Prédiction des probabilités de défaut à l'aide de modèles structurels avec l'ajout d'un terme d'erreur à l'équité

par

Marie-Ève Drolet-Mailhot

Sciences de la gestion
Finances, Gestion des risques

Projet supervisé présenté en vue de l'obtention
du grade de maîtrise ès sciences
(M. Sc.)

Mars 2017

© Marie-Ève Drolet-Mailhot, 2017

Table des matières

1. Remerciements 3
2. Résumé 3
3. Introduction 3
4. Revue de littérature 5
5. Méthodologie 7
5.1 Modèle de Merton sans erreur 7
5.2 Modèle de Merton avec erreur 9
5.3 Modèle de Brockman & Turtle sans erreur 11
5.4 Modèle de Brockman & Turtle avec erreur 13
6. Données 13
6.1 Statistiques descriptives des firmes 16
7. Résultats 17
7.1 Analyse des paramètres 17
7.1.1 Modèle de Merton sans erreur 19
7.1.2 Modèle de Merton avec erreur 23
7.1.3 Modèle avec barrière sans erreur 27
7.1.4 Modèle avec barrière avec erreur 33
7.2 Performance statistique des modèles 38
8. Conclusion 44
9. Annexes 46
9.1 Linéarisation de l'équation de mesure 46
9.2 Code Matlab 46
10. Bibliographie 64

1. Remerciements

J'aimerais remercier mon directeur de projet, M. Georges Dionne, ainsi que mon codirecteur de projet, M. Jean-Guy Simonato pour votre disponibilité, votre encadrement, votre aide et vos précieux conseils. Merci de m'avoir donné accès à une base de données aussi complète et finalement, merci pour votre confiance.

2. Résumé

Ce projet supervisé s'intéresse à l'hypothèse que les modèles structurels Merton (1974) et Brockman & Turtle (2003) répliquent bien les valeurs d'équités servant à estimer les probabilités de défaut. Pour ce faire, les probabilités de défaut des entreprises canadiennes cotées en bourse sont calculées avec et sans erreur d'estimation ajoutée aux formules d'équité. Plus spécifiquement, à partir des données de Dionne et al. (2008), pour chaque firme et chaque année dans l'échantillon, les paramètres du modèle de Merton (1974) sont estimés ainsi que les probabilités de défaut correspondantes avec et sans terme d'erreur. Les résultats sont ensuite comparés. La même démarche est ensuite répétée pour le modèle avec barrière au défaut de Brockman et Turtle (2003). Finalement, les résultats des deux modèles structurels sont comparés. Ceux-ci sont évalués grâce à la méthode de vraisemblance maximale et l'approche proposée dans Simonato (2015) lorsqu'un terme d'erreur est introduit. Les résultats indiquent tous que le modèle de Merton sans erreur est le meilleur prédicteur des probabilités de défaut. Ni l'ajout d'un terme d'erreur, ni l'introduction d'une barrière au défaut ne permettent d'obtenir des probabilités de défaut plus précises.

3. Introduction

Les banques, les grandes institutions financières, les détenteurs d'obligations et tout autre prêteur aux entreprises encourent plusieurs risques financiers, notamment un risque de crédit. Celui-ci représente plus de 80 % du risque des banques. Il s'agit du risque de subir

une perte économique lorsqu'une contrepartie ne peut honorer ses engagements contractuels. Le risque de défaut des entreprises, soit une partie intégrante du risque de crédit, peut être quantifié à l'aide de différents indicateurs. L'un des plus populaires est sans équivoque l'estimation d'une probabilité de défaut via des modèles structurels. Ceux-ci sont autant utilisés par les théoriciens que les praticiens, pensons notamment au modèle structurel de Moody's KMV.

Dans Dionne, Laajimi, Mejri et Petrescu (2008), deux modèles structurels de dettes (Merton (1974) et Brockman et Turtle (2003)) ont été utilisés afin d'obtenir des estimés de probabilités de défaut à partir de prix d'actions cotées en bourse à l'aide d'une approche de maximum de vraisemblance. Ces estimations ont par la suite été utilisées comme variables indépendantes afin d'expliquer les défauts observés pour un échantillon de firmes canadiennes. Les auteurs trouvent que les probabilités de défaut ainsi obtenues sont utiles pour prédire les défauts. Toutefois, cette approche utilise l'hypothèse que le modèle structurel explique permet à lui seul d'estimer les valeurs d'équités. Par exemple, pour les modèles de Merton (1974) et de Brockman et Turtle (2003) respectivement :

$$E_t = BSCall(A_t, \bar{B}, r, T, \sigma),$$

$$E_t = DOCall(A_t, \bar{B}, H, r, T, \sigma),$$

où BSCall (·) est la fonction d'évaluation d'une option d'achat européenne (call) selon le modèle de Black-Scholes et DOCall (·) est la fonction d'évaluation d'une option d'achat barrière « Down & Out » selon le modèle de Brockman & Turtle. E_t est la valeur totale des actions de la firme, A_t la valeur au marché des actifs, $\bar{B}$ la valeur de la dette zéro-coupon, r le taux sans risque, T l'échéance de la dette zéro-coupon, σ la volatilité des actifs de la firme et finalement, pour le modèle de Brockman & Turtle (2003, H représente la barrière au défaut.

Ce projet supervisé tente de répliquer certains résultats de Dionne, Laajimi, Mejri et Petrescu (2008) tout en proposant de relâcher l'hypothèse que les valeurs d'équités doivent

être estimés uniquement qu'à partir du modèle de tarification par options choisi. Le modèle est alors présenté comme une approximation de la réalité et un terme d'erreur est ajouté à l'équation d'évaluation de l'équité.

$$E_t = f(\cdot) + v_t,$$

où v_t est un terme d'erreur Gaussien de moyenne nulle et d'écart-type σ_v. La fonction $f(\cdot)$ évalue la valeur au marché de l'équité, soit comme une option d'achat européenne standard pour le modèle de Merton (1974) ou soit comme une option d'achat barrière « Down & Out » pour le modèle de Brockman & Turtle (2003). Selon Duan et Fulop (2009), relâcher l'hypothèse que le modèle explique à lui seul la réalité permet des estimations potentiellement plus précises pour les paramètres μ, σ et le paramètre de barrière H pour le modèle de Brockman & Turtle (2003). La précision du paramètre σ, étant responsable de capturer le risque des actifs, a nécessairement un impact non négligeable sur la précision des probabilités de défaut estimées. De plus, selon Bharath et Shumway (2004), la dérive (μ) est un paramètre primordial dans l'estimation des probabilités de défaut. Afin d'estimer ce modèle avec erreur, l'approche proposée dans Simonato (2015), utilisant un filtre de Kalman étendu, sera utilisée.

4. Revue de littérature

L'estimation des probabilités de défaut des compagnies publiques, notamment via l'utilisation de modèles structurels, est un sujet pour lequel la littérature scientifique abonde. Black et Scholes (1973) et Merton (1974) sont les pionniers de ce type de modèle qui utilise la théorie moderne des produits dérivés afin d'évaluer les actifs et la dette des entreprises. La dynamique de la valeur au marché des actifs est donnée par le mouvement brownien géométrique suivant :

$$\frac{dA_t}{A_t} = \mu dt + \sigma dZ_t,$$

où μ est le rendement espéré des actifs, σ la volatilité des rendements et Z_t un brownien géométrique. Une entreprise est mise en défaut lorsque la valeur des capitaux propres,

évaluée à l'aide d'une option d'achat européenne, ayant comme sous-jacent la valeur des actifs de la firme, se retrouve hors de la monnaie à l'échéance. Soit lorsque la valeur au marché des actifs est inférieure au prix d'exercice égal à la dette, où celle-ci est estimée comme étant le total de la dette au livre à court terme augmentée de la moitié de la dette à long terme. Son modèle a inspiré plusieurs autres plus actuels, notamment celui de Moody's KMV.

Malgré la popularité du modèle de Merton (1974), il existe dans la littérature tout un débat entourant sa précision et son efficacité. Plusieurs chercheurs, dont Eom, Helwege et Huang (2004), montrent que le modèle de Merton engendre des écarts de crédit trop petits relativement à ceux observés sur le marché. Le modèle de Merton a pour avantage d'être simple à implanter et intuitif, mais il comporte certainement quelques lacunes, telles que des hypothèses trop simplistes. Jones, Mason et Rosenfield (1984) mettent en évidence les conséquences de l'hypothèse des taux d'intérêt sans risque non stochastique. La volatilité non stochastique est une autre hypothèse non réaliste ou encore, celle que les firmes possèdent qu'une seule dette, zéro-coupon. Plusieurs chercheurs ont élaboré de multiples modèles alternatifs, mais ceux-ci complexes à mettre en oeuvre. Feldhütter et Schaefer (2015) montrent que, lorsque le modèle de Merton est testé avec les bonnes données et méthodes, les écarts de crédit calculés reflètent bien la réalité.

Une alternative au modèle structurel de Merton (1974) relativement simple à implanter a été développée par Brockman & Turtle (2003). Leur méthode permet d'évaluer la probabilité de défaut en tenant compte de sa dépendance à la trajectoire suivie par la valeur de l'équité. En d'autres mots, à l'opposé du modèle standard de Merton (1974), la possibilité d'un défaut ne survient pas qu'à l'échéance, mais plutôt à tout moment où la valeur des actifs passe en dessous de la barrière, soit un niveau prédéterminé, qui reflète généralement la charge des dettes de l'entreprise. La valeur de l'équité d'une firme est ainsi modélisée comme une option d'achat barrière « down & out » portant sur ses actifs. Ce scénario est beaucoup plus réaliste étant donné que les créanciers ont le pouvoir de déclarer une firme en faillite aussitôt que celle-ci ne respecte plus ses ratios financiers énoncés dans l'entente de crédit (barrière

légale). Il est effectivement irréaliste de penser qu'entre chaque date d'échéance de la dette (généralement fixée à un an), la valeur des actifs peut atteindre des niveaux beaucoup plus bas que la dette sans entraîner aucune conséquence financière grave.

5. Méthodologie

Tour à tour, les modèles de Merton (1974) et de Brockman et Turtle (2003) seront utilisés afin d'estimer les probabilités de défaut des firmes composant notre échantillon. Chacun de ces modèles sera tout d'abord mis en œuvre sans terme d'erreur, pour ensuite ajouter le terme d'erreur à l'équation d'équité. Ainsi, les probabilités de défaut seront estimées à l'aide de quatre modèles différents.

5.1 Modèle de Merton sans erreur

Dans une première étape, les probabilités de défaut ont été estimées à l'aide du modèle de base de Merton (1974). Selon ce modèle, l'évènement de défaut ne peut survenir qu'à l'échéance de la dette (T), lorsque la valeur implicite des actifs est inférieure à la valeur au livre de la dette. Dans un tel cas, les actionnaires n'exerceront pas l'option dont ils sont détenteurs afin de racheter les actifs de la firme, ce qui causera le défaut. L'échéance de la dette est fixée à un an comme dans Dionne Laajimi, Mejri et Petrescu (2008). Ces auteurs s'appuient sur l'article de Vassalou et Xing (2004) et sur l'implantation du modèle de Merton par KMV afin de choisir ce paramètre. La valeur au marché des capitaux propres est donnée par :

$$E_t = A_t N(d_1) - \bar{B} e^{-rT} N(d_2),$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{A_t}{\bar{B}}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

où $N(\cdot)$ est la fonction de densité cumulative de la distribution normale centrée réduite. Puisque la valeur au marché des actifs (A_t) n'est pas observable, elle est trouvée implicitement à partir de la valeur au marché de l'équité, qui elle est observable, en inversant l'équation de Black-Scholes et en utilisant l'algorithme « Newton-Raphson » avec un critère de convergence très précis (1e-8). Néanmoins, le rendement espéré des actifs (μ) ainsi que la volatilité (σ) sont également non observables. Comme dans l'article de Dionne, Laajimi, Mejri et Petrescu (2008), l'approche de maximum de vraisemblance avec la transformation de Duan et al. (1994) est utilisée afin d'inférer ces paramètres :

$$L_E = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2 h) - \frac{1}{2}\sum_{t=2}^{n}\left[\frac{ln\left(\frac{\hat{A}_t}{\hat{A}_{t-1}}\right)-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)h}{\sigma\sqrt{h}}\right]^2 - \sum_{t=1}^{n}\ln\left(\hat{A}_t\right) - \sum_{t=1}^{n} ln\left(\frac{\partial E}{\partial A}\right),$$

où h, l'intervalle de temps (en années) entre deux observations, est fixe à $1/252$, le taux sans risque égale 3 % et rappelons que $\frac{\partial E}{\partial A} = N(d_1)$. Cette approche consiste à trouver les paramètres $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ de façon à ce que la log vraisemblance soit maximisée. La fonction de vraisemblance a été maximisée à l'aide d'un algorithme de « Quadratic Hill Climbing » avec un critère de convergence de 1e-5. Cette technique d'optimisation itérative simplifie le problème multidimensionnel en tentant de trouver une meilleure solution que celle précédemment trouvée en modifiant un paramètre à la fois.[1] Les valeurs de départ choisies pour les paramètres μ et σ sont respectivement 0.01 et 0.2. Une fois les paramètres inconnus estimés, la valeur implicite des actifs est trouvée. Cela complète toutes les informations nécessaires afin d'estimer la probabilité de défaut à la fin de chaque année de chaque firme ou la distance au défaut (DD) de Merton (1974) :

$$PD = N(-DD) = N\left(-\frac{ln\left(\frac{A_t}{\bar{B}}\right)+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

[1] Chinneck, J.W., 2016, Practical Optimization: A Gentle Introduction, Ottawa, Carleton University. Récupéré de http://www.sce.carleton.ca/faculty/chinneck/po/Chapter16.pdf

5.2 Modèle de Merton avec erreur

Dans une deuxième étape, afin de relâcher l'hypothèse d'évaluation parfaite des valeurs d'équités selon le modèle de Merton (1974), la même méthodologie que ci-dessus a été appliquée, en introduisant cependant un terme d'erreur à la formule d'équité. Cela complexifie le problème en impliquant une méthode de filtrage. Simonato (2015) a choisi, entres autres pour sa simplicité, la méthode du filtre de Kalman étendue. Cet algorithme permet d'obtenir des valeurs plus précises de paramètres non observables (A_t) en se basant sur une série temporelle d'observations statistiquement bruitées (E_t). Cette technique a pour avantage de fournir la fonction de vraisemblance à maximiser afin d'obtenir des estimations cohérentes. Cependant, la solution trouvée n'est pas nécessairement optimale, étant donné que cette méthode nécessite une linéarisation du problème à l'aide d'une série de Taylor de premier ordre. Ainsi, la fonction de vraisemblance maximisée n'est qu'une approximation. Simonato (2015) a démontré en s'appuyant sur des simulations de Monte-Carlo que dans le cadre du modèle de Merton, l'approximation résultante était valide.

La première étape consiste à représenter le modèle à l'aide d'une formulation « espace état » qui comporte deux équations : une équation de mesure et une équation de transition. L'équation de mesure relie la dynamique de la variable non observée à celle observée. L'équation de transition spécifie la dynamique de la variable non observée. Ces équations peuvent être écrites ainsi :

$$\text{Équation de mesure : } E_{ih} = f(e^{a_{ih}}) + v_{ih},$$

$$\text{Équation de transition : } a_{ih} = a_{(i-1)h} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) h + \epsilon_{ih},$$

où h est le pas de temps toujours égal à $1/252$ (un jour de trading), i représente le nombre d'itérations, $a_{ih} = \ln(A_{ih})$, v_{ih} est un bruit statistique i.i.d. $Normal(0, \sigma_v^2)$, ϵ_{ih} suit une distribution normale de moyenne 0, de variance $\sigma^2 h$ et est indépendant de v_{ih}. Finalement, $f(\cdot)$ est la formule d'équité de Black-Scholes. L'utilisation du logarithme naturel des actifs est nécessaire, puisque le filtre de Kalman ne s'applique qu'aux variables non observables distribuées normalement. Ainsi, l'équation de transition est simplement la dynamique

discrétisée du logarithme des actifs. Quant à elle, l'équation de mesure est simplement la valeur théorique de l'équité plus un terme d'erreur. Celle-ci doit cependant être linéarisée afin d'être en mesure d'implémenter le filtre de Kalman (voir la démarche plus détaillée en annexe 9.1) :

$$E_{ih} = \nabla \cdot a_{ih} + \ g_{ih} + v_{ih},$$

$$\nabla = \frac{\partial f(e^{a_{ih}})}{\partial e^{a_{ih}}} \cdot e^{a_{ih}} = N(d_1) \cdot e^{a_{ih}},$$

$$g_{ih} = f(e^{a_{ih|(i-1)h}}) - \nabla \cdot a_{ih|(i-1)h}.$$

Sachant les valeurs numériques pour les paramètres μ, $\sigma\ et\ \sigma_v$, la deuxième étape, soit la récursion du filtre de Kalman étendu, peut être mise en place avec les équations de prédiction et de mise à jour.

Les équations de prédiction sont :

$$a_{ih|(i-1)h} = a_{(i-1)h} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) h,$$

$$P_{ih|(i-1)h} = a_{(i-1)h} + \sigma^2 h.$$

Il s'agit des estimations de la variable non observable et de leur variance (P) étant donné les informations disponibles à la période précédente.

