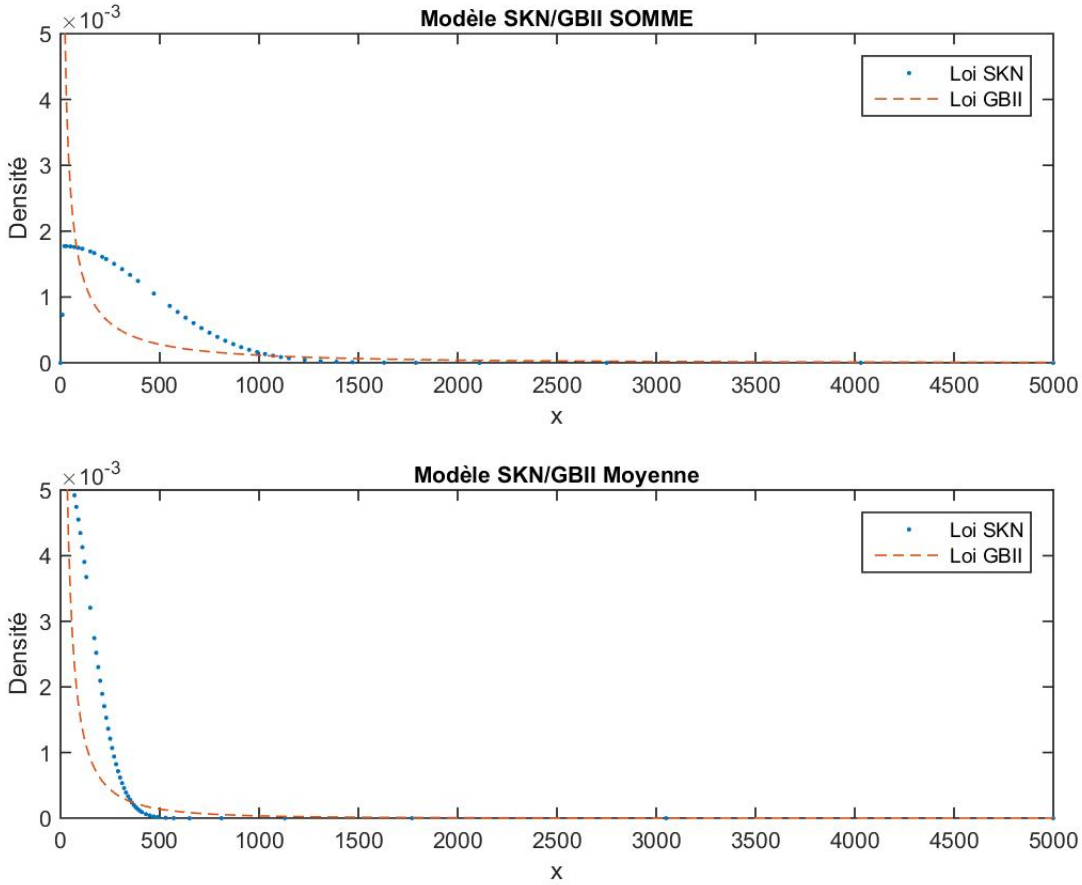

Figure 22: Densités serie SOMME vs série MOYENNE

Les formes des densités individuelles Normale asymetrique et GB2 paramétrées sur la série MOYENNE ressemblent plus à celles obtenues par le modèle GB2/GB2 de la figure 11. Le modèle NormaleAsymetrique/GB2 donne d'ailleurs de meilleurs résultats d'ajustement aux données de la série MOYENNE qu'aux données de la

série SOMME. Comme on peut le voir dans le tableau 10, tous les tests de normalité effectués sur les pseudo-résidus ne nous permettent pas de rejeter cette hypothèse et présentent des P-values systématiquement plus élevées que celles présentés dans le tableau 6 pour la série SOMME.

Le modèle GB2/GB2 continue cependant de donner de meilleurs résultats d'ajustements aux données de sévérité. En comparant les résultats obtenus pour les mixtes GB2/GB2 des tableaux 10 et 6, c'est à dire respectivement utilisés sur les séries MOYENNE et SOMME, il apparait que les deux mélanges présente globalement les même caractéristiques. Cependant quelques différences peuvent être notées. Ces différences sont principalement observées pour la première loi. Bien que les premières lois GB2 1 SOMME et GB2 1 MOYENNE des deux mixtures remplissent un rôle similaire, leurs positions sont différentes. Comme le montre les paramètres B contrôlant le mode des deux lois 1, la position de la loi 1 de la série MOYENNE est nettement plus basse que celle de son équivalente de la série SOMME (134 vs 777). Comme on peut s'y attendre, l'épaisseur de queue de la loi GB2 1 MOYENNE est bien moins épaisse que celle de la loi GB2 1 SOMME, ($A_{Somme} = 1.5$ vs $A_{Moyenne} = 29.21$).

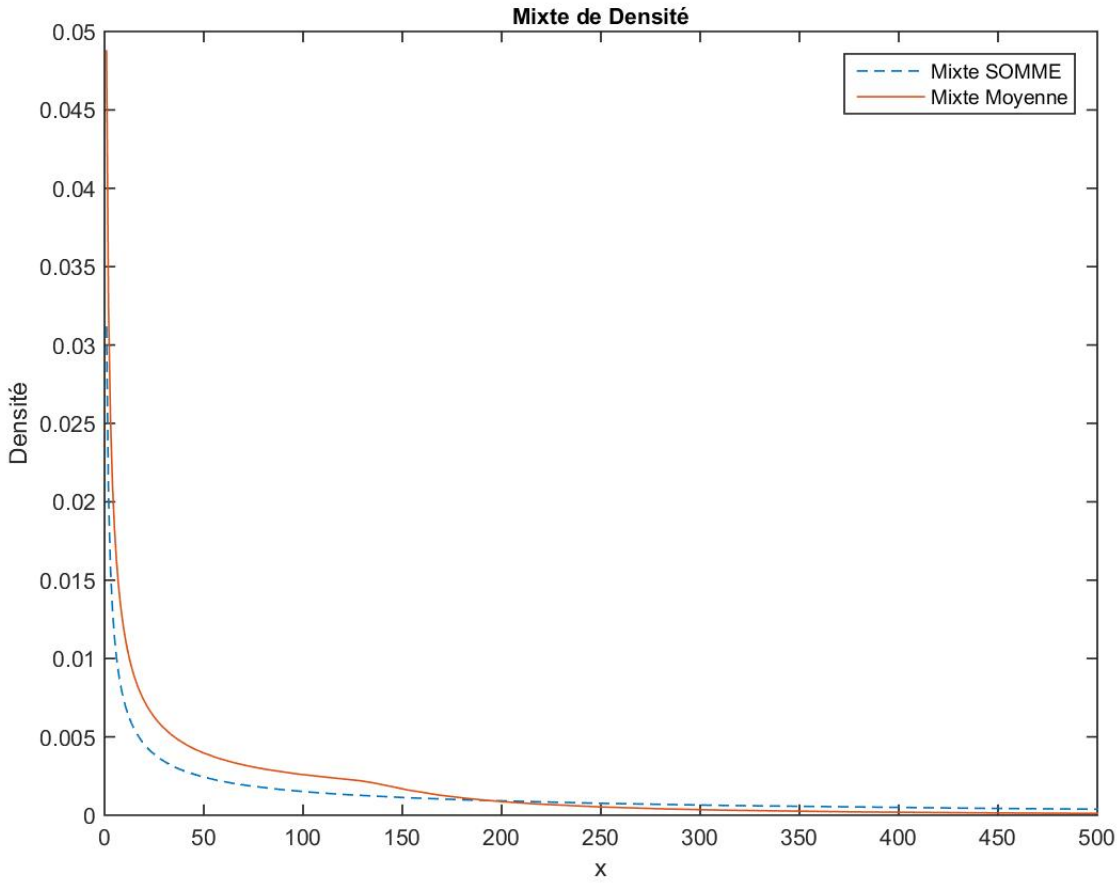

Figure 23: Comparaison des mixtures de densités GB2/GB2

On remarque que la queue de la mixture paramétrée pour la série SOMME est beaucoup plus épaisse que celle de la mixture paramétrée pour la série MOYENNE. Cela concorde avec l'aspect des histogrammes des données présentés dans la figure 3 où l'on pouvait constater que les données de la série MOYENNE étaient logiquement plus resserrées. L'aspect de chaque mixture obtenue épouse son histogramme respectif.

