HEC MONTRÉAL

Mesure du risque sur les marchés Canadiens à travers la VaR et la CVaR

Par

Skander Dellagi

(11126603)

Directeur : Georges Dionne

Projet supervisé présenté en vue de l'obtention du grade de maîtrise ès sciences en gestion (M.S.c)

Avril 2015

Sommaire

Ce travail vise à évaluer la performance de plusieurs modèles déterministes et stochastiques dans l'estimation de la valeur à risque (VaR) et de la valeur a risque conditionnelle (CVaR) quotidienne pour les indices S&PTSX 60 et S&PTSX Venture Composite.

Nos résultats montrent que les distributions asymétriques et leptokurtiques produisent de meilleures mesures de risque et que le choix entre l'utilisation d'une approche déterministe ou stochastique a plus d'influence sur la qualité des mesures obtenues que le choix entre la VaR ou la CVaR .

Mots-clés: Valeur à risque, Valeur à risque conditionnelle, Asymétrie, coefficient d'aplatissement, GARCH, EGARCH, Tests rétroactifs, Fonction de perte.

Table des matières

Liste des tableaux ..... a

Liste des figures c

Remerciements ..... g

Introduction 1

Section 1: Concepts relatifs à la valeur à risque et à la valeur à risque conditionnelle 2

1.1. Définition de la valeur à risque 2

1.2. Formulation mathématique de la valeur à risque 3

1.3. Méthodes communément utilisées pour calculer la VaR 4

1.3.1. Simulation historique 4

1. 3.2. Méthode paramétrique 5

1.3.3. Simulation Monte Carlo 5

1.4. La valeur à risque conditionnelle 5

1.5. Formulation mathématique de la CVaR 6

1.6. Méthode numérique pour calculer la CVaR en utilisant les VaRs moyennes 7

Section 2: Modèles quantitatifs 9

2.1. Introduction 9

2.2. Modèles déterministes 9

2.2.1. VaR Normale 9

2.2.2. VaR Cornish-Fisher 10

2.2.3. Student-t VaR 13

2.3. Modèles stochastiques 14

Section 3: Tests rétroactifs 18

3.1. Tests rétroactifs appliqués à la VaR 18

3.1.1Couverture inconditionnelle: test de Kupiec (1995) 19

3.1.2 Couverture conditionnelle : test de Christoffersen (1998) 20

3.2. Tests rétroactifs appliqués à la CVaR..... 21

3.3. Choix du modèle adéquat 24

Section 4: Méthodologie 26

Section 5: Analyse des données 27

5.1. Collecte des données 27

5.2. Statistiques descriptives..... 30

Section 6: Calcul des estimateurs pour la VaR et la CVaR..... 36

6.1. Calcul de VaR et CVaR pour la totalité de l'échantillon 36

6.2. Calcul des estimateurs de la VaR et de la CVaR en utilisant les fenêtres roulantes 37

6.3 .Conclusion 39

Section 7:Analyse des résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR et à la CVaR..... 40

7.1. Tests rétroactifs sur la VaR 40

7.2. Tests rétroactifs sur la CVaR..... 43

7.3. Conclusion 44

Section 8: Sélection du modèle le plus adéquat 45

Section 9: Conclusions 47

Annexe 1 : Calcul de la VaR et de la CVaR sur la totalité de l'échantillon..... 49

Annexe 2 : Graphiques présentant l'évolution des estimateurs de la VaR et de la CVaR sur les fenêtres de 250 jours et de 500 jours 52

Annexe 3 : Tableaux présentant les résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR 73

Annexe 4 : Tableaux présentant les résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR..... 79

Annexe 5 : Fonction de perte 82

Annexe 6 : Test de Sarma et al(2003) 84

Liste des tableaux

Tableau 1 : Procédure d'estimation de la CVaR selon Dowd(2002)……..……..……8

Tableau 2 : Statistiques descriptives……..30

Tableau 3:Var et CVaR selon la méthode historique…….……49

Tableau 4:Var et CVaR selon la méthode Gaussienne...……49

Tableau 5:Var et CVaR selon la méthode de Student……49

Tableau 6:Var et CVaR selon la méthode Cornish-Fisher……50

Tableau 7:Var et CVaR selon la méthode Gaussienne GARCH……50

Tableau 8: Var et CVaR selon la méthode Gaussienne EGARCH……50

Tableau 9: Var et CVaR selon la méthode Student GARCH……..…50

Tableau 10:Var et CVaR selon la méthode Student EGARCH……..……51

Tableau 11:Var et CVaR selon la méthode Cornish-Fisher GARCH……..…51

Tableau 12:Var et CVaR selon la méthode Cornish-Fisher EGARCH……..…51

Tableau 13: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR pour les modèles Gaussiens déterministes……73