Les équations de mise à jour peuvent s'écrire :

$$v_{ih|(i-1)h} = E_{ih} - (\nabla \cdot a_{ih} + \ g_{ih}),$$

$$F_{ih} = \nabla^2 P_{ih|(i-1)h} + \sigma_v^2,$$

$$a_{ih} = a_{ih|(i-1)h} + P_{ih|(i-1)h} \cdot \nabla \cdot F_{ih}^{-1} \cdot v_{ih|(i-1)h},$$

$$P_{ih} = P_{ih|(i-1)h} - P_{ih|(i-1)h}^2 \cdot \nabla^2 \cdot F_{ih}^{-1},$$

où F_{ih} représente la variance du terme d'erreur (v_{ih}). Cet ensemble d'équations permet de mettre à jour les estimations à l'aide des informations maintenant disponibles de la période courante. Le gain de Kalman $(P_{ih|(i-1)h} \cdot \nabla \cdot F_{ih}^{-1})$ met à jour l'estimé de la variable non observable et contrôle à quel point la mise à jour est plus fiable que la prédiction. Cela dépend fortement de la variance du terme d'erreur (F_{ih}). Plus cette variance est petite, plus

les informations reçues lors de la mise à jour sont fiables et plus le gain de Kalman est élevé. La variance du logarithme des actifs ($P_{ih|(i-1)h}$) influence également le gain de Kalman. Plus celle-ci est élevée, plus la variable non observable va subir des sauts importants de valeurs d'une période à l'autre et plus le gain de Kalman doit donc être élevé afin de s'adapter à ces valeurs parfois éloignées des prédictions de départ.[2]

Afin de répliquer la méthodologie de Simonato (2015), l'algorithme a été initialisé avec la valeur initiale a_0 égale au logarithme de la valeur implicite des actifs (obtenue en inversant la fonction d'équité de Black-Scholes tel que décrit en 4.1) et $P_0 = 1{,}000$. Finalement, les paramètres μ, $\sigma\ et\ \sigma_v$ sont estimés en appliquant l'approche de maximum de vraisemblance, c'est-à-dire, en maximisant la log vraisemblance :

$$\ln L\ (\mu, \sigma, \sigma_v) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{T} ln(F_{ih}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} \frac{v_{ih|(i-1)h}^2}{F_{ih}}.$$

5.3 Modèle de Brockman & Turtle sans erreur

Dans une troisième étape, un cadre conceptuel différent a été appliqué, soit celui de Brockman & Turtle (2003). Le but de cet exercice est d'améliorer la pertinence des probabilités de défaut en capturant leur dépendance envers la trajectoire passée parcourue par la valeur des actifs. Selon ce modèle, l'évènement de défaut peut survenir à tout moment avant l'échéance si la valeur implicite des actifs tombe en dessous de la barrière, et ce, même si la valeur des actifs sous-jacents remonte par la suite ou est supérieure à la barrière à l'échéance. Lorsque la barrière est franchie, l'option dont les actionnaires sont détenteurs est instantanément désactivée et ceux-ci ne peuvent alors plus racheter les actifs de la firme, ce qui entraîne le défaut. La valeur au marché des capitaux propres est donnée par :

$$E_t = A_t N(a_t) - \bar{B} e^{-rT} N\left(a_t - \sigma\sqrt{T}\right)$$

[2] Bishop, G. & G. Welch, 2001, An introduction to the Kalman filter, cours 8 [pdf en ligne], University of North Carolina. Récupéré de http://www.cs.unc.edu/~tracker/media/pdf/SIGGRAPH2001_CoursePack_08.pdf

$$-A_t(H/A_t)^{2\eta}\,N(b_t) + \bar{B}e^{-rT}(H/A_t)^{2\eta-2}\,N(b_t - \sigma\sqrt{T}),$$

$$a_t = \frac{ln\left(\frac{A_t}{\max(\bar{B},H)}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$b_t = a_t - \frac{2ln\left(\frac{A_t}{H}\right)}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$\eta = \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2},$$

Dans ce modèle, comme expliqué dans l'article de Brockman & Turtle (2003), l'échéance (T) de l'option ne représente plus l'échéance de la dette, mais plutôt la durée de vie de l'entreprise, à ne pas confondre avec le temps avant le défaut qui peut être plus petit ou plus grand que T. Afin de répliquer la méthodologie de Brockman & Turtle (2003), l'échéance est fixée à 10 ans, ce qui est d'ailleurs un choix commun dans la littérature. Il est à noter que les deux premiers termes de l'équation d'évaluation de l'équité équivalent en fait au modèle de base de Merton (1974). Ainsi, une barrière (H) égale à 0 revient à la formule standard d'une option d'achat européenne.

La même méthodologie avec les mêmes algorithmes que dans le cas du modèle de Merton sans erreur est répétée, à l'exception des formules d'évaluation qui changent d'un modèle à l'autre. La valeur implicite au marché des actifs est alors trouvée en inversant la formule de l'option d'achat « Down & Out ». Les paramètres non observables ($\mu, \sigma\ et\ H$) sont encore une fois inférés via l'approche de maximum de vraisemblance. Cette fois-ci par contre, selon Duan, Gauthier et Simonato (2004),

$$\frac{\partial E}{\partial A} = N(a_t) + \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[n(a_t) - \frac{\bar{B}e^{-rT}}{A_t}n\left(a_t - \sigma\sqrt{T}\right)\right] + \left(\frac{H}{A_t}\right)^{2\eta-1}\left[(2\eta-1)\frac{H}{A_t}N(b_t) + \frac{\bar{B}e^{-rT}}{H}(2-2\eta)N\left(b_t - \sigma\sqrt{T}\right)\right] + \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\frac{H}{A_t}\right)^{2\eta-1}\left[\frac{H}{A_t}n(b_t) - \frac{\bar{B}e^{-rT}}{H}n\left(b_t - \sigma\sqrt{T}\right)\right].$$

La valeur de départ de l'algorithme pour la barrière est le minimum entre la plus petite valeur de la dette au cours de la dernière année et la plus petite valeur au marché de l'équité au cours de la dernière année. Le but étant d'initialiser la barrière à un niveau plus faible

que la dette et l'équité afin de s'assurer que l'option ne soit pas inactive au temps initial. Finalement, les probabilités de défaut sont estimées à l'aide de la formule proposée dans Perlich & Reisz (2007), qui est équivalente à celle énoncée par Brockman & Turtle :

$$PD = N\left(\frac{ln\frac{H}{A_t}-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \frac{H}{A_t}^{\frac{2\mu}{\sigma^2}-1} N\left(\frac{ln\frac{H}{A_t}+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

5.4 Modèle de Brockman & Turtle avec erreur

Dans une quatrième étape, un terme d'erreur à la formule d'option d'achat « Down and Out » est introduit afin de relâcher l'hypothèse d'évaluation parfaite de l'équité selon le modèle de Brockman & Turtle (2003). Pour ce faire, la même méthodologie que dans le cas du modèle de Merton avec erreur est appliquée. Deux modifications sont toutefois nécessaires afin de représenter le nouveau cadre conceptuel du modèle. Dans l'équation de mesure, $f(\cdot)$ est maintenant la formule d'une option d'achat « Down and Out » et lors de la linéarisation de cette équation, $\frac{\partial f(e^{a_{ih}})}{\partial e^{a_{ih}}}$ doit être la dérivée de l'option barrière par rapport aux actifs (voir section 5.3).

6. Données

La base de données servant à calculer les probabilités de défaut a été fournie par M. Dionne et M. Simonato et il s'agit sensiblement des mêmes données sur lesquelles l'étude de Dionne, Laajimi, Mejri et Petrescu (2008) est basée. Les probabilités de défaut calculées s'étendent sur la fenêtre de janvier 1988 à décembre 2004. Cela requiert des données dès janvier 1987 étant donné que les probabilités sont calculées à la fin de chaque année et qu'une condition d'un minimum de 200 données journalières consécutives a été imposée lors de l'application des modèles structurels choisis afin d'assurer une certaine fiabilité des résultats. Pour chaque firme canadienne publique listée sur le *Toronto Stock Exchange (TSE)* non financière, les valeurs de marché journalières d'équité ont été fusionnées avec les valeurs au livre annuelles de dette (dette à court terme plus la moitié de la dette à long terme). Cette estimation de la dette totale de la firme est par la suite utilisée dans tous les

modèles de défaut. Afin de s'assurer que les états financiers aient été audités, Dionne, Laajimi, Mejri et Petrescu (2008) ont utilisé les nouvelles valeurs aux livres au début d'une nouvelle année fiscale seulement que quatre mois après la fin de l'année fiscale précédente.

La base de données se sépare en deux échantillons, soit les firmes ayant fait défaut et celles n'ayant pas fait défaut. Les défauts ont été récoltés dans le *Financial Post Predecessors & Defunct*, *CanCorp Financials (Corporate Retriever)* et *Stock Guide*. Pour cet échantillon, les capitalisations boursières proviennent de *DataStream's DEAD.LLT series* alors que les valeurs comptables de *Stock Guide (Stock Guide Publications, 2005)* et *CanCorp Financials (Compact D Canada, 1990)*. Les compagnies n'ayant pas publié d'états financiers aux minimum 18 mois avant leur défaut ont été retirées par Dionne, Laajimi, Mejri et Petrescu (2008). Pour les compagnies ayant fait défaut entre 12 et 18 mois après la publication de leurs derniers états financiers, la date de défaut a été harmonisée avec la date des derniers états financiers. En ce qui concerne le deuxième échantillon, soit les non-défauts, les données de marché proviennent de *DataStream's FTORO.LLT series* et les données comptables de *Stock Guide*. Au final, la base de données totale de Dionne, Laajimi, Mejri et Petrescu (2008) compte 762 firmes, dont 59 défauts et 703 non-défauts. Le nombre total de données annuelles se chiffre à 5,744. Il est à noter que les observations annuelles des firmes ayant fait défaut avant l'année de leur défaut ont été placées dans l'échantillon de non-défaut.

Lors de l'estimation des paramètres des deux modèles avec erreur, certaines firmes ont été retirées de l'échantillon étant donné que les techniques d'optimisation des paramètres ne convergeaient pas vers une solution viable. Par exemple, les paramètres proposés étaient inadmissibles (sortie NaN dans matlab) ou encore, leur erreur type tendait vers l'infini. Dans la majorité des cas, de tels problèmes surviennent lorsque la volatilité des rendements observés est trop prononcée (voir figure 1 pour un exemple). Cela pourrait être causé, par exemple, par des sauts dans les rendements à la suite d'une division des actions, ce qui est commun lors d'une restructuration financière, encore plus probable pour les firmes en

défaut. En outre, pour certaines firmes, pour une année donnée, la dérive (μ) était supérieure à trois (voir figure 2 pour un exemple). Il devient alors très difficile d'interpréter financièrement de tels paramètres et c'est pourquoi ces données annuelles extrêmes ont aussi été retirées de l'échantillon. Après ces quelques ajustements, la base de données finale compte 647 firmes pour un total de 5132 observations annuelles. Au total, il y a 72 firmes qui ont fait défaut, ce qui est légèrement supérieure au nombre de défauts de la base de données de Dionne, Laajimi, Mejri et Petrescu (2008). Comme mentionné plus haut, nos bases de données sont très similaires, mais légèrement différentes.

Figure 1

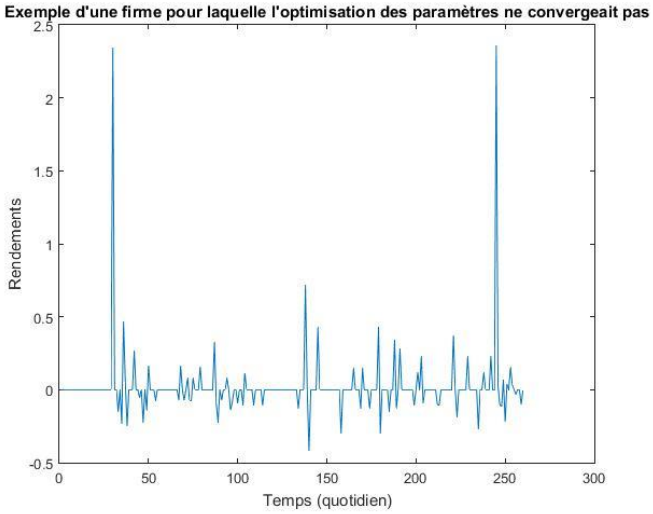
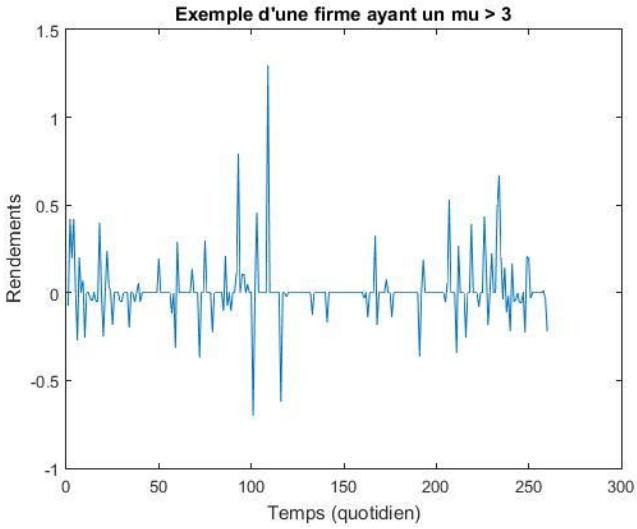


Figure 2



6.1 Statistiques descriptives des firmes

Les tableaux 1 et 2 ci-dessous dépeignent statistiquement les firmes retenues. En moyenne, les firmes qui ont fait défaut avaient 131 millions de dettes au livre et une capitalisation boursière de 381 millions. Toutefois, certaines firmes en défaut affichent des valeurs beaucoup plus éloignées, tel que le démontrent le maximum de 3.4 milliards de dettes et le maximum de 15.3 milliards de capitalisation boursière. Les firmes n'ayant pas fait défaut semblent être de plus grande taille avec en moyenne une capitalisation boursière de 615 millions. Conséquemment, elles ont aussi plus de dettes, en moyenne 339 millions. L'échantillon des firmes n'ayant pas fait défaut comporte des valeurs encore plus éloignées avec un maximum de 30.4 milliards de dettes et 24.2 milliards de capitalisation boursière.

Tableau 1 - Valeur totale de la dette aux livres (en millions de dollars canadiens)

Statistiques	Échantillon défaut	Échantillon sans défaut	Échantillon fusionné
Moyenne	131	339	332
Médiane	16	20	20
Minimum	0.009	0.003	0.003
Maximum	3,376	30,439	30,439
Mode	2	0.46	0.46
Écart-type	414	1,149	1,132
Skewness	0.005	0.009	0.009
Kurtosis	0.03	0.1	0.2
Étendue	3,376	30,439	30,439
Étendue interquartile	40	110	107

Tableau 2 - Valeur totale de la capitalisation boursière (en millions de dollars canadiens)

Statistiques	Échantillon défaut	Échantillon sans défaut	Échantillon fusionné
Moyenne	381	615	607
Médiane	13	54	52
Minimum	0.09	0.06	0.06
Maximum	15,315	24,222	24,222
Mode	16	9	9
Écart-type	1,473	1,784	1,775
Skewness	0.005	0.005	0.005
Kurtosis	0.03	0.03	0.03
Étendue	15,315	24,221	24,222
Étendue interquartile	44	265	252

7. Résultats

7.1 Analyse des paramètres

Un survol des principaux résultats sera premièrement présenté dans le but de comparer les différents modèles. Par la suite, une analyse plus détaillée des paramètres estimés par chaque modèle sera effectuée. Afin de rendre les firmes comparables entre elles, peu importe leur taille, la volatilité du terme d'erreur est mesurée en proportion de la capitalisation boursière et la barrière, en proportion de la valeur totale au marché des actifs. Les probabilités de défaut estimées dans l'ensemble de ce travail sont annuelles.

Tableau 3 – Paramètres de l'échantillon de défaut

Modèle	μ_A	σ_A	H/A	σ_ϑ/E	$\overline{PD}$
Merton sans erreur	0.15	0.88	-	-	53 %
Merton avec erreur	-0.19	0.64	-	0.05	53 %
B&T sans erreur	-0.07	0.71	0.47	-	67 %
B&T avec erreur	-0.12	0.69	0.31	43	51 %

Tableau 4 – Paramètres de l'échantillon sans défaut

Modèle	μ_A	σ_A	H/A	σ_ϑ/E	$\overline{PD}$
Merton sans erreur	0.32	0.59	-	-	12 %
Merton avec erreur	0.19	0.47	-	0.02	11 %
B&T sans erreur	0.23	0.50	0.37	-	38 %
B&T avec erreur	0.19	0.44	0.32	4	30 %

Tout d'abord, comparons les résultats du modèle de Merton avec et sans erreur pour chaque sous-échantillon à l'aide des tableaux 3 et 4 ci-dessus. Autant pour l'échantillon de défaut que pour celui sans défaut, le modèle de Merton estime une dérive moyenne et un coefficient de diffusion moyen plus faible lorsqu'un terme d'erreur est introduit. Pour l'échantillon de défaut, le modèle avec erreur permet même d'obtenir une dérive négative (-0.19), ce qui est cohérent avec les rendements décroissants généralement observés pour les firmes en détresse financière. Il est également raisonnable que le coefficient de diffusion réduise lorsqu'un terme d'erreur est ajouté au modèle, puisque celui-ci capte une certaine variabilité de l'équité non expliquée par le modèle. Le modèle de Merton, avec ou sans erreur, réussit bien à estimer une dérive plus faible et un coefficient de diffusion plus élevé

pour l'échantillon de défaut. Pour les deux sous-échantillons, la volatilité moyenne du terme d'erreur relativement à l'équité est très faible (0.05 et 0.02), ce qui suggère que le modèle de Merton permet de bien répliquer la valeur de l'équité.