Il est intéressant de remarquer que malgré les modifications effectuées sur les données, le modèle GB2/GB2 détecte une configuration de régime similaire à celle obtenue pour la série SOMME[16] . Cela indique qu'au niveau de la compagnie

[16]Le modèle SKN/GB2 détecte une configuration semblable sur la série MOYENNE(cf annexe 4)

d'assurance 'moyenne', les mêmes régimes sont retrouvés et doivent donc être pris en compte lors du calcul des modèles de couverture contre le risque opérationnel. La figure 24 montre les régimes 2 détectés par la mixture GB2/GB2 sur la série MOYENNE :

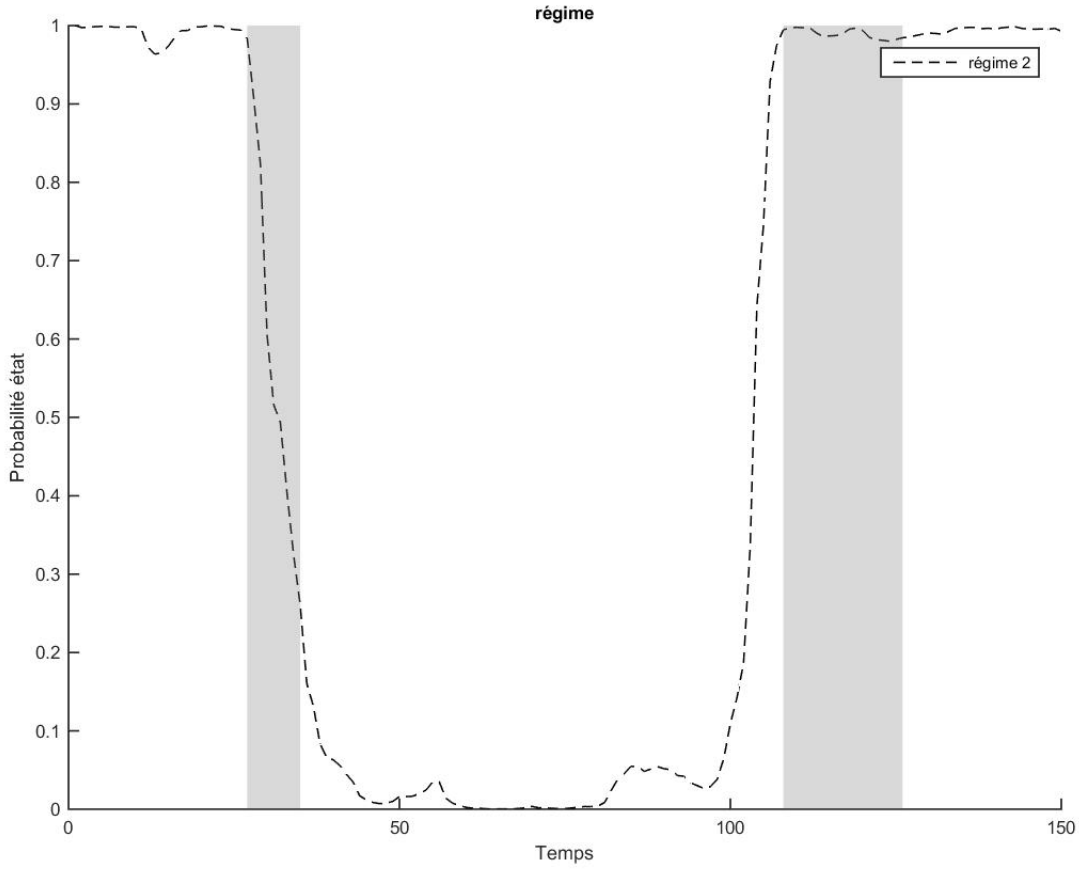

Figure 24: Evolution des régimes Perte moyenne, GB2|GB2

Une analyse détaillée de l'évolution des probabilités *gamma* des figures 12 et 24 révèle que la transition vers le régime 1 est plus tardive de deux périodes dans le cas de la série MOYENNE. La transition a lieu en Septembre 2001 contre une transition en Juin 2001 pour la série SOMME. La deuxième transition (régime 1 à 2) est similaire pour les deux séries et commence en Juillet 2007 pour se terminer en Octobre 2007.

Les probabilités conditionnelles d'observer les régimes en fonction de la situation économique simultanée sont similaires avec celles obtenues pour la série SOMME. Le tableau 11 donne ces probabilités conditionnelles à l'état de l'économie, crise ou non-crise, d'observer le régime 1 ou le régime 2 lorsque le modèle GB2/GB2 est utilisé sur la série MOYENNE.

Loi/ Etat	Crise	Non-Crise	Taille
SKN	0.02	0.34	0.19
GBII	0.98	0.66	0.81
GBII 1	0.12	0.54	0.46
GBII 2	0.88	0.46	0.54

Table 11: Probabilités condtionnelles, Série MOYENNE

Le modèle GB2/GB2 différencie le plus les deux états avec un régime 2 décrivant très largement les périodes de crises alors que le régime 1 est le régime majoritaire dans les périodes de non-récession.

Les figures 25 et 26 confirment encore la supériorité du modèle GB2/GB2 afin de décrire la série MOYENNE. Comme vu précédemment, les tests effectués sur les pseudo-résidus générés par la mixture GB2/GB2 ainsi que par la mixture SKN/GB2 ne permettent pas de rejeter l'hypothèse de leurs normalités.