Tableau 14: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR pour les modèles Student-t déterministes……74

Tableau 15: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR pour les modèles Cornish-Fisher déterministes……75

Tableau 16: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR pour les modèles Gaussiens stochastiques……76

Tableau 17: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR pour les modèles Student-t stochastiques……77

Tableau 18: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR pour les modèles Cornish-Fisher stochastiques……78

Tableau 19: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Gaussien déterministe……...79

Tableau 20: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Student-t déterministe……...79

Tableau 21: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Cornish-Fisher déterministe……...79

Tableau 22: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Gaussiens GARCH……..……...79

Tableau 23: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Gaussien EGARCH……...……...80

Tableau 24: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Student-t GARCH……..…...80

Tableau 25: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Student-t EGARCH……..80

Tableau 26: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Cornish-Fisher GARCH……..…...80

Tableau 27: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Cornish-Fisher EGARCH…….....81

Tableau 28 : Fonction de perte des modèles non rejetés au niveau de confiance 99% pour le S&P TSX 60….....82

Tableau 29 : Fonction de perte des modèles non rejetés au niveau de confiance 99.9% pour le S&P TSX 60…….....82

Tableau 30 : Fonction de perte des modèles non rejetés au niveau de confiance 95% pour le S&P TSX Venture Composite…….....82

Tableau 31 : Fonction de perte des modèles non rejetés au niveau de confiance 99.9% pour le S&P TSX Venture Composite…….....83

Tableau 32 : Test de Sarma et al (2003) pour le S&P TSX 60……....84

Tableau 33 : Test de Sarma et al (2003) pour le S&P TSX Venture Composite…….....84

Liste des figures

Figure1: Représentation graphique de la valeur à risque…….…….4

Figure2: Interprétation graphique de la CVaR…….....7

Figure 3: Illustration de la skewness……..…11

Figure 4: Illustration du concept du kurtosis……..…12

Figure 5:Illustration de la distribution t de Student selon différents degrés de liberté.....…...14

Figure 6:Evolution du prix de clôture quotidien pour le S&PTSX 60 pour la période 2002 2014……...27

Figure 7:Evolution du prix de clôture quotidien pour le S&PTSX Venture Composite pour la période 2002-2014……...28

Figure 8:Evolution des rendements quotidiens pour le S&PTSX 60 sur la période 2002-2014……...29

Figure 9:Evolution des rendements quotidiens pour le S&PTSX Venture Composite sur la période 2002-2014…….29

Figure 10:Evolution des rendements historiques moyens pour la période 2002-2014(fenêtre roulante à 250 jours)…….…….31

Figure 11:Evolution des rendements historiques moyens pour la période 2002-2014(fenêtre roulante à 500 jours)……..31

Figure 12:Evolution de l'écart type des rendements pour la période 2002-2014(fenêtre roulante à 250 jours).....32

Figure 13:Evolution de l'écart type des rendements pour la période 2002-2014(fenêtre roulante à 500 jours)…….....…….32

Figure 14:Evolution de l'asymétrie des rendements pour la période 2002-2014(fenêtre roulante à 250 jours)……...…….33

Figure 15:Evolution de l'asymétrie des rendements pour la période 2002-2014(fenêtre roulante à 500 jours)……...…….33

Figure 16:Evolution du kurtosis des rendements pour la période 2002-2014(fenêtre roulante à 250 jours)……..…….34

Figure 17:Evolution du kurtosis des rendements pour la période 2002-2014(fenêtre roulante à 500 jours)…….....……..35