Finalement, le modèle de Merton estime des probabilités de défaut annuelles très similaires avec ou sans erreur. Cela laisse croire que peu importe la méthode choisie pour estimer les paramètres (avec ou sans erreur), ceux-ci s'ajustent afin de refléter les probabilités de défaut adéquates. La probabilité de défaut moyenne estimée pour l'échantillon de défaut (avec ou sans erreur) est de 53 %. Ces probabilités de défaut sont beaucoup plus élevées que celles pour l'échantillon sans défaut (12 % sans erreur et 11 % avec erreur), ce qui est logique. Bref, ce premier coup d'œil sur les résultats porte à croire que le modèle de Merton avec erreur est plus adéquat que celui sans erreur étant donné qu'il ne change pas les probabilités de défaut, mais permet d'obtenir une dérive négative pour l'échantillon de défaut. Toutefois, le terme d'erreur ne semble pas mieux évaluer les valeurs d'équité, puisque sa faible volatilité moyenne relative à l'équité sous-entend que le terme d'erreur est en moyenne peu élevé.

Le modèle de Brockman & Turtle (B&T) avec et sans erreur offre des résultats assez différents. Premièrement, le modèle <u>sans erreur</u> réussit à estimer une dérive négative (-0.07) pour l'échantillon de défaut. Le modèle avec erreur estime néanmoins une dérive encore plus petite de -0.12. En outre, la volatilité moyenne du terme d'erreur relativement à l'équité est beaucoup plus grande pour les deux échantillons soit 43 pour les défauts et 4 pour les non-défauts. Le modèle de B&T aurait alors peut-être davantage de difficulté à répliquer les valeurs d'équité que le modèle de Merton et ce, de façon encore plus prononcée lorsque les rendements deviennent volatiles, comme lors de détresse financière. Encore une fois, pour les deux échantillons, la dérive moyenne et le coefficient de diffusion moyen sont plus faibles lorsqu'un terme d'erreur est introduit. Aussi, le modèle de B&T, avec ou sans erreur, réussit bien à estimer une dérive plus faible et un coefficient de diffusion plus élevé pour l'échantillon de défaut. Quant à la barrière au défaut (relativement aux actifs), celle-ci varie en moyenne entre 0.31 et 0.47 (avec ou sans erreur, défaut ou

sans défaut). La barrière au défaut serait donc moins que la moitié de la valeur des actifs. Les actifs d'une firme pourraient alors diminuer de plus de 50 % avant de déclencher un défaut.

Finalement, le modèle de B&T estime pour les deux échantillons des probabilités de défaut plus élevées que le modèle de Merton (avec ou sans erreur). De plus, les probabilités de défaut calculées sont différentes lorsqu'un terme d'erreur est introduit. Sans terme d'erreur, la probabilité de défaut moyenne pour les firmes ayant fait défaut est de 67 % et pour les non-défauts, 38 %. Alors qu'avec un terme d'erreur, les probabilités de défaut sont respectivement 51 % et 30 %. Il est donc difficile de juger à l'aide de ces quelques informations si un terme d'erreur améliore réellement le modèle de B&T. La probabilité de défaut des firmes qui ont effectivement fait défaut dans l'année est certes plus élevée sans erreur, mais la probabilité de défaut des firmes qui n'ont pas fait défaut est plus élevée sans erreur, ce qui est contre-intuitif.

7.1.1 Modèle de Merton sans erreur

7.1.1.1 Dérive (mu)

Les paramètres de dérive estimés sont beaucoup plus faibles que ceux de Dionne, Laajimi, Mejri & Petrescu (2008), qui trouvaient un mu moyen pour la population totale (défauts & non-défauts) de 0.66. Cela est probablement lié à un traitement différent des valeurs extrêmes (mu > 3).

Tableau 5 – Statistiques descriptives sur la dérive (μ)

Statistiques	Défaut	Sans défaut
Moyenne	0.15	0.32
Médiane	0.05	0.19
Minimum	-1.12	-1.71
Maximum	2.56	3
Écart-type	0.74	0.60

Figure 3

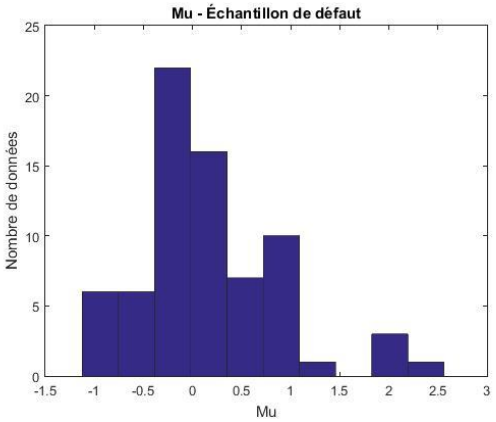
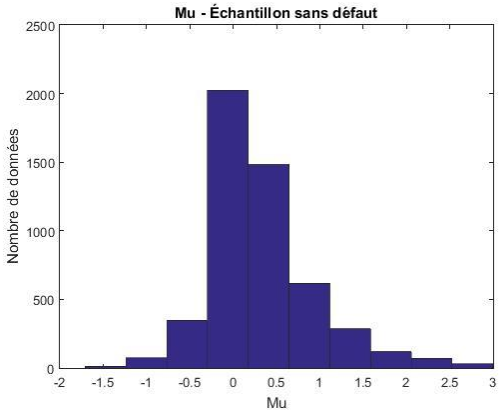


Figure 4



Il est intéressant d'analyser la dérive des actifs pour chaque année. Comme illustré dans le tableau 6 ci-dessous, pour la majorité des années (à l'exception de 5 années), la dérive de l'échantillon de défaut est plus faible que celle de l'échantillon sans défaut. En 1990 et 2000, la dérive moyenne plus élevée pour les défauts peut être expliquée par la forte volatilité des rendements de ces firmes en détresse accentuée par les crises financières. Notons aussi la dérive moyenne négative de -0.01 pour les firmes n'ayant pas fait défaut lors de la crise des années 90. Finalement, en 1995, la dérive moyenne pour l'échantillon de défaut est de 0.98, ce qui est anormalement élevé. Pour cette année, il n'y a que deux firmes ayant fait défaut. L'une de celles-ci exhibe une dérive de -0.09 alors que l'autre, une dérive de 2.05.

Tableau 6 – Dérive (μ) moyenne par année

Année	Mu	
	Échantillon de défaut	Échantillon sans défaut
1988	-0.20	0.06
1989	-0.08	0.20
1990	0.30	-0.01
1991	-0.13	0.22
1992	0.70	0.29
1993	0.19	0.61
1994	0.01	0.17
1995	0.98	0.33
1996	-1.03	0.40
1997	0.07	0.27

1998	0.19	0.20
1999	0.18	0.43
2000	0.47	0.36
2001	0.01	0.25
2002	0.43	0.34
2003	0.05	0.52
2004	-	0.23

7.1.1.2 Coefficient de diffusion (sigma)

Le coefficient de diffusion des actifs de la population totale est également en deçà de celui estimé par Dionne, Laajimi, Mejri & Petrescu (0.81). Cela peut être une fois de plus relié au retrait des valeurs extrêmes étant donné que dans la plupart des cas, les firmes ayant un mu supérieur à 3 avaient des rendements extrêmement volatiles.

Tableau 7 – Statistiques descriptives sur le coefficient de diffusion (σ)

Statistiques	Défaut	Sans défaut
Moyenne	0.88	0.59
Médiane	0.79	0.49
Minimum	0.07	0.01
Maximum	3.38	2.88
Écart-type	0.58	0.40

Figure 5

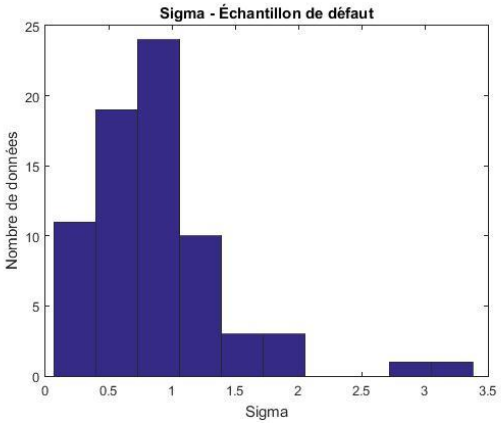
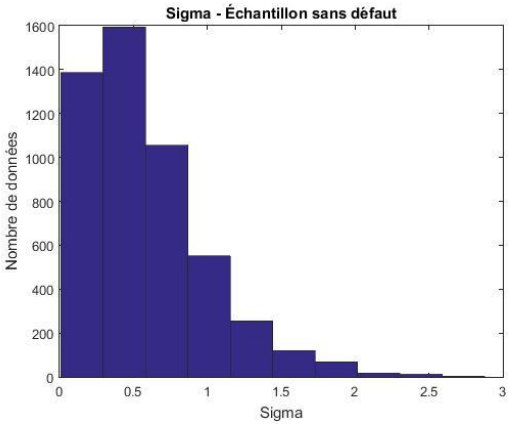


Figure 6



7.1.1.3 Probabilité de défaut

Les probabilités de défaut sont très semblables à celles de Dionne, Laajimi, Mejri & Petrescu (2008), qui avaient une probabilité de défaut moyenne pour toute la population de 13 %. Pour l'échantillon sans défaut, bien que la moyenne soit de 12 %, la médiane est quant à elle de 0.2 %. Alors que pour l'échantillon de défaut, la moyenne est de 0.53 et la médiane de 0.63. La figure 7 ci-dessous illustre que le modèle de Merton estime des probabilités de défaut inférieures à 10 % pour 17 firmes qui ont véritablement fait défaut. Il y a deux explications possibles. La première est que les rendements sont tellement volatiles, que la dérive estimée est biaisée à la hausse. Cela est justement le cas d'une firme ayant une probabilité de défaut de 0.03 %. Bien que son coefficient de diffusion soit très élevé (1.04), indiquant un grand risque, sa dérive égale à 2.56 vient fausser la probabilité de défaut. La deuxième explication possible est une valeur implicite des actifs fortement supérieure à celle de la dette aux livres. Prenons l'exemple d'une firme ayant fait défaut, mais affichant une probabilité de défaut de 0.11 %. Bien que sa dérive soit de -1.08 et son coefficient de diffusion de 0.91, indiquant un drapeau rouge, les actifs de 2.1 milliards sont tellement supérieurs à la dette totale de 29.5 millions que la probabilité de défaut est presque nulle.

Tableau 8 – Statistiques descriptives sur la probabilité de défaut

Statistiques	Défaut	Sans défaut
Moyenne	0.53	0.12
Médiane	0.63	0.002
Minimum	8e-85	0
Maximum	1	1
Écart-type	0.36	0.23

Figure 7

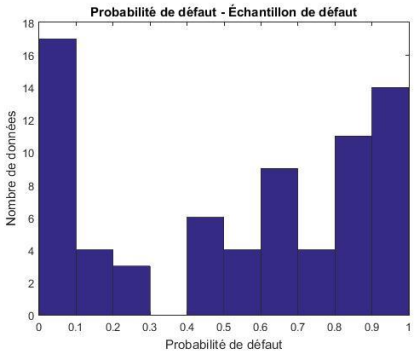
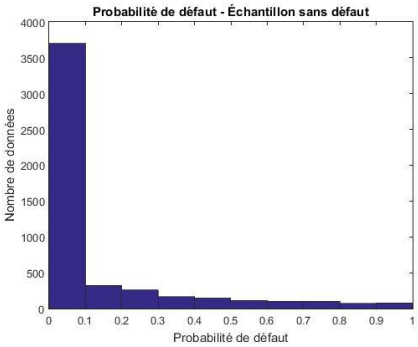


Figure 8



Pour chaque année, la probabilité de défaut moyenne des firmes ayant fait défaut est supérieure à celle des firmes n'ayant pas fait défaut. Notons aussi que les deux plus hautes probabilités de défaut pour les non-défauts apparaissent dans les deux récessions de 1990 et 2000 (voir tableau 9 ci-dessous). De plus, ces résultats par année sont très similaires à ceux obtenus par Dionne, Laajimi, Mejri & Petrescu (2008).

Tableau 9 – Probabilité de défaut moyenne par année

Année	Probabilité de défaut	
	Échantillon de défaut	Échantillon sans défaut
1988	0.62	0.10
1989	0.64	0.11
1990	0.64	0.23
1991	0.57	0.14
1992	0.41	0.14
1993	0.77	0.05
1994	0.48	0.08
1995	0.68	0.07
1996	0.44	0.06
1997	0.53	0.11
1998	0.47	0.17
1999	0.62	0.13
2000	0.62	0.19
2001	0.57	0.15
2002	0.42	0.14
2003	0.34	0.07
2004	-	0.08

7.1.2 Modèle de Merton avec erreur

7.1.2.1 Dérive (mu)

Tableau 10 – Statistiques descriptives sur la dérive (μ)

Statistiques	Défaut	Sans défaut
Moyenne	-0.19	0.19
Médiane	-0.13	0.11
Minimum	-1.94	-2.27
Maximum	2.13	2.82
Écart-type	0.67	0.56

Figure 9

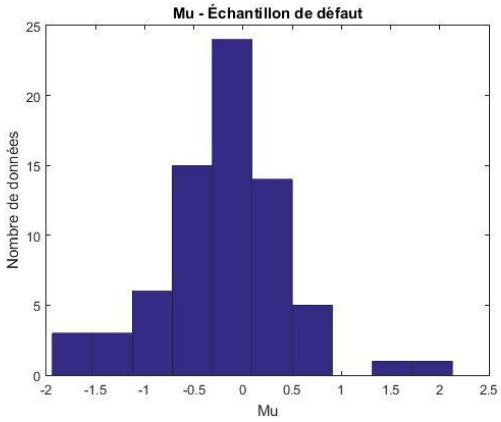
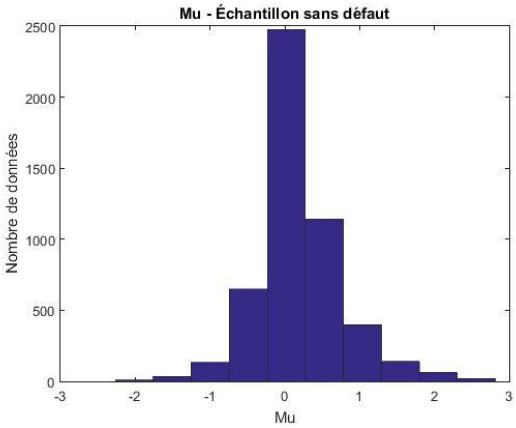


Figure 10



Pour presque chaque année, la dérive moyenne est plus petite pour les défauts que pour les non-défauts (à l'exception de deux années, ce qui est moins fréquent que pour le modèle sans erreur). Aussi, la dérive est presque toujours négative, alors que dans le cas sans erreur, elle était presque toujours positive. La dérive lors de la crise de 1990 reste la plus petite pour les firmes n'ayant pas fait défaut.

Tableau 11 – Dérive (μ) moyenne par année

Année	Mu	
	Échantillon de défaut	Échantillon sans défaut
1988	-0.41	-0.02
1989	-0.26	0.12
1990	-0.38	-0.13
1991	-0.39	0.09
1992	-0.70	0.12
1993	-0.05	0.50
1994	-0.09	0.07
1995	-0.85	0.24
1996	-1.58	0.31
1997	-0.10	0.15
1998	0.13	0.01
1999	-0.48	0.28
2000	0.05	0.17
2001	-0.24	0.11
2002	0.30	0.19
2003	-0.04	0.41
2004	-	0.14

7.1.2.2 Coefficient de diffusion (sigma)

Tableau 12 – Statistiques descriptives sur le coefficient de diffusion (σ)

Statistiques	Défaut	Sans défaut
Moyenne	0.64	0.47
Médiane	0.53	0.39
Minimum	0.06	5e-4
Maximum	2.17	2.41
Écart-type	0.40	0.31

Figure 11

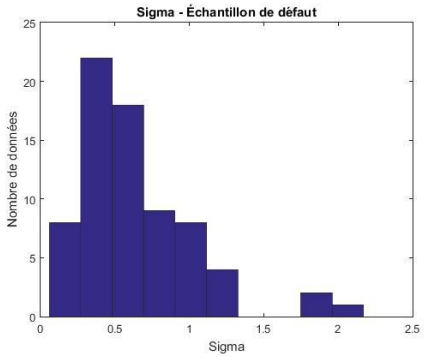
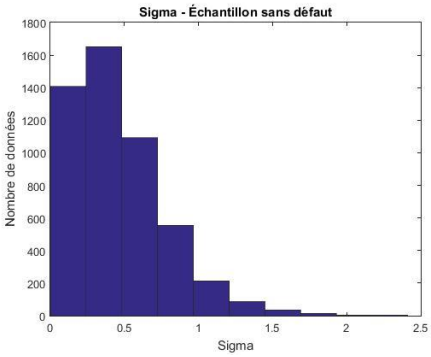


Figure 12



7.1.2.3 Terme d'erreur (sigma)

Tableau 13 – Statistiques descriptives sur l'écart-type du terme d'erreur relatif à l'équité (σ_{ϑ}/E)

Statistiques	Défaut	Sans défaut
Moyenne	0.05	0.02
Médiane	0.02	0.01
Minimum	9e-13	1e-14
Maximum	0.34	0.29
Écart-type	0.07	0.03

Figure 13

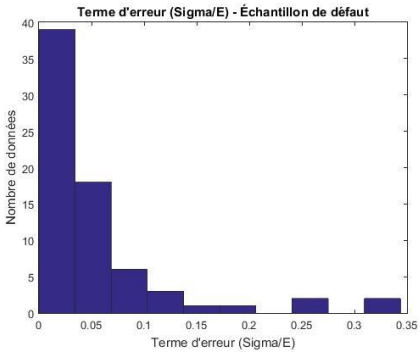
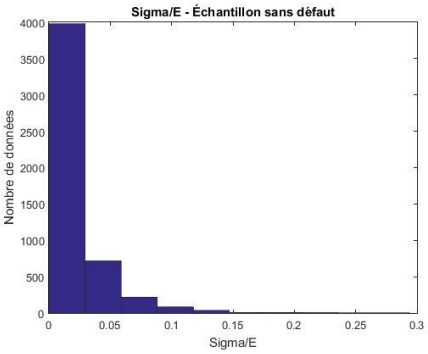


Figure 14



7.1.2.4 Probabilité de défaut

Le même phénomène de probabilités de défaut inférieures à 10 % pour certaines firmes ayant fait défaut survient pour le modèle incluant le terme d'erreur. Cependant, cette fois-ci, il s'agit de 20 firmes. Les mêmes explications potentielles que celles mentionnées à la section 7.1.1.3 dans le cadre du modèle sans erreur s'appliquent. En outre, bien que ces firmes aient effectivement fait défaut, cet évènement peut être survenu jusqu'à 12 mois après l'estimation de la probabilité de défaut.