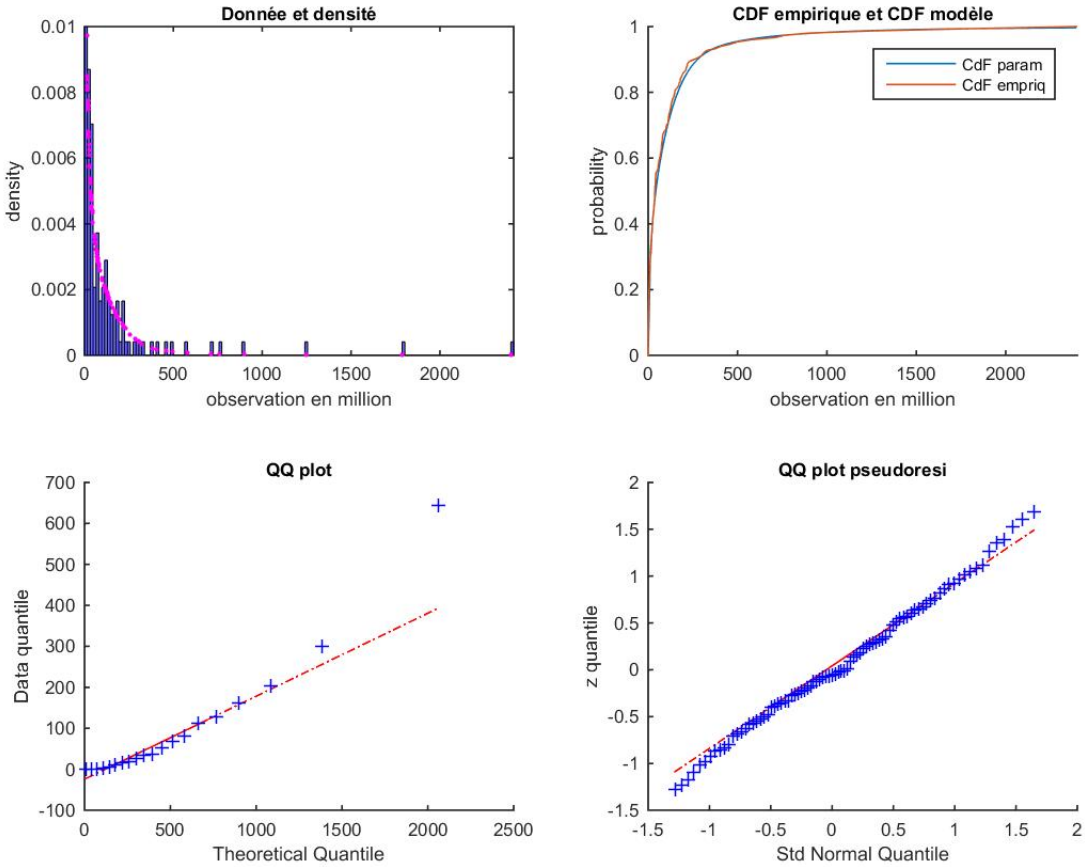

Figure 25: Résultats SKN/GB2, série MOYENNE 1

La sous-figure 3 présente le QQ plot des données et du modèle SKN/GB2. Si l'on compare ce graphique avec celui présenté dans la figure 12, il semble que le modèle SKN/GB2 donne de meilleurs résultats lorsqu'utilisés sur la série SOMME tout en en ayant quelques difficultés à décrire les quantiles élevés.

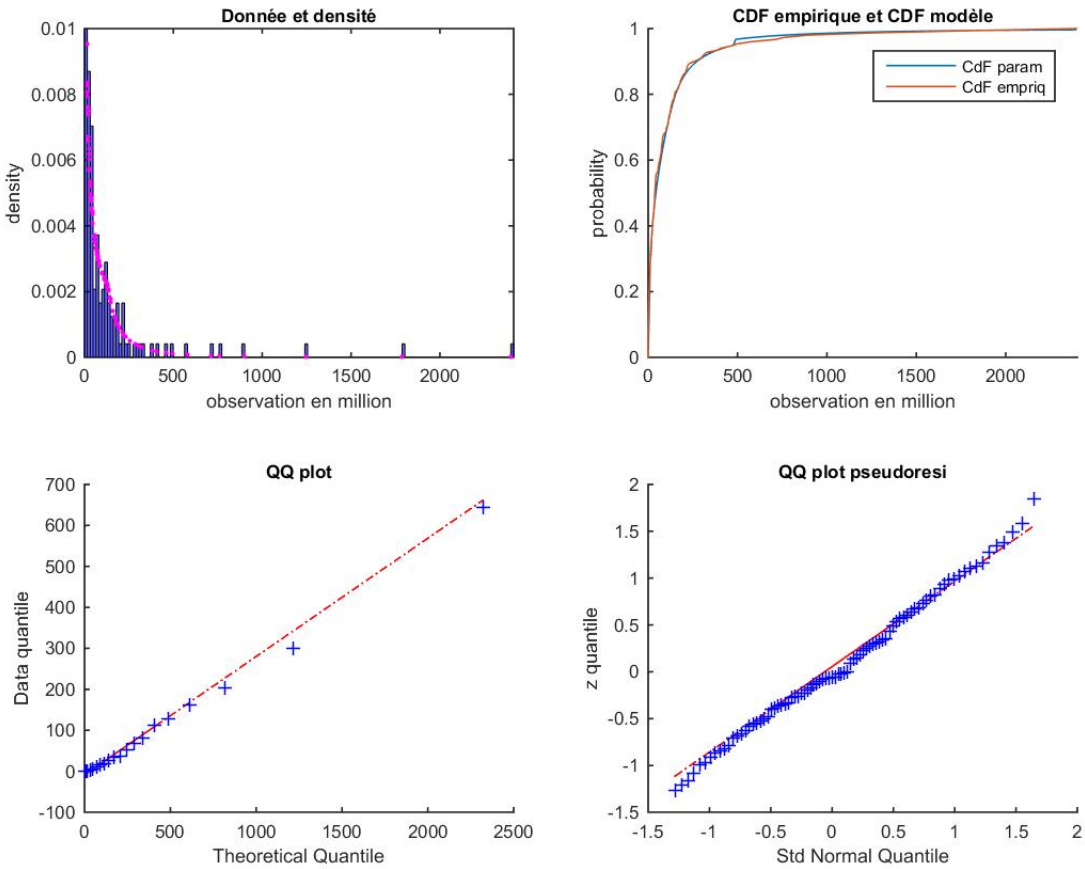

Figure 26: Résultats GB2/GB2, Série MOYENNE

La sous-figure 3 de la figure 26 donne en revanche une indication que le modèle GB2/GB2 est plus précis que le modèle SKN/GB2 pour décrire la série MOYENNE. En effet en comparant les deux QQ plots, il apparait clairement que la tendance linéaire est plus prononcée pour celui du modèle GB2/GB2, ce qui nous conduit à conclure que ce modèle est une nouvelle fois plus adéquat pour décrire les pertes opérationnelles.