Tableau 14 – Statistiques descriptives sur la probabilité de défaut

Statistiques – PD	Défaut	Sans défaut
Moyenne	0.53	0.11
Médiane	0.66	1e-4
Minimum	2e-125	0
Maximum	1	1
Écart-type	0.40	0.24

Figure 15

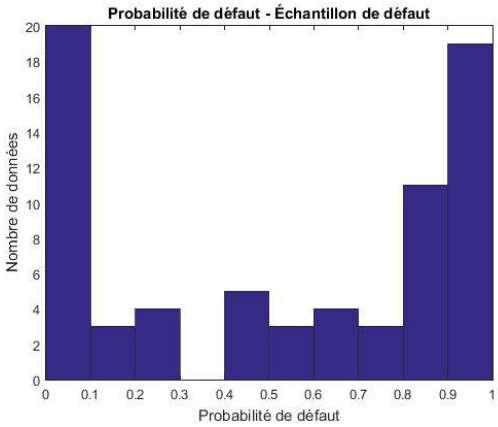
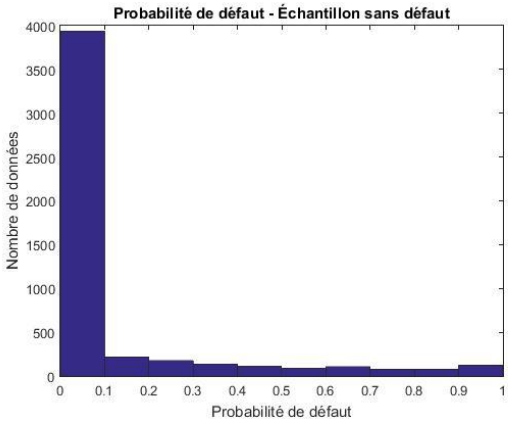


Figure 16



Une fois de plus, chaque année, les probabilités de défaut des firmes ayant fait défaut sont supérieures à celle n'ayant pas fait défaut. Aussi, les 2 années affichant les plus hautes probabilités de défaut pour les non-défauts sont toujours 1990 et 2000. En général, les probabilités de défaut moyennes annuelles sont très similaires à celle du modèle sans erreur. Les résultats des modèles avec et sans erreur sont donc cohérents.

Tableau 15 – Probabilité de défaut moyenne par année

Année	Probabilité de défaut	
	Échantillon de défaut	Échantillon sans défaut
1988	0.77	0.13
1989	0.58	0.11
1990	0.64	0.23
1991	0.57	0.12
1992	0.26	0.13
1993	0.74	0.04
1994	0.49	0.08
1995	0.86	0.06
1996	0.49	0.05
1997	0.42	0.10
1998	0.48	0.16
1999	0.94	0.11
2000	0.60	0.18
2001	0.56	0.14
2002	0.41	0.13
2003	0.28	0.07
2004	-	0.07

7.1.3 Modèle avec barrière sans erreur

7.1.3.1 Dérive (mu)

Les paramètres de dérive estimés sont très semblables à ceux de Dionne, Laajimi, Mejri & Petrescu (2008), qui trouvaient un mu moyen pour la population totale de 0.22 en appliquant le modèle de Wong & Choi (2009).

Tableau 16 – Statistiques descriptives sur la dérive (μ)

Statistiques - μ_A	**Défaut**	**Sans défaut**
Moyenne	-0.07	0.23
Médiane	-0.03	0.10
Minimum	-2.25	-1.69
Maximum	1.13	2.94
Écart-type	0.55	0.53

Figure 17

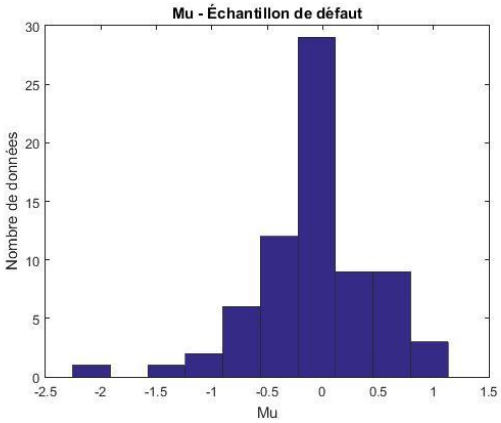
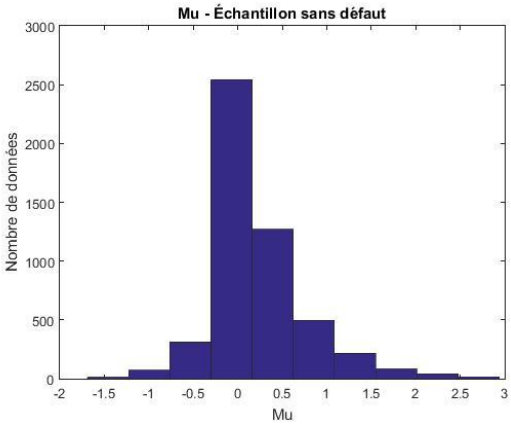


Figure 18



Similairement aux résultats du modèle de Merton (avec ou sans erreur), les dérives moyennes annuelles pour l'échantillon de défaut sont presque toujours inférieures à celles de l'échantillon de non-défaut (sauf 2 exceptions). De plus, on retrouve toujours la plus petite dérive des firmes n'ayant pas fait défaut lors de la récession de 1990.

Tableau 17 – Dérive (μ) moyenne par année

Année	Mu	
	Échantillon de défaut	Échantillon sans défaut
1988	-0.30	-0.004
1989	-0.30	0.15
1990	-0.29	-0.07
1991	-0.14	0.16
1992	-0.06	0.20
1993	0.22	0.49
1994	0.09	0.08
1995	0.25	0.25
1996	-1.06	0.31
1997	-0.16	0.21
1998	0.20	0.06
1999	0.02	0.34
2000	0.13	0.21
2001	-0.16	0.16
2002	0.14	0.23
2003	-0.18	0.48
2004	-	0.17

7.1.3.2 Coefficient de diffusion (sigma)

Le coefficient de diffusion moyen de la population totale est également très semblable à celui trouvé par Dionne, Laajimi, Mejri & Petrescu (2008), soit de 0.53 autant pour le modèle de Wong & Choi (2009) que celui de Duan, Gauthier & Simonato (2004).

Tableau 18 – Statistiques descriptives sur le coefficient de diffusion (σ)

Statistiques	Défaut	Sans défaut
Moyenne	0.71	0.50
Médiane	0.61	0.38
Minimum	0.02	0.01
Maximum	2.20	2.94
Écart-type	0.55	0.42

Figure 19

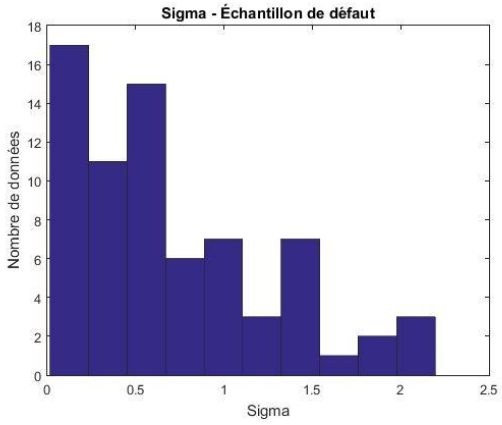
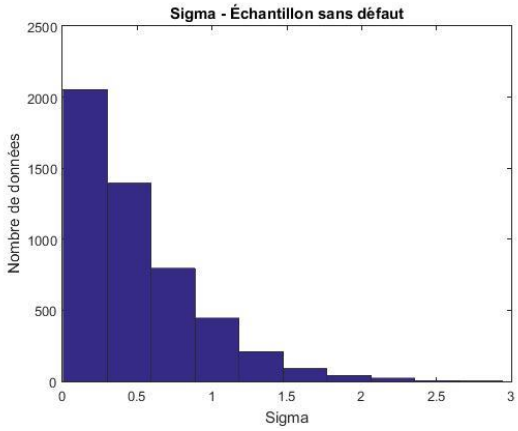


Figure 20



7.1.3.3 Barrière au défaut (H)

La barrière au défaut estimée proportionnellement à la valeur totale des actifs au marché est en moyenne légèrement supérieure aux résultats trouvés par Dionne, Laajimi, Mejri & Petrescu (2008). Ceux-ci trouvaient pour le modèle de Wong & Choi (2009) une barrière relative de 0.29 et pour le modèle de Duan, Gauthier & Simonato (2004), 0.30. Quant à eux, Brockman & Turtle (2003) présentent une barrière au défaut moyenne de 0.69, avec un écart-type de 0.23. Il est à noter que cet article utilise un échantillon différent, soit les firmes industrielles sur le NYSE, l'AMEX et le Nasdaq pour les années 1989 à 1998. Il est tout de même réconfortant de constater que mes résultats se situent entre ceux de Dionne, Laajimi, Mejri & Petrescu (2008) et ceux de Brockman & Turtle (2003). Finalement, la

barrière au défaut moyenne des firmes ayant fait défaut est supérieure à celle des autres firmes, ce qui est intuitif.

Tableau 19 – Statistiques descriptives sur la barrière relative aux actifs (H/A)

Statistiques	Défaut	Sans défaut
Moyenne	0.47	0.37
Médiane	0.49	0.33
Minimum	9e-12	1e-14
Maximum	1.00	1.00
Écart-type	0.37	0.33

Figure 21

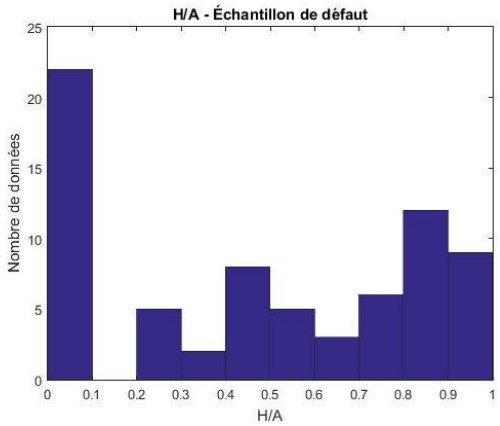
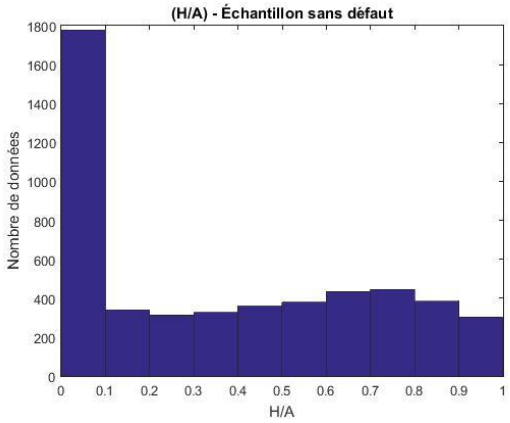


Figure 22



7.1.3.4 Probabilité de défaut

Les probabilités de défaut trouvées sont de façon importante supérieures en moyenne à celles de Dionne, Laajimi, Mejri & Petrescu (2008). Ceux-ci ont calculé, pour la population totale, une probabilité moyenne de 11 % selon le modèle de Wong & Choi (2009) et de 14 % selon celui de Duan, Gauthier & Simonato (2004). Cela peut être en partie expliqué par le fait que le modèle avec barrière au défaut de B&T est légèrement différent des deux autres mentionnés ci-dessus. Effectivement, Wong & Choi (2009) et Duan, Gauthier & Simonato (2004) proposent une amélioration du modèle de B&T en estimant la probabilité de défaut conditionnelle à la survie dans le passé. De plus, bien que la probabilité de défaut moyenne des non-défauts se situe à 38 %, sa médiane est beaucoup plus basse à 12 %. Pour les défauts, c'est plutôt le contraire. La moyenne se situe à 67 % alors que la médiane à

96 %. Donc la moitié des probabilités de défaut sont très proches du 100 %, ce qui est excellent étant donné que ces firmes ont effectivement été en détresse financière au courant de l'année.

Comme illustré par la figure 23 ci-dessous, certaines firmes ayant fait défaut se retrouvent une fois de plus avec une probabilité de défaut inférieure à 10 %. Bien que pour l'échantillon de défaut, 21 firmes se retrouvent avec des probabilités de défaut en deçà de 10 %, le modèle de B&T estime des probabilités de défaut supérieures à 90 % dans plus de la moitié des cas (pour environ 41 firmes). Alors que moins du tiers des firmes ayant fait défaut était associé à des probabilités supérieures à 90 % pour le modèle de Merton (avec ou sans erreur). Cela peut donc être perçu comme une amélioration de la capacité prédictive des défauts. Cette interprétation doit néanmoins être contrebalancée par l'augmentation de la proportion de probabilités supérieures à 90 % également pour les non-défauts, ce qui est non souhaitable. Bref, le modèle avec barrière semble estimer en moyenne des probabilités de défaut plus élevées pour toutes les firmes. Ce qui n'est pas surprenant lorsqu'on se rappelle que le modèle de B&T estimait des dérives en général plus faibles que le modèle de Merton (voir section 7.1). Cependant, le modèle avec barrière estimait aussi des coefficients de diffusion des actifs, une mesure de risque, en général plus faibles que le modèle de Merton, ce qui vient nuancer l'explication.

Tableau 20 – Statistiques descriptives sur la probabilité de défaut

Statistiques	Défaut	Sans défaut
Moyenne	0.67	0.38
Médiane	0.96	0.12
Minimum	3e-24	0
Maximum	1	1
Écart-type	0.43	0.42

Figure 23

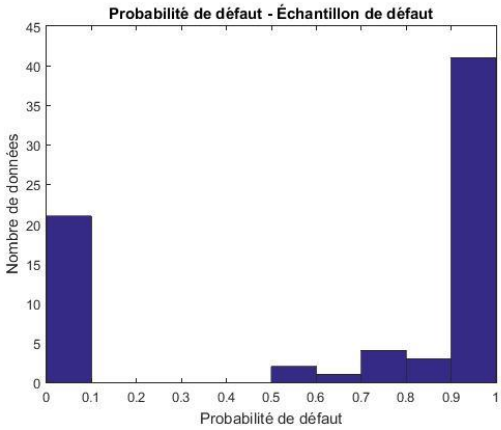
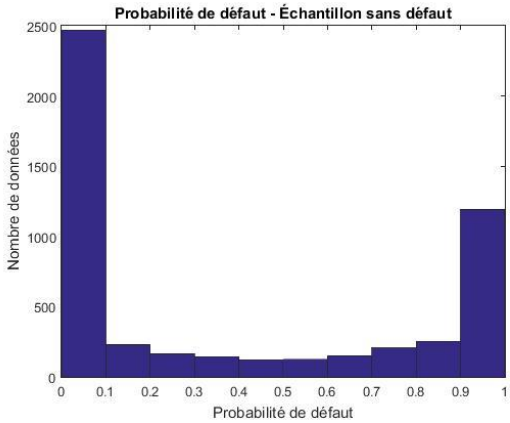


Figure 24



Encore une fois, les probabilités de défauts moyennes annuelles de l'échantillon de défaut sont généralement supérieures à celles sans défaut (à l'exception de 2 cas). Comme avec le modèle de Merton, les probabilités de défaut pour les firmes n'ayant pas fait défaut sont plus élevées lors des deux crises de 1990 et 2000. Finalement, en 1999, la probabilité de défaut moyenne est basse à 3 % pour l'échantillon de défaut. Seulement deux firmes ont fait défaut en 1999 dans notre échantillon et le modèle a estimé des barrières de défaut très faibles pour chacune d'elle, soit 191,000 $ et 97,000 $. Toutefois, ces firmes ont des actifs totaux relativement élevés (respectivement 38.6 millions et 18.5 millions, ce qui explique les plus faibles probabilités de défaut prédites.

Tableau 21 – Probabilité de défaut moyenne par année

Année	Probabilité de défaut	
	Échantillon de défaut	Échantillon sans défaut
1988	0.68	0.38
1989	0.99	0.30
1990	0.91	0.55
1991	0.67	0.36
1992	0.99	0.36
1993	0.44	0.13
1994	0.75	0.41
1995	0.52	0.30
1996	0.90	0.23
1997	0.76	0.43
1998	0.50	0.62
1999	0.03	0.37

2000	0.50	0.44
2001	0.73	0.44
2002	0.56	0.42
2003	0.58	0.18
2004	-	0.31

7.1.4 Modèle avec barrière avec erreur

7.1.4.1 Dérive (mu)

En introduisant le terme d'erreur, les paramètres de dérive se rapprochent très fortement à ceux de Dionne, Laajimi, Mejri & Petrescu (2008), qui trouvaient un mu moyen pour la population totale de 0.22 en appliquant le modèle de Wong & Choi (2009) et de 0.15 pour le modèle de Duan, Gauthier & Simonato (2004).

Tableau 22 – Statistiques descriptives sur la dérive (μ)

Statistiques	Défaut	Sans défaut
Moyenne	-0.12	0.19
Médiane	-0.06	0.08
Minimum	-2.33	-1.90
Maximum	2.11	3
Écart-type	0.74	0.57

Figure 25

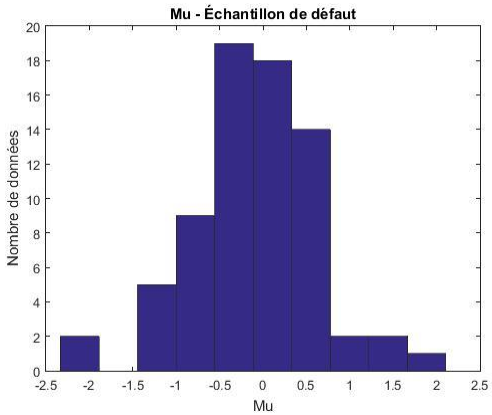
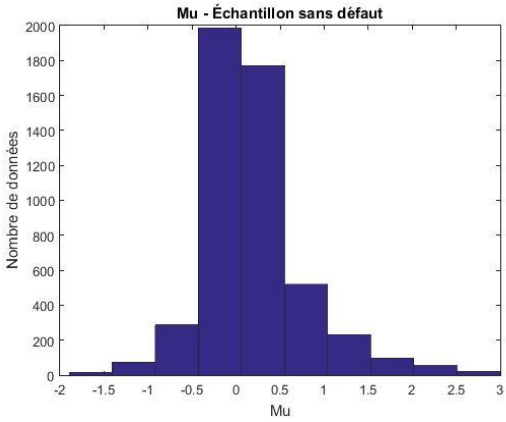


Figure 26



Comme dans le cas sans erreur, les dérives moyennes annuelles pour l'échantillon de défaut sont presque toujours inférieures à celles de l'échantillon de non-défaut (sauf 3 exceptions). De plus, on retrouve toujours la plus petite dérive des firmes n'ayant pas fait défaut lors de la récession de 1990. La dérive moyenne des défauts en 1993 est anormalement élevée à

0.79. Seulement deux firmes ont fait défaut en 1993, dont une qui exhibe des rendements très volatiles (coefficient de diffusion des actifs de 1.82), ce qui peut expliquer sa dérive estimée à 1.39. Comme mentionné plus haut pour le modèle de Merton, il est très difficile de correctement évaluer la dérive des actifs d'une firme, particulièrement lorsque ces actifs sont très volatiles.

Tableau 23 – Dérive (μ) moyenne par année

Année	Mu	
	Échantillon de défaut	Échantillon sans défaut
1988	-0.48	-0.06
1989	-0.59	0.11
1990	-0.31	-0.12
1991	-0.35	0.14
1992	-0.22	0.14
1993	0.79	0.49
1994	0.01	0.05
1995	0.02	0.22
1996	-1.01	0.27
1997	-0.25	0.15
1998	0.32	0.01
1999	-0.16	0.30
2000	0.14	0.12
2001	-0.31	0.13
2002	0.10	0.23
2003	-0.01	0.48
2004	-	0.12

7.1.4.2 Coefficient de diffusion (sigma)

En introduisant le terme d'erreur à la formule d'équité, le coefficient de diffusion moyen de la population totale se retrouve légèrement inférieur à celui trouvé par Dionne, Laajimi, Mejri & Petrescu (2008), soit de 0.53. Le terme d'erreur semble donc capter une partie de l'incertitude entourant le modèle.

Tableau 24 – Statistiques descriptives sur le coefficient de diffusion (σ)

Statistiques	Défaut	Sans défaut
Moyenne	0.69	0.44
Médiane	0.60	0.35
Minimum	0.01	3e-4
Maximum	2.24	2.51
Écart-type	0.49	0.35

Figure 27

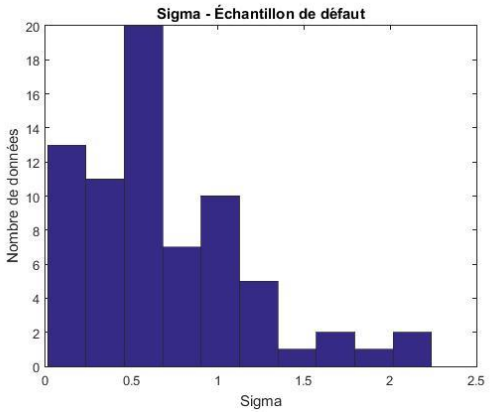
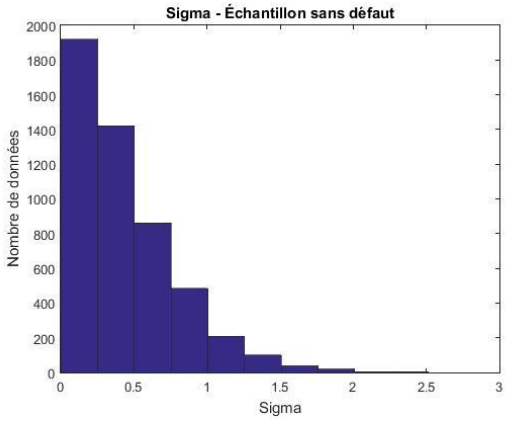


Figure 28



7.1.4.3 Barrière au défaut (H)

En introduisant le terme d'erreur, la barrière au défaut représente en moyenne légèrement moins que le tiers de la valeur totale des actifs au marché. Effectivement, les barrières au défaut moyennes des deux sous-échantillons deviennent presque égales (0.32 et 0.31).

Tableau 25 – Statistiques descriptives sur la barrière relative aux actifs (H/A)

Statistiques	Défaut	Sans défaut
Moyenne	0.31	0.32
Médiane	0.14	0.21
Minimum	10e-12	1e-14
Maximum	1.00	1.00
Écart-type	0.35	0.33

Figure 29

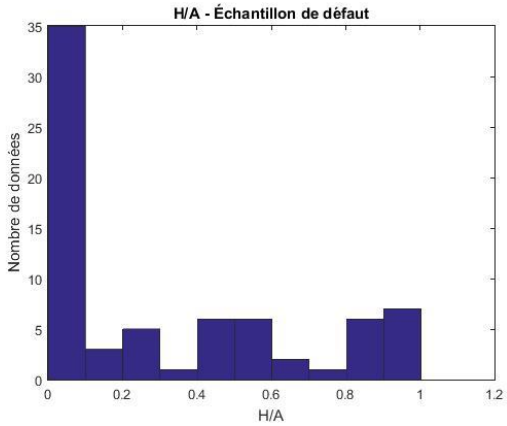
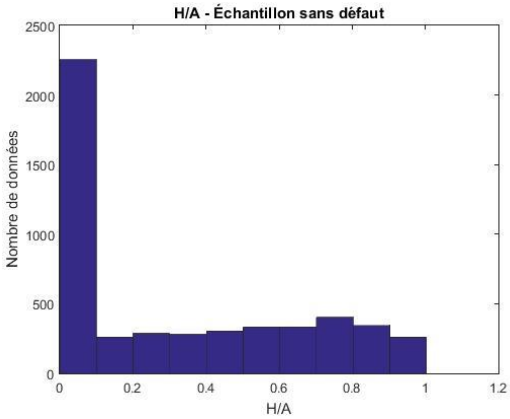


Figure 30



7.1.4.4 Terme d'erreur (sigma)

En observant les moyennes plus grandes que 1, il est tentant de conclure que pour le modèle avec barrière, le terme d'erreur relativement à l'équité est très important, et ce, encore plus pour l'échantillon de défaut. Toutefois, en approfondissant légèrement l'analyse, on remarque que les médianes sont beaucoup plus basses (0.08 pour l'échantillon de défaut et 0.01 pour l'échantillon sans défaut). Ces médianes se rapprochent des résultats du modèle de Merton qui avait un écart-type du terme d'erreur relatif à l'équité de 0.05 pour les défauts et de 0.02 pour les non-défauts. Cette conclusion est appuyée par les deux figures 31 et 32 illustrant les données éloignées.

Tableau 26 – Statistiques descriptives sur l'écart-type du terme d'erreur relatif à l'équité (σ_ϑ/E)

Statistiques	Défaut	Sans défaut
Moyenne	43	4
Médiane	0.08	0.01
Minimum	5e-14	2e-14
Maximum	2,946	10,272
Écart-type	347	152

Figure 31

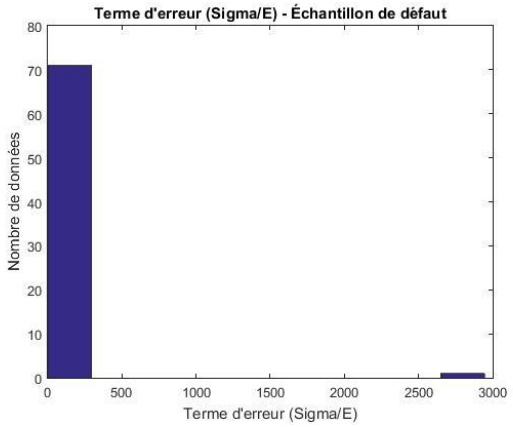
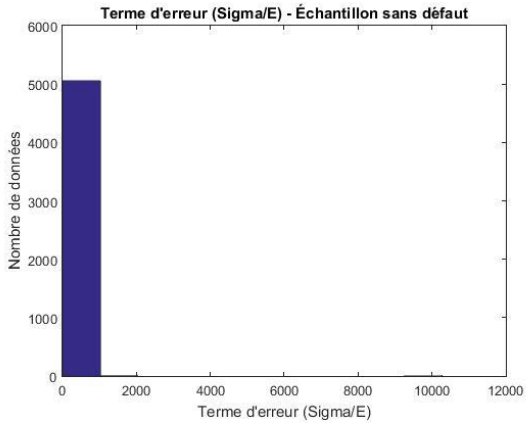


Figure 32



7.1.4.5 Probabilité de défaut

Comme pour le modèle de Merton, l'introduction du terme d'erreur vient augmenter le nombre de firmes ayant fait défaut pour lesquelles une probabilité de défaut inférieure à 10 % est estimée (voir figure 33 ci-dessous). En effet, 25 firmes ayant fait défaut sont

associées à une probabilité de défaut inférieure à 10 %, versus 21 firmes pour le modèle de B&T sans erreur. Aussi, seulement 28 firmes ayant fait défaut ont des probabilités de défaut supérieures à 90 %, alors que le modèle de B&T sans erreur en comptait 40. Il est intéressant de noter que bien que la probabilité de défaut moyenne des firmes n'ayant pas fait défaut soit à 30 %, la médiane se situe à 2 %. Donc la moitié des probabilités de défaut sont très proches d'être nulles, ce qui est excellent étant donné que ces firmes n'ont effectivement pas été en détresse financière au courant de l'année.

Tableau 27 – Statistiques descriptives sur la probabilité de défaut

Statistiques	Défaut	Sans défaut
Moyenne	0.51	0.30
Médiane	0.50	0.02
Minimum	1e-39	0
Maximum	1	1
Écart-type	0.44	0.40

Figure 33

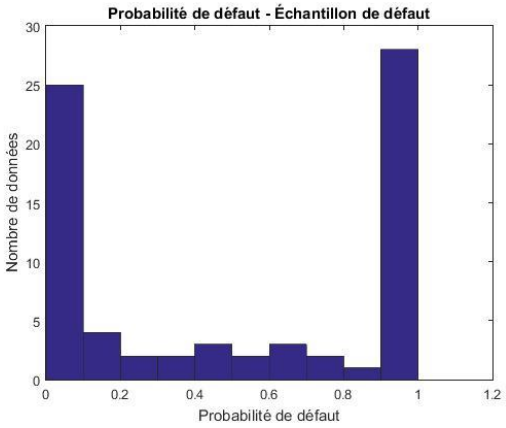
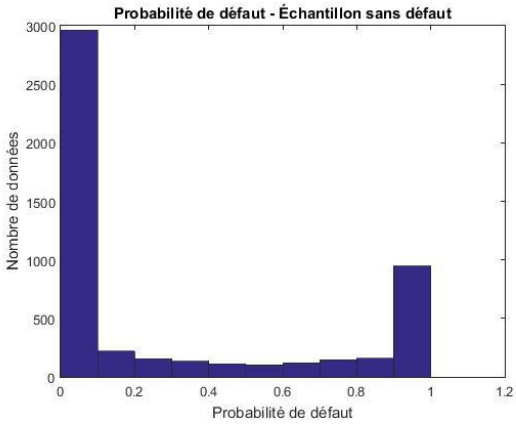


Figure 34



Les probabilités de défauts moyennes annuelles de l'échantillon de défaut sont bel et bien généralement supérieures à celui sans défaut (à l'exception de 3 cas) et la probabilité de défaut pour les firmes n'ayant pas fait défaut est effectivement plus élevée lors de la crise de 1990. Finalement, en 1999, la probabilité de défaut moyenne se situe à 10 % pour l'échantillon de défaut. Un résultat semblable avait été soulevé pour le modèle sans erreur (voir section 7.1.3.4), les mêmes explications sont alors possibles.

Tableau 28 – Probabilité de défaut moyenne par année

Année	Probabilité de défaut	
	Échantillon de défaut	Échantillon sans défaut
1988	0.70	0.34
1989	0.89	0.26
1990	0.59	0.49
1991	0.52	0.25
1992	0.82	0.28
1993	0.28	0.08
1994	0.74	0.36
1995	0.62	0.24
1996	0.82	0.18
1997	0.45	0.36
1998	0.21	0.50
1999	0.10	0.26
2000	0.33	0.31
2001	0.61	0.35
2002	0.32	0.33
2003	0.54	0.13
2004	-	0.27

7.2 Performance statistique des modèles

Dans la section qui suit, des tests et des outils de diagnostic statistiques seront performés dans le but de déterminer si l'introduction d'un terme d'erreur aux modèles d'équité améliore ou non leur performance de prédiction des défauts et si l'ajout du paramètre de barrière au défaut dans le modèle de Brockman & Turtle amène ce modèle à surperformer celui de Merton.

Tout d'abord, pour déterminer si le terme d'erreur incorpore de l'information utile pour prédire la probabilité de défaut, quatre modèles probit ont été estimés. La variable dépendante de ces quatre régressions est égale à 1 si la firme fait partie de l'échantillon de défaut et 0 autrement. Dans le modèle *Merton avec erreur (PD)*, l'évènement de défaut est uniquement prédit par la probabilité de défaut estimée par le modèle de Merton avec terme d'erreur. Quant au modèle *Merton avec erreur (Sigma)*, l'évènement de défaut dépend maintenant de la probabilité de défaut estimée par le modèle de Merton avec terme d'erreur

et de l'écart-type du terme d'erreur relatif à l'équité (σ_ϑ/E). Ces mêmes régressions sont ensuite estimées pour le modèle de Brockman & Turtle (2003). Les variables explicatives sont alors la probabilité de défaut estimée par le modèle de B&T avec terme d'erreur (pour le modèle *Barrière avec erreur (PD)*) et l'écart-type du terme d'erreur relatif à l'équité (pour le modèle *Barrière avec erreur (Sigma)*).

Tableau 29 – Résultats de la régression probit des modèles de défaut avec erreur

Variable	Merton avec erreur (PD) (1)	Merton avec erreur (Sigma) (2)	Barrière avec erreur (PD) (3)	Barrière avec erreur (Sigma) (4)
Constante	-2.58***	-2.65***	-2.38***	-2.38***
	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
PD	1.49***	1.38***	0.46***	0.46***
	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
σ_ϑ/E		3.36***		5e-6
		(0.00)		(0.21)
-2LL	637.34	627.90	739.32	738.30
AIC	641.34	633.89	743.31	742.29
BIC	662.97	662.06	764.94	763.92
N	5,132	5,132	5,132	5,132

Notes : Les p-valeurs sont affichés en parenthèse en dessous des coefficients.
*, **, *** signifient que le coefficient est statistiquement significatif à un degré de confiance de 90 %, 95 % et 99 % respectivement.
AUC = Area Under Curve (ROC Curve), AIC = Akaike Information Criteria et BIC = Bayesian Information Criteria.