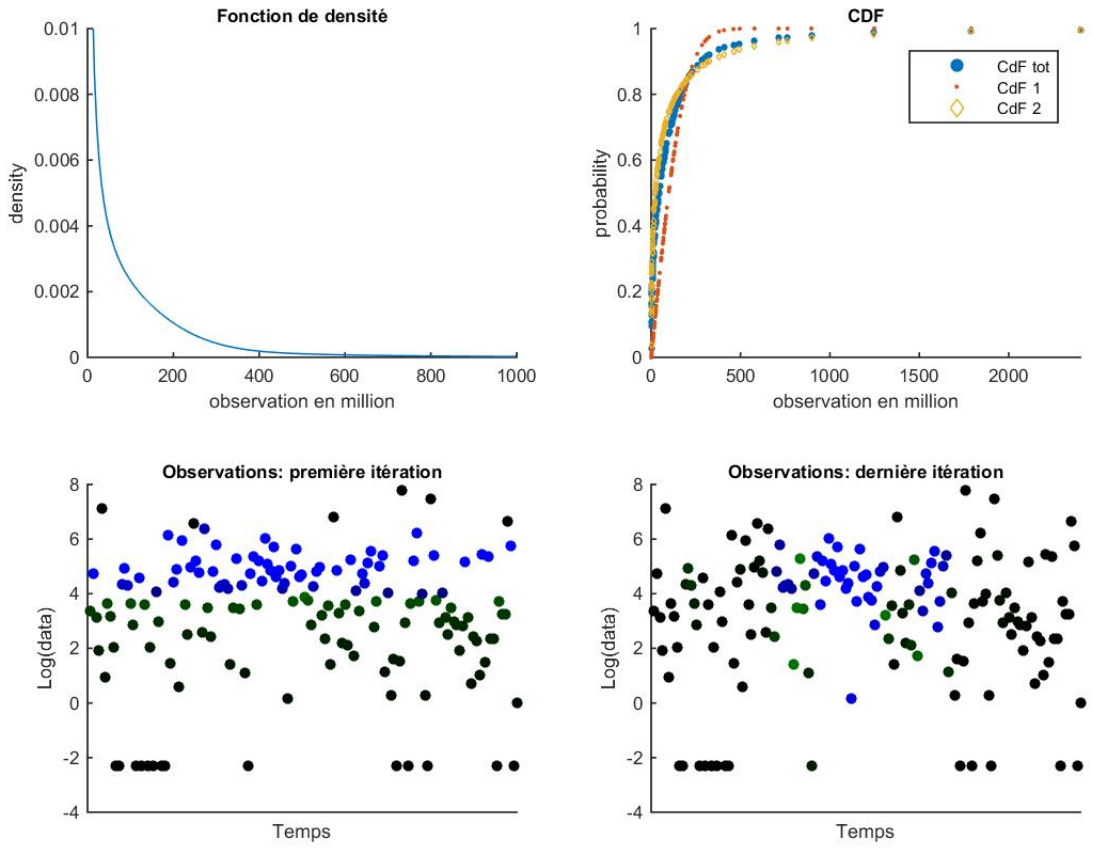

Figure 27: Résultats SKN/GB2, série MOYENNE 2

Les deux dernières sous-figures intitulées 'Observations: première itération' et 'Observations: dernière itération' de la figure 27 montre l'évolution des poids γ de chaque observation et par conséquent leur probabilité d'appartenir à un régime où l'autre. La 3ème sous-figure montre le point départ de l'algorithme et montre bien que les paramètres de départ de l'algorithme divisent les observations en deux par rapport à leurs valeurs, c'est à dire que la loi 1 explique le régime haut alors que la loi 2 explique les pertes basses.

La 4ème sous-figure montre le point de convergence qui, comme le montre la sous-figure 4, est similaire aux points de convergence atteints précédement. Il est intéressant de noter que les paramètres initiaux des modèles sont tous différents mais que le modèle converge néanmoins vers les mêmes paramètres finaux, ce qui est un signe encourageant de robustesse.

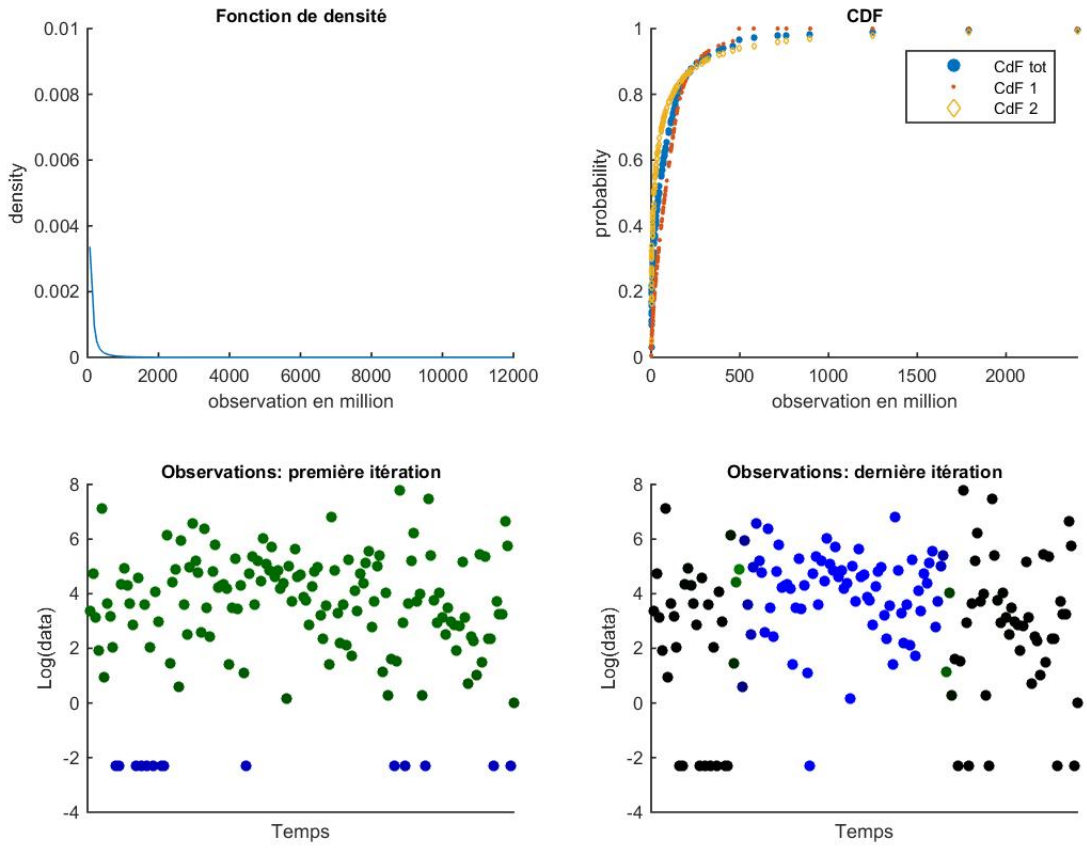

Figure 28: Résultats GB2/GB2, série MOYENNE 2

La figure 28 présente les même informations que la figure 27 mais pour le modèle GB2/GB2. Le résultat est encore plus frappant alors que la sous-figure 3 montre des paramètres initiaux fort éloignés des paramètres finaux. Dans la configuration initiale, les deux lois sont explique presque tous les points de la même façon avec un poid légèrement plus important pour le régime 2 pour toutes les observations différentes de 0.1 alors que symétriquement le régime deux explique légèrement mieux les observations à 0.1. Le modèle final converge néanmoins vers la configuration trouvée auparavant, c'est-à-dire un régime 1 présent exclusivement entre les périodes de crise.

6 Conclusion

Ce mémoire met en évidence la présence de régimes dans les pertes opérationnelles des compagnies d'assurances américaines. La présence d'un cycle 'intermédiaire' est systématiquement détecté d'Octobre 2001 et Septembre 2007 et ceci peu importe les différents modèles testés ou séries testées. Ces résultats sont donc robustes à la fois à des changements de densités testées mais également à des points de départs différents comme il est montré au cours du mémoire.

L'ajustement supérieur des mélanges de densités formés par deux lois GB2 par rapport aux autres mixtes testés confirme le fait que ces lois sont plus indiquées aux fins de caractérisation du risque opérationnel. Par ailleurs l'ajustement obtenu des densités par rapport aux données est satisfaisant, renforçant la probabilité de présence de différents régimes.

Les régimes mis en évidence ont des caractéristiques différentes. Le régime 2 présente une dispersion bien plus importante et couvre à la fois les pertes faibles et les pertes les plus élevées. Le régime 1 est plus regroupé, possède un mode plus élevé et une dispersion élevée mais moins extrême que celle du 2eme régime. Par ailleur son coefficient d'aplatissement est plus faible que celui du régime 2.