Le tableau 29 ci-dessus montre que la variable dépendante est corrélée positivement et significativement à la probabilité de défaut estimée pour les quatre modèles. Pour le modèle de Merton avec erreur, l'écart-type du terme d'erreur relatif à l'équité est également corrélé positivement et significativement à la probabilité de défaut estimée. Ainsi, dans le cadre du modèle de Merton, le terme d'erreur semble contenir de l'information pertinente pour prédire les défauts. Ce résultat est soutenu par les plus petites valeurs associées aux critères d'information AIC et BIC pour le modèle *Merton avec erreur (Sigma)* que pour le modèle *Merton avec erreur (PD)*. Quant au modèle de B&T avec erreur, le coefficient associé à l'écart-type du terme d'erreur relatif à l'équité n'est pas statistiquement significatif. Dans

le cadre du modèle de B&T, le terme d'erreur ne semble pas ajouter des informations pertinentes lors de la prévision des défauts.

Par la suite, deux tests de ratio de vraisemblance maximale comparant les deux modèles de Merton avec erreur et les deux modèles de B&T avec erreur ont été effectués.

$$-2(lnL_1 - lnL_2) = 9.44 > \chi^2_{(1)} = 3.84$$

$$-2(lnL_3 - lnL_4) = 1.02 < \chi^2_{(1)} = 3.84$$

La valeur critique d'une chi-carré avec un degré de liberté à un niveau de confiance de 95 % égale 3.84. Ainsi, le modèle *Merton avec erreur (PD)* est rejeté en faveur du modèle *Merton avec erreur (Sigma)*. Toutefois, le test de ratio de vraisemblance maximale pour le modèle de B&T avec erreur ne rejette pas l'hypothèse nulle que le modèle contraint *Barrière avec erreur (PD)* est adéquat. Ces deux résultats rejoignent ceux obtenus au paragraphe précédent. Par conséquent, les modèles *Merton avec erreur (Sigma)* et *Barrière avec erreur (PD)* sont ceux retenus pour poursuivre l'analyse.

Ensuite, deux autres régressions probit ont été estimées pour les modèles sans terme d'erreur. La variable dépendante est toujours égale à 1 si la firme fait partie de l'échantillon de défaut et 0 sinon. Le tableau 30 présente ces deux modèles sans terme d'erreur et répète ceux sélectionnés pour les modèles avec erreur.

Tableau 30 – Résultats de la régression probit des différents modèles de défaut

Variable	Merton sans erreur (1)	Merton avec erreur (2)	Barrière sans erreur (3)	Barrière avec erreur (4)
Constante	-2.64***	-2.65***	-2.51***	-2.38***
	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
PD	1.65***	1.38***	0.62***	0.46***
	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
σ_ϑ/E		3.36***		
		(0.00)		
-2LL	627.92	627.90	724.78	739.32
AIC	631.91	633.89	728.78	743.31
BIC	653.54	662.06	750.41	764.94
AUC	0.83	0.82	0.70	0.67
N	5,132	5,132	5,132	5,132

Notes : Les p-valeurs sont affichés en parenthèse en dessous des coefficients.

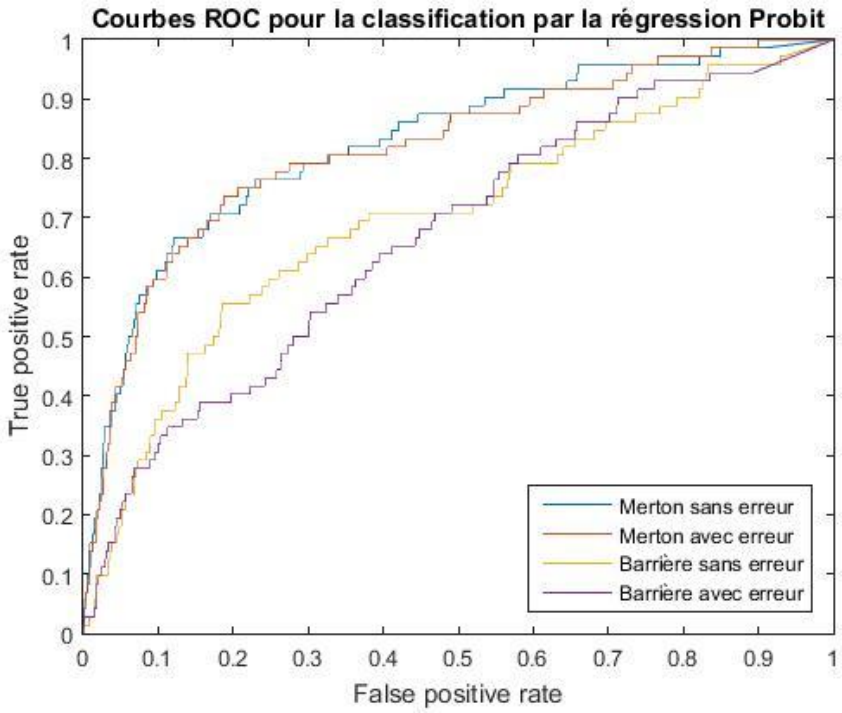
*, **, *** signifient que le coefficient est statistiquement significatif à un degré de confiance de 90 %, 95 % et 99 % respectivement.
AUC = Area Under Curve (ROC Curve) et AIC = Akaike Information Criteria.

Le tableau 30 ci-dessus montre que la variable dépendante est encore une fois corrélée positivement et significativement à la probabilité de défaut estimée pour les quatre modèles. Pour le modèle de Merton avec et sans erreur, le coefficient associé à la probabilité de défaut estimée est supérieur à 1, alors qu'il est inférieur à 1 pour le modèle de B&T avec et sans erreur. Ce résultat (pour le modèle de Merton et de B&T sans erreur) avait également été montré par Dionne, Laajimi, Mejri & Petrescu (2008). Le modèle permettant d'obtenir les plus petits AIC et BIC est celui de Merton sans erreur (631.91 et 653.54 respectivement). Le modèle de B&T sans erreur obtient un AIC et un BIC inférieurs à celui avec erreur. Ainsi, selon ces deux critères d'information, les modèles sans erreur surperforment ceux avec erreur et le modèle de Merton surperforme celui de B&T quant à la prédiction des défauts.

Troisièmement, la courbe ROC (Receiver Operating Characteristic) ainsi que l'aire sous cette courbe (AUC), deux autres outils statistiques mesurant la capacité à correctement prédire les défauts ont été analysés. La courbe ROC illustre le pourcentage de défauts bien classifiés par le modèle sur l'axe des ordonnées et le pourcentage de non-défauts mal classifiés par le modèle sur l'axe des abscisses. La courbe est en fait obtenue en faisant varier les probabilités de défaut critiques définissant si la firme est classifiée comme étant un défaut ou non. Ainsi, le modèle ayant la courbe la plus proche du coin haut gauche est le plus précis. Il s'agit d'un outil statistique mesurant l'erreur de type II. L'aire sous cette courbe (AUC) quantifie la performance du modèle. Un modèle avec un pouvoir prédictif parfait aurait un AUC de 1, alors qu'un modèle complètement naïf aurait un AUC de 0.5.

Comme illustré à la figure 35 ci-dessous, une fois de plus, le modèle de Merton ressort comme étant le plus performant. En n'observant seulement que les courbes, il est difficile de savoir lequel des deux modèles de Merton (avec ou sans erreur) surperforme l'autre. Selon l'AUC, c'est le modèle sans erreur qui est le plus performant avec une aire sous la courbe très légèrement supérieure (0.83 vs 0.82 avec erreur).

Figure 35



Une dernière analyse statistique, permettant cette fois-ci de mesurer les erreurs de type I et II, vient confirmer les conclusions nommées plus haut. Lorsque les performances des quatre modèles sont comparées contre le 9e décile des probabilités de défaut estimées (voir le tableau 31 ci-dessous), le modèle de Merton sans erreur est celui démontrant la meilleure performance de classification des défauts. En d'autres mots, le modèle de Merton sans erreur est associé à la plus petite erreur de type II avec 44.44% de « False Negative ». Il réussit à classifier un peu plus de la moitié des défauts correctement (55.56 %), ce qui reste tout de même très modeste comme résultat. Dionne, Laajimi, Mejri & Petrescu (2008) ont trouvé un résultat semblable avec une classification non erronée de 61.02 % des défauts. Ces résultats démontrant une capacité plus ou moins bonne des modèles structurels à prévoir les défauts reviennent très fréquemment dans la littérature (voir par exemple Bharath & Shumway (2004)). Dionne, Laajimi, Mejri & Petrescu (2008) ont d'ailleurs démontré que l'ajout de variables comptables et économiques dans le modèle probit aide grandement à prédire les défauts.

Tableau 31 – Performance de classification des défauts des différents modèles

Prédiction du modèle	Véritables défauts	Véritables non-défauts
Merton sans erreur		
Défaut	40	374
	55.56 %	7.39 %
Pas de défaut	32	4,686
	44.44 %	92.61 %
Total	72	5060
Merton avec erreur		
Défaut	40	421
	55.56 %	8.33 %
Pas de défaut	32	4,706
	44.44 %	91.67 %
Total	72	5060
B&T sans erreur		
Défaut	21	410
	29.17 %	8.10 %
Pas de défaut	51	4,650
	70.83 %	91.9 %
Total	72	5060
B&T avec erreur		
Défaut	20	397
	27.78 %	7.83 %
Pas de défaut	52	4,663
	72.22 %	92.17 %
Total	72	5060

En incluant un terme d'erreur au modèle de Merton et au modèle de Brockman & Turtle, le pouvoir prédictif des défauts ne fait que diminuer. Confirmant pour une quatrième fois que l'ajout d'un terme d'erreur n'améliore pas les modèles structurels. Bien que les erreurs de type II soient égales pour le modèle de Merton avec et sans erreur, l'erreur de type I est minimalisée pour le modèle de Merton sans erreur (7.39 % vs 8.33 % avec erreur). Finalement, le modèle de B&T (avec et sans erreur) fait un travail de prédiction terrible en se trompant plus de la moitié du temps. Par exemple, le modèle de B&T sans erreur ne réussit qu'à classifier correctement 29.17 % des défauts. Il est à noter que les quatre modèles ont une performance comparable quant à l'habileté à classer les non-défauts correctement. Environ 92 - 93 % des non-défauts ont effectivement été classés par les modèles comme étant des non-défauts. En d'autres mots, l'erreur de type I est semblable pour les quatre modèles avec un taux « False Negative » variant entre 7 et 8 %.

8. Conclusion

En conclusion, le modèle de Merton (1974) sans erreur est celui prédisant les probabilités de défauts avec le plus de précision et de fiabilité. L'ajout d'un terme d'erreur ou d'une barrière au défaut (modèle de Brockman & Turtle (2003)) n'améliore donc pas les modèles structurels, en ce qui concerne leur application corporative en risque de crédit. Toutefois, le modèle de Merton (1974) obtient des résultats mitigés. En effet, il réussit à peine à classer correctement plus de la moitié des firmes ayant fait défaut (55.56 %). C'est donc dire qu'une banque se basant uniquement sur ce modèle pour octroyer un prêt, ne réussirait qu'à identifier une firme en défaut sur deux et ainsi accorderait des prêts à des firmes en détresse financière. D'ailleurs, Dionne, Laajimi, Mejri & Petrescu (2008) ont souligné l'importance d'ajouter des variables comptables et macroéconomiques aux modèles structurels afin d'augmenter la précision des probabilités de défaut obtenues. De plus, Jessen et Lando (2015) ont comparé la distance au défaut de Merton (1974) aux résultats obtenus lorsque certaines déviations au modèle de Merton sont incorporées, dont une barrière au défaut. Ils ont montré que la distance au défaut est une mesure robuste permettant de bien comparer les entreprises selon leur risque de défaut. Les auteurs soulignent tout de même la capacité limitée du modèle à bien capturer le niveau adéquat des probabilités de défaut.

Pour terminer, j'aimerais illustrer les conséquences possibles d'un modèle non adapté à l'aide de la dernière crise financière. Rappelons que la récession mondiale de 2007 fût intimement liée aux prêts hypothécaires à risque émis aux États-Unis et plus particulièrement, à tous les produits financiers reliés à ce risque de crédit. Comme mentionné dans Dionne (2009), les produits structurés ne doivent pas nécessairement être tenu responsables, mais plutôt les lacunes dans la réglementation et la gestion des risques de ceux-ci. Plus précisément, plusieurs gestionnaires ont fait aveuglement confiance aux modèles de risque de crédit, sans se questionner quant à leurs implications pour de nouveaux types de produits ou de nouveaux environnements très volatiles. En d'autres mots, les décisions et stratégies d'investissement ne devraient jamais se reposer uniquement sur les résultats d'un modèle, aussi fiable, populaire et précis soit-il.

Finalement, durant cette crise, le risque de liquidité a pris une ampleur phénoménale menant plusieurs recherches à explorer le lien entre la composante de l'écart de crédit non reliée au défaut et le risque d'illiquidité. Je pense qu'il est dorénavant impensable de parler d'une modélisation des risques de faillite sans parler du risque de liquidité.

9. Annexes

9.1 Linéarisation de l'équation de mesure

Équation de mesure non-linéarisée : $E_{ih} = f(e^{a_{ih}}) + v_{ih}$,

$$f(e^{a_{ih}}) \approx f(e^{a_{ih|(i-1)h}}) + \nabla \cdot (a_{ih} - a_{ih|(i-1)h}),$$

$$\nabla = \frac{\partial f(e^{a_{ih}})}{\partial a_{ih}}\bigg|_{a_{ih}=a_{ih|(i-1)h}} = \frac{\partial f(e^{a_{ih}})}{\partial e^{a_{ih}}} \cdot \frac{\partial e^{a_{ih}}}{\partial a_{ih}} = N(d_1) \cdot e^{a_{ih}},$$

Équation de mesure linéarisée : $E_{ih} = \nabla \cdot a_{ih} + g_{ih} + v_{ih}$.