Les mélanges de densités ont été testés sur différentes séries: la SOMME des pertes mensuelles, la SOMME des pertes mensuelles sans évènements extrêmes (SEE) ainsi que la MOYENNE des pertes mensuelles. Les résultats obtenus sont similaires pour les trois séries testées. Nous pouvons conclure que nos résultats sont peu influencés par les évènements rares et que ceux-ci sont valables pour la compagnie d'assurance 'moyenne' américaine.

Si la présence de différents régimes semble probable, la correspondance d'un régime de sévérité haut avec les périodes de récession économique n'est pas totalement évidente. Si le régime 2 couvre en très large majorité les deux périodes de récessions présentes sur la durée de la série d'observations, il couvre également une portion des périodes de non-récession. La façon dont les données de la période de Janvier 1999 à Janvier 2001 ont été enregistrées pourrait expliqué le fait que le régime 2 couvre également cette période.

En effet pour les deux années 1999 et 2000, les deux mois de Décembre ont une importante concentration de pertes ce qui peut-être dû à un biais comptable, les entreprises incorporant les pertes à la fin de l'année où celles-ci apparaissaient et non à la date précise où la perte devenait effective. Ainsi les deux mois Décembre 1999 et 2000 compte respectivement 58 pertes totalisant 4.5 milliards et 37 pertes

totalisant 2.2 milliards alors que durant les 27 premiers mois de la série, nous comptons 8 mois sans observations.

Les annexes table 15 et figures 30 et 31, montrent que les résultats obtenus lorsque les modèles sont appliqués à la série SOMME sans les années 1999 et 2000, ne diffèrent que peu de ceux présentés ci-dessus. Pour la série SOMME, le modèle GB2/GB2 continue de dominer le modèle SKN/GB2 comme le montrent les critères BIC et AIC ainsi que les p-values des tests sur les pseudo-résidus. Pour la mixture GB2/GB2, il est intéressant de remarquer que les transitions sont similaires peu importe que les années 1999 et 2000 soient inclues ou non. Les paramètres estimés pour le modèle GB2/GB2 sur la série SOMME, modifiée sans les années 1999 et 2001, sont similaires à ceux présentés plus haut. Les lois 1 et 2 des deux modèles remplissent les mêmes rôles que ceux présentés plus haut.

Les annexes table 16 et figures 32 et 33, montrent les mêmes résultats lorsque les modèles sont appliqués à la série MOYENNE sans les années 1999 et 2000. Comme pour la série SOMME, les paramètres estimés ainsi que les régimes sont similaires peu importe l'inclusion des deux premières années des données.

Selon les résultats obtenus, la conclusion semble être que l'influence des récessions économiques sur les pertes des compagnies d'assurances américaines se manifeste par une volatilité plus grande des dites pertes. Cette conclusion est supportée par les seconds moments des données en crise et non en crise présentés plus haut ainsi que par les caractéristiques des densités décrivant les deux périodes.

7 Bibliographie

Allen et Bali (2006). 'Cyclicality in catastrophic and operational risk measurements', *Journal of Banking and Finance* 31 (2007) 1191–1235

Brown, Goetzmann, Liang, Schwarz (2009). 'Estimating Operational Risk for Hedge Funds: The ω Score', *Financial Analysts Journal* Volume 65 Number 1 2009 CFA Institute

Chernobai, Jorion and Yu (2011). 'The Determinants of Operational Risk in U.S. Financial Institutions', *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 46, No. 6 (DECEMBER 2011), pp.1683-1725

Cummins, Lewis, Wei (2006) 'The market value impact of operational loss events for US banks and insurers', *Journal of Banking and Finance* 30 (2006) 2605–2634

Cummins, Dionne, McDonald et Pritchett (1990). 'Applications of the GB2 family of distributions in modeling insurance loss processes', *Insurance: Mathematics and Economics* 9 (1990) 257-272

Dahen, Dionne, Zajdenweber (2010). 'A practical application of extreme value theory to operational risk in banks', *Journal of Banking and Finance* (1484–1496) Volume 34 2009.

Dionne, Gagné, Gagnon et Vanasse (1997). 'Debt, moral hazard and airline safety : an empirical evidence', *Journal of Econometrics* 79 (t997) 379-402

Dionne (2013). 'Gestion des risques : histoire, définition et critique', Electronic copy available at: http://ssrn.com/abstract=21985831

Dionne et Saissi (2017). 'Endogenous Hidden Markov Regimes in Operational Loss Data: Application to the Recent Financial Crisis', *Journal of Operational Risk* 12, 23-57

Dutta et Perry (2007). 'A Tale of Tails: An Empirical Analysis of Loss Distribution Models for Estimating Operational Risk Capital ', Working paper No. 06 13, Federal Reserve Bank of Boston

Esterhuysen, Styger et van Vuuren (2010). 'The effect of stressed economic conditions on operational risk loss distributions', *SAJEMS* NS 13 (2010) No 4

Graf, Nedyalkova, Munnich, Seger et Zins (2011). 'Parametric Estimation of Income Distribution and Indicators of Poverty and Social Exclusion', Project FP7-SSH-2007-217322, Advanced Methodology for European Laeken Indicators.

Hennani Lameta (2015). 'L'évolution des Accords de Bâle: d'une approche micro-prudentielle à un cadre macro-prudentiel', Université de Montpellier.

de Lagarde (2010). 'L'invention du controle des risques dans les organismes d'assurance', Thèse au Centre de Recherche Européen en Finance et Gestion (crefige), Université Paris Dauphine.

McDonald (1984). 'Some Generalised Functions for the Size Distribution of Income',*Econometrica*, 52 (3), pp 647-663

Mittnik et Paterlini (2013). 'Operational risk dependencies and the determination of risk capital',*Journal of Operational Risk* (4), 83-104

Mudholkar, Hutson (2000). 'The epsilon-skew-normal distribtuion for analyzing near-normal data', *Journal of Statstical Planning and Inference* 83 (2000) 291-309

Sahara, Hardy, Saunders (2010a). 'Regulatory Capital Standards for Property and Casualty Insurers under the U.S., Canadian and Proposed Solvency II (Standard) Formulas', CAS, CIA, and SOA, Joint Risk Management Section, University of Waterloo,

Sahara, Hardy, Saunders (2010b). 'A Comparative Analysis of U.S., Canadian and Solvency II Capital Adequacy Requirements in Life Insurance', CAS, CIA, and SOA, Joint Risk Management Section, University of Waterloo,

Su Lien Lu (2013). 'A Hidden Markov Chain Model with Applications for Assessing Credit Risk', *Asia Pacific Management Review* 19(4) (2014) 405-427.

Siu, Ching, Fung, Ng, Li (2006). 'A high-order Markov-switching model for risk measurement', *Computers and Mathematics with Applications* 58 (2009) 1 10

Tukey (1977). 'Exploratory Data Analysis', Reading, MA: Addison-Wesley, 1977a.

Zucchini, Walter and MacDonald (2009).' Hidden Markov models for time series: An introduction using R', *CRC Press*, 276 p.

8 Annexe

Annexe 1: Type d'évènement et annotation,

Type de perte	Code
Clients Products and Business Practices	Cp & Bp
Execution Delivery and Process Management	Ed & Pm
Internal Fraud	IF
External Fraud	EF
Employment Practices and Workplace Safety	Ep & Ws
Damage to Physical Assets	DPA
Business Disruption and System Failures	Bd & Sf

Table 12: Type d'évènement et annotation

Annexe 2: Unité d'exploitation et annotation.