9.2 Code Matlab

```
clear; clc; clear all;

%Lecture des données

%Lecture du fichier de données
 load data_nodefault.mat;
 % dates: date de l'observation en format Matlab
 % E    : valeur au marché de l'ensemble des actions de la firme
 % Bbar : valeur de la dette de la firme (dette court terme + 0.5 dette
long terme)
 % id   : identifiant numérique de la firme

%Come back to matrix format from table format
 Bbar = data_nodefault.Bbar;
 dates = data_nodefault.dates;
 E = data_nodefault.E;
 id = data_nodefault.id;
 yyyy = data_nodefault.yyyy;

%Extraire la liste des identifiants numériques
 idliste=unique(id);

%Extraire les années couvertes par l'échantillon
 yliste=unique(yyyy); % Extrait la liste des années
 ybeg=yliste(1);      % Plus petite année dans l'échantillon
 yend=yliste(end);    % Plus grande année dans l'échantillon

%Extraire le nombre de firmes
 nfirmes=size(idliste,1);

%% Estimation des paramètres
```

```
param_merton_noerror=[];
param_merton_witherror=[];
param_barrier_noerror=[];
param_barrier_witherror=[];
B=[];

 %À faire pour chaque firme
 for i=1:nfirmes

    %Extraire le numéro de la firme
     idi=idliste(i);
    %Extraire les données pour cette firme
     I=id==idi;
     datesi=dates(I);
     yyyy_i=yyyy(I);
     Ei=E(I);
     Bbari=Bbar(I);

    %Faire le calcul de probabilité de défaut à la fin de chaque année
     for yyyy_ij=ybeg:yend

         %Extraire les données correspondant à une année donnée
          I=(yyyy_i==yyyy_ij);

         %Traiter si suffisament d'observations
          if sum(I)>200
         %Extraire les observations
          Eij=Ei(I); Bbarij=Bbari(I); vTij=ones(length(Eij),1); r=0.03;
delta=0; h=1/252; %vTij:maturity of debt=1 year

         %Modèle sans barrière
         %Estimer les paramètres sans terme d'erreurs
           [option]=f_set_mnl_options;
           param=[0.01  0.2]';
           sf=ones(2,1)./param; param=param.*sf;  option(2)=1e-5;
option(3)=1e-5; %param: mu and sigma


[loglik_mlne,param,gradient,niter,stderr,vari,vcv,param_merton_noerror]
=f_mnl('f_mle_no_model_error',param,option,sf,idi,yyyy_ij,param_merton_
noerror,Eij,h,Bbarij,vTij,r,delta);

           %Estimer les paramètres avec termes d'erreurs
           [option]=f_set_mnl_options; option(7)=0;
           param=[param'  1000]'; sf=ones(3,1)./param; param=param.*sf;


[loglik_mlwe,param,gradient,niter,stderr,vari,vcv,param_merton_witherro
r]=f_mnl('f_mle_with_model_error_empirical',param,option,sf,idi,yyyy_ij
,param_merton_witherror,Eij,h,Bbarij,vTij,r,delta);

          %Modèle avec barrière
          %Estimer les paramètres sans terme d'erreurs
          [option]=f_set_mnl_options;
          param=[0.02 0.1 min(min(Bbarij),min(Eij))]';
```

```
          sf=ones(3,1)./param; param=param.*sf;  option(2)=1e-5;
option(3)=1e-5; %param: mu, sigma et H
          vTij=10.*ones(length(Eij),1); %T=10 year for DOC option


[loglik_mlne,param,gradient,niter,stderr,vari,vcv,param_barrier_noerror
]=f_mnl('f_mle_no_model_error_withbarrier',param,option,sf,idi,yyyy_ij,
param_barrier_noerror,Eij,h,Bbarij,vTij,r,delta);

          %Estimer les paramètres avec termes d'erreurs
          [option]=f_set_mnl_options; option(7)=1;
          param=[param'  1000]'; sf=ones(4,1)./param; param=param.*sf;


[loglik_mlwe,param,gradient,niter,stderr,vari,vcv,param_barrier_witherr
or]=f_mnl('f_mle_with_model_error_empirical_barrier',param,option,sf,id
i,yyyy_ij,param_barrier_witherror,Eij,h,Bbarij,vTij,r,delta);

          %Store the debt
          B(end+1,1)=Bbarij(end,1);
       end
    end
 end

%% Probabilités de défaut

PD_merton_noerror_nodefault=f_BSDefaultProb(param_merton_noerror_nodefa
ult(:,3),B_nodefault,param_merton_noerror_nodefault(:,4),1,abs(param_me
rton_noerror_nodefault(:,5)),delta);

PD_merton_witherror_nodefault=f_BSDefaultProb(param_merton_witherror_no
default(:,3),B_nodefault,param_merton_witherror_nodefault(:,4),1,abs(pa
ram_merton_witherror_nodefault(:,5)),delta);

PD_merton_noerror_default=f_BSDefaultProb(param_merton_noerror_default(
:,3),B_default,param_merton_noerror_default(:,4),1,abs(param_merton_noe
rror_default(:,5)),delta);

PD_merton_witherror_default=f_BSDefaultProb(param_merton_witherror_defa
ult(:,3),B_default,param_merton_witherror_default(:,4),1,abs(param_mert
on_witherror_default(:,5)),delta);


PD_barrier_noerror_nodefault=f_Barrier_DefaultProb(param_barrier_noerro
r_nodefault(:,3),param_barrier_noerror_nodefault(:,4),10,abs(param_barr
ier_noerror_nodefault(:,5)),abs(param_barrier_noerror_nodefault(:,6)));

PD_barrier_witherror_nodefault=f_Barrier_DefaultProb(param_barrier_with
error_nodefault(:,3),param_barrier_witherror_nodefault(:,4),10,abs(para
m_barrier_witherror_nodefault(:,5)),abs(param_barrier_witherror_nodefau
lt(:,6)));

PD_barrier_noerror_default=f_Barrier_DefaultProb(param_barrier_noerror_
default(:,3),param_barrier_noerror_default(:,4),10,abs(param_barrier_no
error_default(:,5)),abs(param_barrier_noerror_default(:,6)));
```

```
PD_barrier_witherror_default=f_Barrier_DefaultProb(param_barrier_wither
ror_default(:,3),param_barrier_witherror_default(:,4),10,abs(param_barr
ier_witherror_default(:,5)),abs(param_barrier_witherror_default(:,6)));

%% Tests et outils statistiques

 % Probit regression
 number_default=length(PD_merton_noerror_default);
 number_nodefault=length(PD_merton_noerror_nodefault);
 y = vertcat(ones(number_default,1),zeros(number_nodefault,1)); % 1
identifie le défaut (positive)

 % Merton model
 % Without error
 x = vertcat(PD_merton_noerror_default,PD_merton_noerror_nodefault);
 reg_merton_noerror =
fitglm(x,y,'Distribution','binomial','link','probit');
 pFitted_merton_noerror = reg_merton_noerror.Fitted.Probability;
 LL_merton_noerror = reg_merton_noerror.LogLikelihood;
 AIC_merton_noerror = -2*LL_merton_noerror + 2*2;
 BIC_merton_noerror = -2*LL_merton_noerror + 3*log(length(y));

 % With error
 % Seulement PD comme variable explicative
 x =
vertcat(PD_merton_witherror_default,PD_merton_witherror_nodefault);
 reg_merton_witherror_PD =
fitglm(x,y,'Distribution','binomial','link','probit');
 pFitted_merton_witherror_PD =
reg_merton_witherror_PD.Fitted.Probability;
 LL_merton_witherror_PD = reg_merton_witherror_PD.LogLikelihood;
 AIC_merton_witherror_PD = -2*LL_merton_witherror_PD + 2*2;
 BIC_merton_witherror_PD = -2*LL_merton_witherror_PD +
3*log(length(y));

 % PD et le sigma du terme d'erreur comme variables explicatives
 x =
[vertcat(PD_merton_witherror_default,PD_merton_witherror_nodefault)
vertcat(abs(param_merton_witherror_default(:,6))./param_merton_witherro
r_default(:,7),abs(param_merton_witherror_nodefault(:,6))./param_merton
_witherror_nodefault(:,7))];
 reg_merton_witherror_PDandSigma =
fitglm(x,y,'Distribution','binomial','link','probit');
 pFitted_merton_witherror_PDandSigma =
reg_merton_witherror_PDandSigma.Fitted.Probability;
 LL_merton_witherror_PDandSigma =
reg_merton_witherror_PDandSigma.LogLikelihood;
 AIC_merton_witherror_PDandSigma = -2*LL_merton_witherror_PDandSigma +
2*3;
 BIC_merton_witherror_PDandSigma = -2*LL_merton_witherror_PDandSigma +
4*log(length(y));

 % Barrier model
 % Without error
  x = vertcat(PD_barrier_noerror_default,PD_barrier_noerror_nodefault);
```

```
 reg_barrier_noerror =
fitglm(x,y,'Distribution','binomial','link','probit');
 pFitted_barrier_noerror = reg_barrier_noerror.Fitted.Probability;
 LL_barrier_noerror = reg_barrier_noerror.LogLikelihood;
 AIC_barrier_noerror = -2*LL_barrier_noerror + 2*2;
 BIC_barrier_noerror = -2*LL_barrier_noerror + 3*log(length(y));

 % With error
 % Seulement PD comme variable explicative
 x =
vertcat(PD_barrier_witherror_default,PD_barrier_witherror_nodefault);
 reg_barrier_witherror_PD =
fitglm(x,y,'Distribution','binomial','link','probit');
 pFitted_barrier_witherror_PD =
reg_barrier_witherror_PD.Fitted.Probability;
 LL_barrier_witherror_PD = reg_barrier_witherror_PD.LogLikelihood;
 AIC_barrier_witherror_PD = -2*LL_barrier_witherror_PD + 2*2;
 BIC_barrier_witherror_PD = -2*LL_barrier_witherror_PD +
3*log(length(y));

 % PD et le sigma du terme d'erreur comme variables explicatives
 x =
[vertcat(PD_barrier_witherror_default,PD_barrier_witherror_nodefault)
vertcat(abs(param_barrier_witherror_default(:,7))./param_barrier_wither
ror_default(:,8),abs(param_barrier_witherror_nodefault(:,7))./param_bar
rier_witherror_nodefault(:,8))];
 reg_barrier_witherror_PDetSigma =
fitglm(x,y,'Distribution','binomial','link','probit');
 pFitted_barrier_witherror_PetSigma =
reg_barrier_witherror_PDetSigma.Fitted.Probability;
 LL_barrier_witherror_PDetSigma =
reg_barrier_witherror_PDetSigma.LogLikelihood;
 AIC_barrier_witherror_PDetSigma = -2*LL_barrier_witherror_PDetSigma +
2*2;
 BIC_barrier_witherror_PDetSigma = -2*LL_barrier_witherror_PDetSigma +
3*log(length(y));

 % ROC Curve
 % Merton model
 % Without error
 [X,Y,~,AUC_merton_noerror] = perfcurve(y,pFitted_merton_noerror,1);
 plot(X,Y);
 xlabel('False positive rate');
 ylabel('True positive rate');
 title('Courbes ROC pour la classification par la régression Probit');
 hold on;
 %Performance in predicting defaults
 qFP_merton_noerror = quantile(X,0.09);
 qTP_merton_noerror = quantile(Y,0.09);

 % With error
 [X,Y,~,AUC_merton_witherror] =
perfcurve(y,pFitted_merton_witherror_PDandSigma,1);
 plot(X,Y);
 %Performance in predicting defaults
 qFP_merton_witherror = quantile(X,0.09);
```

```
 qTP_merton_witherror = quantile(Y,0.09);

 % Barrier model
 % Without error
 [X,Y,~,AUC_barrier_noerror] = perfcurve(y,pFitted_barrier_noerror,1);
 plot(X,Y);
 %Performance in predicting defaults
 qFP_barrier_noerror = quantile(X,0.09);
 qTP_barrier_noerror = quantile(Y,0.09);

 % With error
 [X,Y,~,AUC_barrier_witherror] =
perfcurve(y,pFitted_barrier_witherror_PD,1);
 plot(X,Y);
 legend('Merton sans erreur','Merton avec erreur','Barrière sans
erreur','Barrière avec erreur','Location','southeast')
 hold off;
 %Performance in predicting defaults
 qFP_barrier_witherror = quantile(X,0.09);
 qTP_barrier_witherror = quantile(Y,0.09);
```

```
function
[fv,A]=f_mle_no_model_error_barrier(param,option,sf,E,h,Bbar,T,r,delta)
%
% Maximum likelihood estimation
%

%extract parameter values
 param=param./sf;        %restore the original scaling
 mu=param(1);            %drift
 sigma=abs(param(2));    %standard deviation param

 sT=sqrt(T);             %sqrt of maturity of debt

%implied asset values
 nobs=size(E,1);
 A=Bbar .*ones(nobs,1) + E; %Approche comptable
 A=f_newton_raphson(A,sigma,Bbar,T,E,r,delta);

%compute jacobien
 dEdA=f_BSCallDelta(A,Bbar,r,T,sigma,delta);
 ja1=log(A);
 ja2=log(dEdA);

%asset value return
 R=log(A(2:nobs)./A(1:nobs-1));

%compute likelihood function
 sigma2=(sigma^2)*h; mmu=(mu-delta)*h-0.5*sigma2; %daily
 err2 = (R - mmu).^2;

 part1 = -0.5 .* log(2*pi) .* ones(nobs-1,1);
 part2 = -0.5 .* log(sigma2)  .* ones(nobs-1,1);
 part3 = -0.5 .* (1/sigma2)   .* err2;
 part4 = - ja1(2:nobs);
```

```
 part5 = - ja2(2:nobs);

 ll=part1+part2+part3+part4+part5;

 if option(5)==0;  fv=nansum(ll);  end
 if option(5)==1;  fv=ll;       end
 if option(5)==2;  fv=A(end);   end
 if option(5)==3;  fv=A;        end
```

```
function
[fv,A]=f_mle_no_model_error_withbarrier(param,option,sf,E,h,Bbar,T,r,de
lta)
%
% Maximum likelihood estimation
%

%extract parameter values
 param=param./sf;       %restore the original scaling
 mu=param(1);           %drift
 sigma=abs(param(2));   %standard deviation param
 H=abs(param(3));

%implied asset values
 nobs=size(E,1);
 A=Bbar .*ones(nobs,1) + E; %Approche comptable
 A=f_newton_raphson_barrier(A,sigma,Bbar,T,E,r,delta,H);

%compute jacobien
 dEdA=f_DocDelta(A,Bbar,r,T,sigma,delta,H);
 ja1=log(A);
 ja2=log(dEdA);

%asset value return
 R=log(A(2:nobs)./A(1:nobs-1));

%compute likelihood function
 sigma2=(sigma^2)*h; mmu=(mu-delta)*h-0.5*sigma2; %daily
 err2 = (R - mmu).^2;

 part1 = -0.5 .* log(2*pi) .* ones(nobs-1,1);
 part2 = -0.5 .* log(sigma2)  .* ones(nobs-1,1);
 part3 = -0.5 .* (1/sigma2)   .* err2;
 part4 = - ja1(2:nobs);
 part5 = - ja2(2:nobs);

 ll=part1+part2+part3+part4+part5;

 if option(5)==0;  fv=nansum(ll);  end
 if option(5)==1;  fv=ll;       end
 if option(5)==2;  fv=A(end);   end
 if option(5)==3;  fv=A;        end
```

```
function
[fv,A]=f_mle_with_model_error_empirical(param,option,sf,E,h,Bbar,T,r,de
l)
%
```

```
% Calcule la valeur de la fonction de vraisemblance pour Merton (1974)
avec erreurs dans l'équité
%

%unscale parameters
 param=param./sf;

%extract parameters
 mu = param(1);
 si = abs(param(2));
 sie= abs(param(3));

%Initialize result vectors
 n=size(E,1); va=zeros(n,1); vP=zeros(n,1); vF=zeros(n,1);
ve=zeros(n,1);

%Initialize a and P
 a=log( f_newton_raphson(E(1)+Bbar(1),si,Bbar(1),T(1),E(1),r,del) );
 P=1000;

%Recursion
 for i=2:n
     attm1 = a+(mu-del-0.5*si*si)*h;
     Pttm1 = P+si*si*h;

[fbs,Delta]=f_BSCall_BSCallDelta(exp(attm1),Bbar(i),r,T(i),si,del);
     ettm1 = E(i)-fbs;
     F     = Delta*Delta*Pttm1+sie*sie;
     a     = attm1 + Pttm1*(Delta/F)*ettm1;
     P     = Pttm1 - Pttm1*(Delta/F)*Delta*Pttm1;
     vF(i)=F; va(i)=a; vP(i)=P; ve(i)=ettm1;
end

%compute likelihood function
 part1=0.5*log(2*pi).*ones(n-1,1);
 part2=0.5*log(vF(2:end));
 part3=0.5.*(ve(2:end).*ve(2:end))./vF(2:end);
 ll=-part1-part2-part3;

 A = exp(va);

 if option(5)==0; fv=nansum(ll);      return; end
 if option(5)==1; fv=ll;           return; end
 if option(5)==2; fv=exp(va);      return; end
%% Local functions

function [oprice,delta_al]=f_BSCall_BSCallDelta(S,K,r,T,sigma,delta)
%%
% Black-Scholes
%

%compute quantities required later
 sisT=sigma*sqrt(T);
 d1=(log(S/K)+(r-delta+0.5*sigma*sigma)*T)/sisT;
 d2=d1-sisT;
```

```
 Nd1=f_cumnorm(d1);
 Nd2=f_cumnorm(d2);

%prix de l'option
 oprice = S*exp(-delta*T)*Nd1-K*exp(-r*T)*Nd2;

%dérivée première par rapport à alpha
 delta_al=S*exp(-delta*T)*Nd1;
```

```
function
[fv,A]=f_mle_with_model_error_empirical_barrier(param,option,sf,E,h,Bba
r,T,r,del)
%
% Calcule la valeur de la fonction de vraisemblance pour Brockman &
Turtle (2003) avec
% erreur dans l'équité
%

%unscale parameters
 param=param./sf;

%extract parameters
 mu = param(1);
 si = abs(param(2));
 H = abs(param(3));
 sie= abs(param(4));

%Initialize result vectors
 n=size(E,1); va=zeros(n,1); vP=zeros(n,1); vF=zeros(n,1);
ve=zeros(n,1);

%Initialize a and P
 a=log(
f_newton_raphson_barrier(E(1)+Bbar(1),si,Bbar(1),T(1),E(1),r,del,H));
 P=1000;

%Recursion
 for i=2:n
     attm1 = a+(mu-del-0.5*si*si)*h;
     Pttm1 = P+si*si*h;
     Delta=exp(attm1).*f_DocDelta(exp(attm1),Bbar(i),r,T(i),si,del,H);
     ettm1 = E(i)-f_DOC(exp(attm1),Bbar(i),r,T(i),si,del,H);
     F     = Delta*Delta*Pttm1+sie*sie;
     a     = attm1 + Pttm1*(Delta/F)*ettm1;
     P     = Pttm1 - Pttm1*(Delta/F)*Delta*Pttm1;
     vF(i)=F; va(i)=a; vP(i)=P; ve(i)=ettm1;
 end

%compute likelihood function
 part1=0.5*log(2*pi).*ones(n-1,1);
 part2=0.5*log(vF(2:end));
 part3=0.5.*(ve(2:end).*ve(2:end))./vF(2:end);
 ll=-part1-part2-part3;

 A = exp(va);
```

```
 if option(5)==0; fv=nansum(ll);   return; end
 if option(5)==1; fv=ll;           return; end
 if option(5)==2; fv=exp(va);      return; end

end
```

```
function [option]=f_set_mnl_options

%Sets the options for function mnl

 option=zeros(7,1);

 option(1)=500;    %Maximum number of iter.
 option(2)=1e-6;   %Convergence for max. param diff.
 option(3)=1e-6;   %Convergence for function (L) diff.
 option(4)=1;      %=1 for bhhh standard errors at the end of iter.
 option(5)=0;      %=0 for quadratic hill climbing; =1 for BHHH
 option(6)=0;      %=1 to skip quadratic hill climbing procedure
 option(7)=0;      %=1 to print each iteration; =0 to print the final
result
```

```
function
[loglik,param,gradient,niter,stderr,vari,vcv,stockparam]=f_mnl(fun,para
m,option,sf,idi,yyyy_ij,stockparam,varargin)

%Maximization of a non-linear function using quadratic hill climbing

%Define the procedure's options
 maxiter =option(1); %Maximum number of iterations
 epsilon1=option(2); %Convergeance criteria for max. par. diff.
 epsilon2=option(3); %Convergeance criteria for fun. diff.
 methode=option(5);  %Optimization method

%Keep current time in memory
 ts=cputime;

%Find the optimum using a quadratic hill climbing proc.
 nparam=size(param,1);    %Number of parameters
 r=1;                     %Radius of the sphere is equal to 1/r in
quadratic hill climbing

 if option(6)==0

[param,loglik,gradient,niter,hessien,A]=qhillc(fun,nparam,r,param,epsil
on1,epsilon2,maxiter,methode,option,sf,varargin{:});
    vcv=inv(-hessien); vari=diag(vcv);
 end

 if option(6)==1
    loglik=0; niter=0;
 end

%Compute standard errors
 if option(4)==1
    option(5)=1;
    gra     =gradp(fun,param,option,sf,varargin{:});
```

```
    gradient=sum(gra)';
    hessien=zeros(nparam,nparam);
    nobs=size(gra,1);

    for j=1:(nobs)
       hessien = hessien + gra(j,:)'*gra(j,:);
    end

    vari=diag(inv(hessien));
    vcv=inv(hessien);
 end

 stderr = sqrt(vari);

%Print results
 ts=cputime-ts;

 if option(7)==1 | option(7)==0
     fprintf('\n\n');
     fprintf('Results: \n');
     fprintf('======= \n\n');

     if option(6)==0
         fprintf('time                   : %6.2f \n',ts);
         fprintf('log of likelihood      : %8.5f \n',loglik);
         fprintf('-2 times log. lik      :  %8.5f \n',-2*loglik);
         fprintf('number of iterations   : %4d \n\n',niter);
     end

     fprintf('scaled parameter vector \n');
     fprintf(' %11.8f',param');
     fprintf('\n');
     fprintf('variances of scaled parameters esti. \n');
     fprintf(' %11.8f',vari');
     fprintf('\n');
     fprintf('standard errors of scaled parameters \n');
     fprintf(' %11.8f',stderr');
     fprintf('\n');
     fprintf('gradient vector \n');
     fprintf(' %11.8f',gradient);
     fprintf('\n \n \n \n');
 end

%Unscale param and standard errors
 param=param./sf; stderr=stderr./abs(sf);

 if option(7)==1 | option(7)==0

     fprintf('unscaled parameter vector \n');
     fprintf(' %11.8f',param');
     fprintf('\n');
     fprintf('standard errors of unscaled parameters \n');
     fprintf(' %11.8f',stderr');
     fprintf('\n');
```

```
     %Store the parameters final values by firm and by year
     stockparam(size(stockparam,1)+1,:)=[idi yyyy_ij A(end,1) param'];
 end

%Unscale covariance matrix
 usf=1./sf;
 msf=usf*usf'; vcv=vcv.*msf;

function[newparam,newllik,gradient,i,hessien,A]=qhillc(fun,m,r,param,ep
s1,eps2,maxiter,methode,option,sf,varargin);

% Quadratic hill climbing procedure

%Initialize variables
 newparam=param;          %Parameter vector after an iteration
 oldparam=param;          %Parameter vector before the iteration
 [oldllik,~]=feval(fun,param,option,sf,varargin{:});   %Likelihood
function before the iteration, there was a sum

 maxi1=1000;           %Maximum of diff. in parameters between iter.
 maxi2=1000;           %Maximum of diff. in like. function
 i=0;                  %Index for iterations
 orir=r;               %Value for radius when entering the procedure =1


%Start recursions

 while i<=maxiter %500

   %Compute gradient and its norm
    if methode==0 %hill climbing
       gradient=gradp(fun,newparam,option,sf,varargin{:});
    else %BHHH
       gra=gradp(fun,newparam,option,sf,varargin{:});
       gradient=sum(gra);
    end

    newllik=sum(feval(fun,newparam,option,sf,varargin{:}))';

   %Check for convergence
    maxi1=max(max(abs((newparam-oldparam)))');
    maxi2=max(abs(oldllik-newllik));
    if maxi1<=eps1 & maxi2<eps2 & i>1;  return; end; %i=0 at the first
iteration.

    if (isnan(newllik))
        return; end;

   %Print parameter values and gradient
     % Printres=1;
     % If rem(i,5)==0 printres=0; else printres=1; end
    if option(7)==0
       printres=0;
    elseif option(7)==1
```

```
        printres=1;
     elseif option(7)==2
        printres=0;
     end

     if printres==1;
         fprintf('\n\n\n');
         fprintf('iteration #%3i : ',i);
         if methode==0  fprintf('quadratic hill climbing \n'); end
         if methode==1  fprintf('berndt, hall, hall, hausman \n'); end

         fprintf('\n');
         fprintf('scaled parameter vector: \n');
         fprintf('   %11.8f',newparam);    fprintf('\n');
         fprintf('parameter vector: \n');
         fprintf('   %7.4e',newparam./sf);    fprintf('\n');

         fprintf('gradient vector of scaled parameters :  \n');
         fprintf('   %11.8f',gradient); fprintf('\n\n');
         fprintf('current likelihood  : %12.7f \n',newllik);
         fprintf('previous likelihood : %12.7f \n',oldllik);
         fprintf('step lenght         : %12.7f \n',1/r);
         fprintf('max. par. dif       : %12.7f \n',maxi1);
         fprintf('max. fun. dif.      : %12.7f \n',maxi2);
     end

    %Reset the values of parameters %
     oldparam=newparam; oldllik=newllik; r=orir;

    %Compute direction matrix %
     if methode==0 %option 5==0 : hill climbing
        [ffv,~]=feval(fun,newparam,option,sf,varargin{:});
        if ffv~=-99
           hessien=hessp(fun,newparam,option,sf,varargin{:});
        else
           i=maxiter;
        end
     end
     if methode==1
        hessien=zeros(m,m);
        nobs=size(gra,1);
        for j=1:nobs
           hessien = hessien + gra(j,:)'*gra(j,:);
        end
        hessien=-hessien;
     end
     dethess=det(hessien); %déterminant de la matrice


    %Keep the largest latent root and corresponding latent vector
    %of hessien for the quadratic hill climbing routine
        [lvect,lroot]=eig(hessien); %lroot is a diagonal matrix of
eigenvalues and %lvector is a matrix of eigenvectors (columns)
        [lroot,ilroot]=max(diag(lroot));
```

```
       lvect=lvect(:,ilroot);  %we take just the column associated with
the largest latent root (eigenvalue).

      %Update parameters estimates
       [newparam]=update(lroot,r,oldparam,hessien,m,gradient);


   %Check if new solution has increased likelihood function
        [newllik,A]=feval(fun,newparam,option,sf,varargin{:});
        while (newllik<oldllik) %& (r < 1000000)
          r=r*2;
          [newparam]=update(lroot,r,oldparam,hessien,m,gradient);
          [newllik,A]=feval(fun,newparam,option,sf,varargin{:});
        end

    i=i+1;

 end %While

function [newparam]=update(lroot,r,oldparam,hessien,m,gradient);

%Update parameter estimates

%Compute norm of gradient
 normgrad=sqrt(sum(gradient.^2));

%New parameter value
 alpha=lroot+r*normgrad;

 if alpha>0
    newparam=oldparam - inv(hessien-(alpha.*eye(m)))*gradient';
%m=number of para and eye(m)=Identity matrix of m-by-m, so 0 everywhere
and 1 on the diag
 else
    newparam=oldparam - inv(hessien)*gradient';
 end

function [grdd]=gradp(fun,x0,option,sf,varargin);

%Computes the gradient of a function

   x=x0; %x=param
   h=eps^(1/3)*max(abs(x),1); %eps=très petit nb
   xh1=x+h; xh0=x-h; hh=xh1-xh0; %hh=2h
   for j=1:length(x)
       xx=x; %xx=param
       xx(j)=xh1(j); [f1,~]=feval(fun,xx,option,sf,varargin{:});
       xx(j)=xh0(j); [f0,~]=feval(fun,xx,option,sf,varargin{:});
       fjac(:,j)=(f1-f0)/hh(j);
   end

   grdd=fjac; % vector of first partial derivatives (par rapport à mu
et à sigma)
```

```
 function H = hessp(f,x,option,sf,varargin)
     %f = fun
     %x = newparam
  tol      = optget(mfilename,'tol',eps.^(1/4));
  diagonly = optget(mfilename,'diagonly',0);

  k = size(x,1);
  [fx,~] = feval(f,x,option,sf,varargin{:});

  % Compute the stepsize (h)
  h = tol*max(abs(x),1);
  xh = x+h;
  h = xh-x;
  ee = sparse(1:k,1:k,h,k,k);

  %Compute forward and backward steps
  gplus = zeros(k,1);
  gminus = zeros(k,1);
  for i=1:k
    [gplus(i),~] = feval(f,x+ee(:,i),option,sf,varargin{:});
    [gminus(i),~] = feval(f,x-ee(:,i),option,sf,varargin{:});
  end

  H=h*h';
  %Compute double steps
  if diagonly
    for i=1:k
      H(i,i) = (gplus(i)+gminus(i)-2*fx)/ H(i,i);
    end
  else
    for i=1:k
      for j=1:k
        if i==j
          H(i,j) = (gplus(i)+gminus(j)-2*fx)/ H(i,j);
        else
          [fxx,~]=feval(f,x+ee(:,i)-ee(:,j),option,sf,varargin{:});
          H(i,j) = (gplus(i)+gminus(j)-fx-fxx)/ H(i,j);
        end
      end
    end
    H=(H+H')/2;
  end

 function optvalue = optget(funcname,optname,optvalue)

% OPTGET Utility to get previously set function default values

funcname = lower(funcname);
optvar=[funcname '_options'];
eval(['global ' optvar])        % declare a global variable

if nargin==1                    % return the whole option structure
  optvalue=(eval(optvar));
  return
end
```

```
optname  = lower(optname);
%If structure is empty or the named field does not exist
%Set to the value passed
if isempty(eval(optvar)) || ~isfield(eval(optvar),optname)
  eval([optvar '.' optname '=optvalue;']);
%Otherwise return the value in the field
else
  optvalue = eval([optvar '.' optname]);
end
```

```
function [BSCall]=f_BSCall(A,B,r,T,sigma,delta)
%
% Black-Scholes call price
%

%compute quantities required later
 sisT=sigma.*sqrt(T);
 b1=(log(A./B)+(r-delta+0.5.*sigma.*sigma).*T)./sisT;
 b2=b1-sisT;

%prix de l'option
 BSCall = A.*exp(-delta.*T).*normcdf(b1)-B.*exp(-r.*T).*normcdf(b2);

end
```

```
function [DOC]=f_DOC(S,K,r,T,sigma,delta,H)
%
% Black-Scholes Down & Out Call price
%

%poser les variables
 H=H.*ones(length(S),1);
 sisT=sigma.*sqrt(T);
 a1=(log(S./max(K,H))+(r-delta+0.5.*sigma.*sigma).*T)./sisT;
 a2=a1-sisT;
 b1=a1-(2*log(S./H)./sisT);
 b2=b1-sisT;
 etha=r./(sigma.^2)+0.5;
 Na1=normcdf(a1);
 Na2=normcdf(a2);
 Nb1=normcdf(b1);
 Nb2=normcdf(b2);

%prix de l'option
 DOC = S.*Na1 - K.*exp(-r.*T).*Na2 - S.*((H./S).^(2.*etha)).*Nb1 +
K.*exp(-r.*T).*((H./S).^(2*etha-2)).*Nb2;
end
```

```
function A=f_newton_raphson(A,sigma,Bbar,T,E,r,delta)
%
% Computes implied asset value given a sample of equity value
% using a Newton Raphson algorithm
%
  eps=1e-8;                                %convergence criteria
  fv=E-f_BSCall(A,Bbar,r,T,sigma,delta);
  while (max(abs(fv)))>eps;
     fv=E-f_BSCall(A,Bbar,r,T,sigma,delta);
```

```
      dfv=-f_BSCallDelta(A,Bbar,r,T,sigma,delta);
      A = A - (fv ./ dfv);
   end
```

```
function A=f_newton_raphson_barrier(A,sigma,Bbar,T,E,r,delta,H)
%
% Computes implied asset value given a sample of equity value
% using a Newton Raphson algorithm
%
   eps=1e-8;                                %convergence criteria
   fv=E-f_DOC(A,Bbar,r,T,sigma,delta,H);
   while (max(abs(fv)))>eps
      fv=E-f_DOC(A,Bbar,r,T,sigma,delta,H);
      dfv=-f_DocDelta(A,Bbar,r,T,sigma,delta,H);
      A = A - (fv ./ dfv);
   end

end
```

```
function [delta]=f_BSCallDelta(A,B,r,T,sigma,del)
%
% Black-Scholes call delta
%

%compute quantities required later
 sisT=sigma.*sqrt(T);
 b1=(log(A./B)+(r-del+0.5*sigma.*sigma).*T)./sisT;

%compute delta
 delta = exp(-del.*T).*normcdf(b1);
```

```
function [delta]=f_DocDelta(S,K,r,T,sigma,del,H)
%
% Black-Scholes Down & Out Call delta
%

 %poser les variables
 sisT=sigma*sqrt(T);
 H=H*ones(length(S),1);
 a1=(log(S./max(K,H))+(r+(sigma^2)/2)*T)./sisT;
 a2=a1-sisT;
 b1=a1-(2*log(S./H)./sisT);
 b2=b1-sisT;
 etha=r/(sigma^2)+0.5;
 Na1=normcdf(a1);
 na1=normpdf(a1);
 na2=normpdf(a2);
 Nb1=normcdf(b1);
 Nb2=normcdf(b2);
 nb1=normpdf(b1);
 nb2=normpdf(b2);
 x=2*etha-1;
 k=K.*exp(-r*T);

 delta=Na1 + 1./sisT.*(na1-k./S.*na2) +
(H./S).^x.*(x.*H./S.*Nb1+k./H.*(2-2.*etha).*Nb2) +
1./sisT.*(H./S).^x.*(H./S.*nb1-k./H.*nb2);
```

```
end
function [dp] = f_BSDefaultProb(A,B,mu,T,sigma,delta)
%
%Estimates the default probability of a call option
%

%compute quantities required later
 sisT=sigma.*sqrt(T);
 d1=(log(A./B)+(mu-delta+0.5.*sigma.*sigma).*T)./sisT;
 d2=d1-sisT;

%default prob
 dp = normcdf(-d2);

end
function [DP] = f_Barrier_DefaultProb(S,mu,T,sigma,H)
%
%Estimates the default probability of a DOC
%

%compute quantities required later
 sisT=sigma.*sqrt(T);
 nu=mu-(sigma.^2)/2;
 d1=(log(H./S)-nu.*T)./sisT;
 d2=(log(H./S)+nu.*T)./sisT;

%default prob
DP = normcdf(d1) + (H./S).^(2.*mu./(sigma.^2)-1).*normcdf(d2);
end
```