Unité d'exploitation	Code
Asset Management	AM
Commercial Banking	CB
Corporate Finance	CF
Insurance - Life & Health (Non-BIS)	L & H Insu
Insurance - Property & Casualty (Non-BIS)	P & C Insu
Other insurance	O Insu
Payment and Settlement	P & S
Retail Banking	RBa
Retail Brokerage	RBr
Trading & Sales	T & S
Vide	Vide

Table 13: Unité d'exploitation et annotation

Annexe 3: Détail des pertes par évènement et unité d'exploitation,

		Cp & Bp	DPA	Ed & Pm	IF	Ep & Ws	EF	Bd & Sf	Totaux
P & C Insu	Somme	9 382	2 138	13 623	1 185	749	278		27 355
	Compte	88	4	30	34	11	10		177
	Moyenne	107	534	454	35	68	28		154,5
	Écart-type	341	571	2118	88	83	45		922,7
L & H Insu	Somme	14 867		689	971	233	220	195	17 175
	Compte	122		36	23	10	14	3	208
	Moyenne	122		19	42	23	17	65	82,6
	Écart-type	294		41	75	23	35	30	232,5
O Insu	Somme	10 047	16 097	381	2 748	96	49		29 419
	Compte	68	30	13	18	8	5		142
	Moyenne	148	536	29	153	12	12		207,2
	Écart-type	259	712	84	346	14	14		433,1
T & S	Somme	3 679			350	23			4052
	Compte	8			2	1			11
	Moyenne	460			175	na			368
	Écart-type	1 102			150	na			955
AM	Somme	1 983	6		14		149		2 152
	Compte	23	2		2		4		31
	Moyenne	86	3,2		74		4		69,4
	Écart-type	156	1,4		15,4		1,9		138,6
RBr	Somme	925		6	950	12			1 892
	Compte	16		1	4	3			24
	Moyenne	58		na	237	4			78,9
	Écart-type	161,2		na	403	2,9			223,3
RBa	Somme	1 368		179	23		17		1 587
	Compte	7		1	2		3		13
	Moyenne	195		na	8		8		122
	Écart-type	239		na	2		5,5		197,2
CF	Somme	785							

Table 14: Détail des pertes par évènement et unité d'exploitation

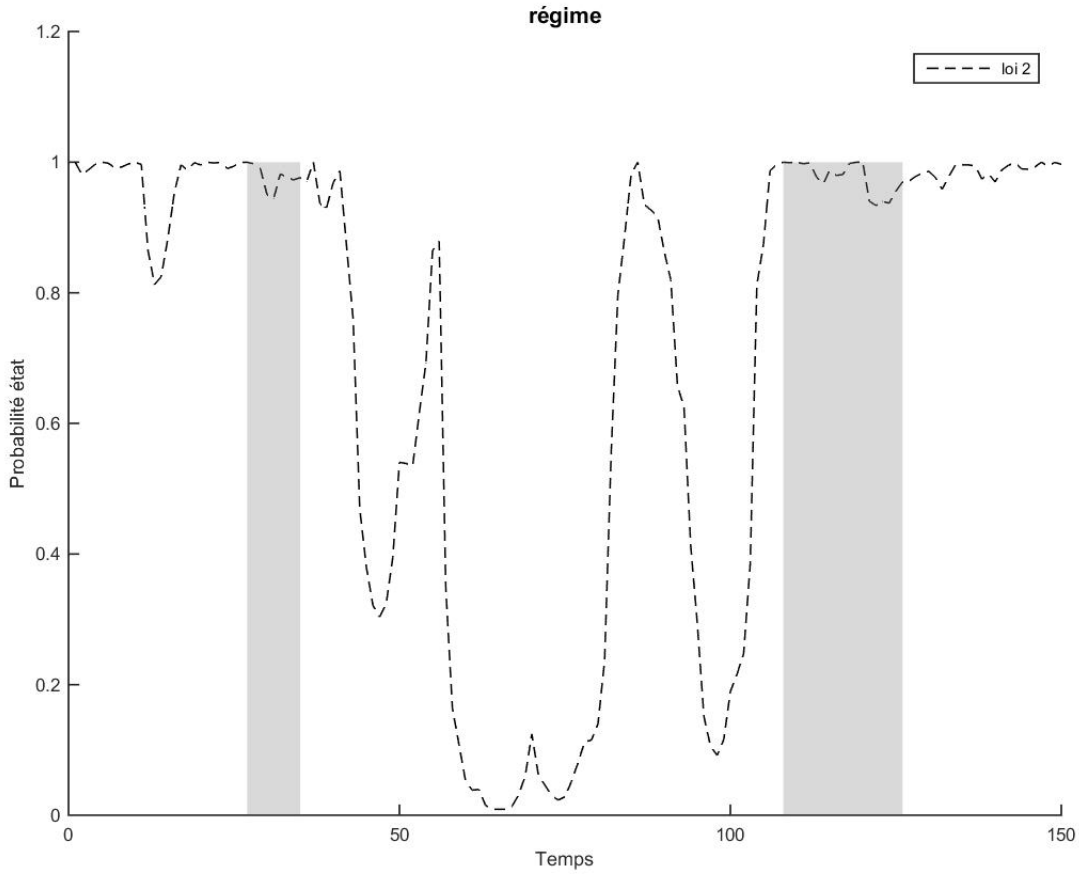

Figure 29: Régime 2, Modèle SKN/GB2, Série MOYENNE

La figure 29 montre la détection du régime 2 par le modèle SKN/GB2 appliqué aux données MOYENNE. Il apparait clairement que le régime 1 (loi Normale asymetrique) est détecté à la même période que pour tous les modèles précédents.

	Model 1				Model 2			
	SKN		GBII		GBII 1		GBII 2	
Paramètres initiaux	Mode	150	A	8	A	2	A	3
	Sigma	200	B	50	B	30	B	2
	Eps	0	P	0.09	P	0.01	P	0.05
			Q	0.2	Q	0.1	Q	0.05
Paramètres finaux	Mode	0.1	A	0.42	A	1.4	A	0.20
	Sigma	231	B	3.9e(07)	B	780	B	2.6e(10)
	Eps	-0.99	P	1.09	P	0.46	P	3.89
			Q	170	Q	1.12	Q	169
	Probabilité de transition modèle 1				Probabilité de transition modèle 2			
	à régime 1		à régime2		à régime 1		à régime2	
De régime 1	0.98		0.02		0.95		0.05	
De régime 2	0		1		0.02		0.98	
	Test de Normalité sur pseudo-résidus				Test de Normalité sur pseudo-résidus			
	1 if H1 true 5%		P value		1 if H1 true 5%		P value	
T-Test	0		0.62		0		0.56	
Chi-Square	0		0.16		0		0.27	
Shapiro-Wilk	0		0.07		0		0.12	
	Critères				Critères			
	AIC		BIC		AIC		BIC	
	766		795		761		789	

Table 15: Régime 2, Série SOMME sans années 1999/2000

La table 15 montre les paramètres estimés pour les modèles GB2/GB2 et SKN/GB2 appliqués sur la série SOMME sans les années 1999 et 2000. Il apparait clairement que la table 15 ressemble fortement à la table 6 présentée plus haut. Les allures des densités sont similaire et comme on peut le voir sur les figures 30 et 31 suivantes.

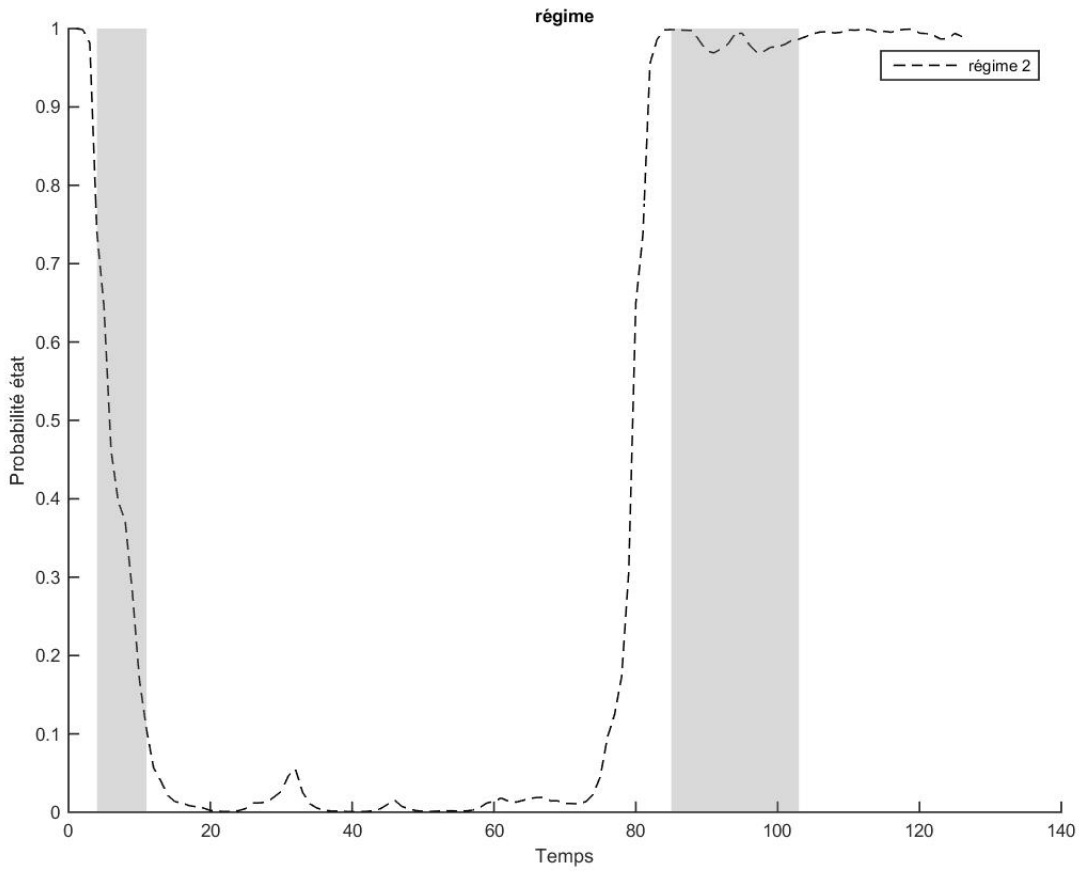

Figure 30: Régime 2 modèle GB2/GB2, Série SOMME sans 1999/2000

La figure 30 présente les régimes 2 détectés par le modèle GB2/GB2 appliqué sur la série SOMME sans les années 1999 et 2000. Les régimes et les transitions sont clairement similaires avec ceux trouvés sur la série SOMME.

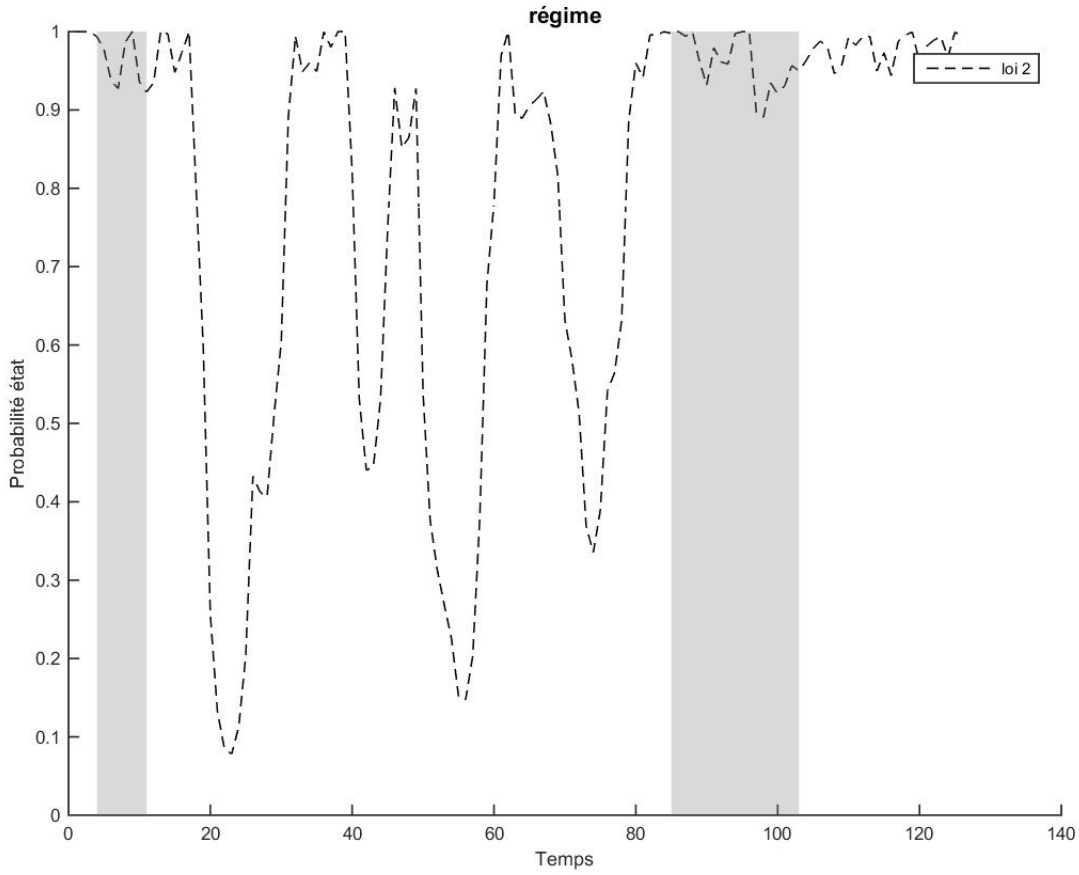

Figure 31: Régime 2 modèle SKN/GB2, Série SOMME sans 1999/2000

La figure 31 présente les régimes 2 détectés par le modèle SKN/GB2 appliqué sur la série SOMME sans les années 1999 et 2000. Comme pour le modèle GB2/GB2, les régimes sont similaires à ceux trouver lorsque le modèle est appliqué sur la série SOMME complète.