10. Bibliographie

Bharath, S.T. & T. Shumway, 2004, Forecasting Default with the Merton-KMV Model, Working paper, University of Michigan.

Bishop, G. & G. Welch, 2001, An introduction to the Kalman filter, cours 8 [pdf en ligne], University of North Carolina. Récupéré le 20 septembre 2016 de http://www.cs.unc.edu/~tracker/media/pdf/SIGGRAPH2001_CoursePack_08.pdf.

Black, F. & M. Scholes, 1973, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy 81, 637-659.

Brockman, P. & H. Turtle, 2003, A Barrier Option Framework for Corporate Security Valuation, Journal of Financial Economics 67, 511-529.

Chinneck, J.W., 2016, Practical Optimization: A Gentle Introduction, Ottawa, Carleton University. Récupéré le 20 septembre 2016 de http://www.sce.carleton.ca/faculty/chinneck/po/Chapter16.pdf.

Dionne, G., 2009, Finance structurée, gestion des risques et récente crise financière, Risques 80, 122-127.

Dionne, G., Laajimi, S., Mejri S., Petrescu, M., 2008, Estimation of the default risk of publicly traded companies: evidence from Canadian data, Canadian Journal of Administrative Sciences 25, 134-152.

Duan, J.C., 1994, Maximum likelihood estimation using price data of the derivative contract. Math Finance 4, 155–167.

Duan, J.C. & A. Fulop, 2009, Estimating the structural credit risk model when equity prices are contaminated by trading noises, Journal of Econometrics 150, 288-296.

Duan, J.C., Gauthier, G., Simonato, J.G., 2004, On the Equivalence of the KMV and Maximum Likelihood Methods for Structural Credit Risk Models, Working Paper, University of Toronto.

Eom, Y.H., Helwege, J., Huang, J.Z., 2004, Structural models of corporate bond pricing: An empirical analysis, Review of Financial Studies 17, 499-544.

Feldhütter, P. & S. Schaefer, 2015, The Credit Spread Puzzle in the Merton model – Myth or Reality?, Working paper, London Business School.

Jessen, C. & D. Lando, 2015, Robustness of distance-to-default, Journal of Banking & Finance 50, 493-505.

Jones, E.P., Mason, S., Rosenfeld, E., 1984, Contingent Claims Analysis of Corporate Capital Structures: An Empirical Investigation, Journal of Finance 39, 611-625.

Merton, R.C., 1974, On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates, Journal of Finance 29, 449-470.

Perlich, C. & A. Reisz, 2007, A market-based framework for bankruptcy prediction, Journal of Financial Stability 3, 85–131.

Simonato, J.G., 2015, New warrant issues valuation with leverage and equity model errors, Journal of Financial Services Research 47, 247-272.

Vassalou, M. & Y. Xing, 2004, Default Risk in Equity Returns, Journal of Finance 59(2), 831–868.

Wikipedia, Année, 2016, Kalman Filter, Wikipedia. Récupéré le 20 septembre 2016 de https://en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter.

Wong, H. & T. Choi, 2009, Estimating Default Barriers from Market Information. Quant. Finance 9 (2), 187–196.