	Model 1				Model 2			
	SKN		GBII		GBII 1		GBII 2	
Paramètres initiaux	Mode	50	A	5	A	2	A	5
	Sigma	110	B	50	B	2	B	3
	Eps	0	P	0.1	P	0.05	P	0.1
			Q	0.9	Q	0.05	Q	0.08
Paramètres finaux	Mode	0.1	A	0.31	A	25	A	11
	Sigma	72.7	B	4.0e(07)	B	137	B	23
	Eps	-0.99	P	2.19	P	0.025	P	0.0393
			Q	170	Q	0.065	Q	0.05
	Probabilité de transition modèle 1				Probabilité de transition modèle 2			
	à régime 1		à régime2		à régime 1		à régime2	
De régime 1	0.91		0.09		0.98		0.02	
De régime 2	0.04		0.96		0.02		0.98	
	Test de Normalité sur pseudo-résidus				Test de Normalité sur pseudo-résidus			
	1 if H1 true 5%		P value		1 if H1 true 5%		P value	
T-Test	0		0.53		0		0.44	
Chi-Square	0		0.23		0		0.76	
Shapiro-Wilk	0		0.15		0		0.09	
	Critères				Critères			
	AIC		BIC		AIC		BIC	
	622		651		622		649	

Table 16: Régime 2, MOYENNE sans années 1999/2000

La table 16 présente les paramètres estimés pour les modèles GB2/GB2 appliqués sur la série MOYENNE sans les années 1999 et 2000. Comme pour la série SOMME, on peut voir que les régimes détectés par les paramètres estimés sont semblables avec ceux obtenus sur la série MOYENNE complète. Les figures 32 et 33 présentent les régimes 2 détectés par les modèles SKN/GB2 et GB2/GB2. On peut voir que ces figures présentent des résultats similaires avec ceux obtenus sur la série MOYENNE complète.

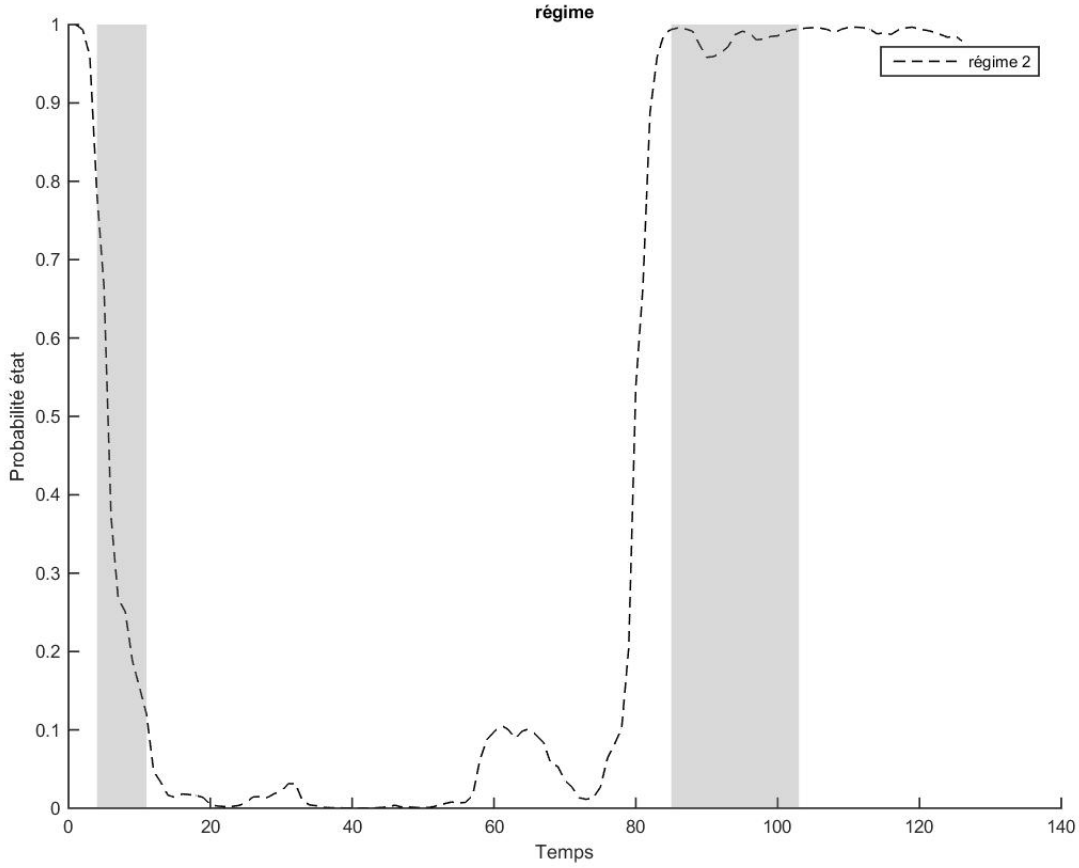

Figure 32: Régime 2 modèle GB2/GB2, Série MOYENNE sans 1999/2000

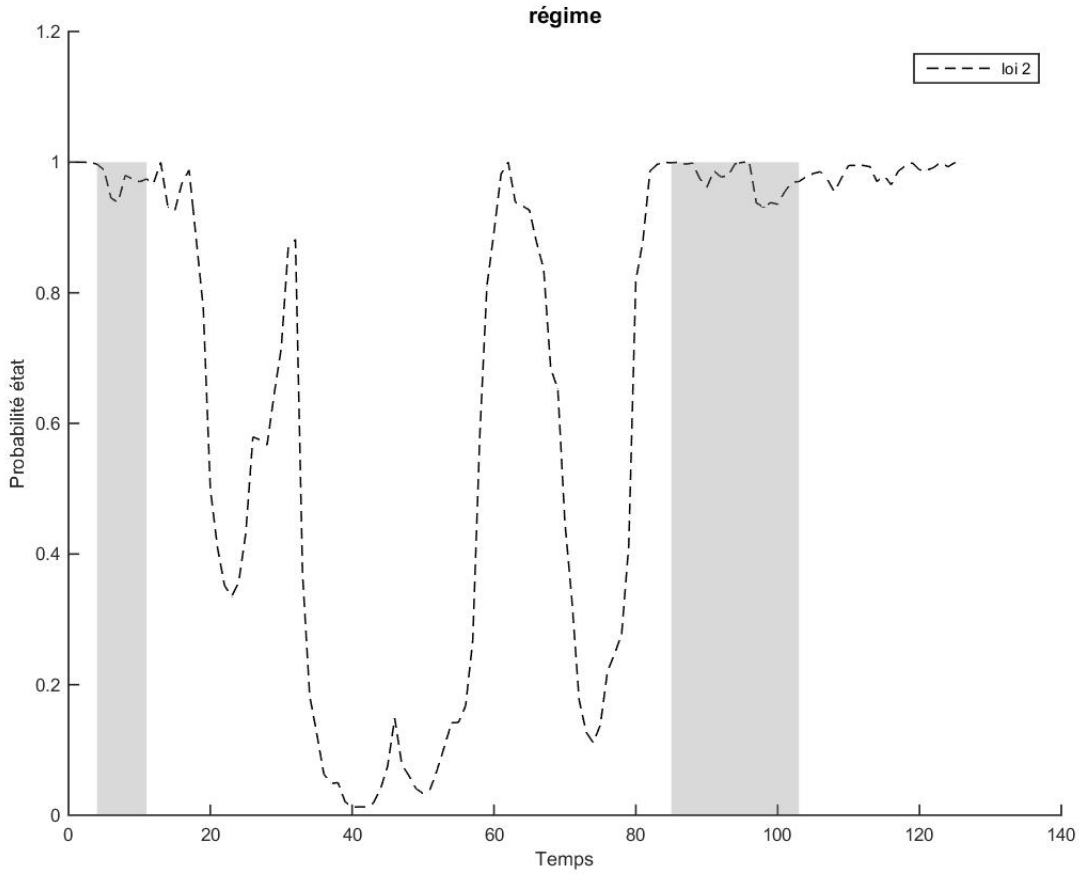

Figure 33: Régime 2 modèle SKN/GB2, Série MOYENNE sans 1999/2000