Figure 18 : VaR @5% modèle gaussien déterministe (fenêtre à 250 jours)……52

Figure 19 : VaR @1% modèle gaussien déterministe (fenêtre à 250 jours) ……52

Figure 20 : VaR @0.1% modèle gaussien déterministe (fenêtre à 250 jours) ……53

Figure 21 : CVaR @5% modèle gaussien déterministe (fenêtre à 250 jours) ……53

Figure 22 : CVaR @1% modèle gaussien déterministe (fenêtre à 250 jours)…….53

Figure 23 : CVaR @0.1% modèle gaussien déterministe (fenêtre à 250 jours) …….54

Figure 24 : VaR @5% modèle Student-t déterministe (fenêtre à 250 jours) …….…….54

Figure 25 : VaR @1% modèle Student-t déterministe (fenêtre à 250 jours)……...54

Figure 26 : VaR @0.1% modèle Student-t déterministe (fenêtre à 250 jours)……...….55

Figure 27 : CVaR @5% modèle Student-t déterministe (fenêtre à 250 jours)……...…….55

Figure 28 : CVaR @1% modèle Student-t déterministe (fenêtre à 250 jours)……..…..55

Figure 29 : CVaR @0.1% modèle Student-t déterministe (fenêtre à 250 jours)…….56

Figure 30 : VaR @5% modèle Cornish-Fisher déterministe (fenêtre à 250 jours)…….……56

Figure 31 : VaR @1% modèle Cornish-Fisher déterministe (fenêtre à 250 jours)……..…56

Figure 32 : VaR @0 .1% modèle Cornish-Fisher déterministe (fenêtre à 250 jours)……..57

Figure 33 : CVaR @5% modèle Cornish-Fisher déterministe (fenêtre à 250 jours)……...57

Figure 34 : CVaR @1% modèle Cornish-Fisher déterministe (fenêtre à 250 jours)……...57

Figure 35 : CVaR @0.1% modèle Cornish-Fisher déterministe (fenêtre à 250 jours)……58

Figure 36 : VaR @5% modèle gaussien déterministe (fenêtre à 500 jours)……58

Figure 37 : VaR @1% modèle gaussien déterministe (fenêtre à 500 jours)……58

Figure 38 : VaR @0.1% modèle gaussien déterministe (fenêtre à 500 jours)…….59

Figure 39 : CVaR @5% modèle gaussien déterministe (fenêtre à 500 jours)…….59

Figure 40 : CVaR @1% modèle gaussien déterministe (fenêtre à 500 jours)…….59

Figure 41 : CVaR @0.1% modèle gaussien déterministe (fenêtre à 500 jours)…….60

Figure 42 : VaR @5% modèle Student-t déterministe (fenêtre à 500 jours)……...60

Figure 43 : VaR @1% modèle Student-t déterministe (fenêtre à 500 jours)……...…60

Figure 44 : VaR @0.1% modèle Student-t déterministe (fenêtre à 500 jours)……61

Figure 45 : CVaR @5% modèle Student-t déterministe (fenêtre à 500 jours)……61

Figure 46 : CVaR @1% modèle Student-t déterministe (fenêtre à 500 jours)……61

Figure 47 : CVaR @0.1% modèle Student-t déterministe (fenêtre à 500 jours)…….62

Figure 48 : VaR @5% modèle Cornish-Fisher déterministe (fenêtre à 500 jours)…….62

Figure 49 : VaR @1% modèle Cornish-Fisher déterministe (fenêtre à 500 jours)…….62

Figure 50 : VaR @0 .1% modèle Cornish-Fisher déterministe (fenêtre à 500 jours)……..…63

Figure 51 : CVaR @5% modèle Cornish-Fisher déterministe (fenêtre à 500 jours)……...63

Figure 52 : CVaR @1% modèle Cornish-Fisher déterministe (fenêtre à 500 jours)……...…63

Figure 53 : CVaR @0.1% modèle Cornish-Fisher déterministe (fenêtre à 500 jours)……64

Figure 54 : VaR @5% modèle GARCH-Normal (fenêtre à 500 jours)……..64

Figure 55 : VaR @5% modèle GARCH-Normal (fenêtre à 500 jours)……..64

Figure 56 : CVaR @5% modèle GARCH-Normal (fenêtre à 500 jours)……65

Figure 57 : CVaR @5% modèle GARCH-Normal (fenêtre à 500 jours)……65

Figure 58 : VaR @5% modèle Student-t GARCH (fenêtre à 500 jours)…….65

Figure 59 : VaR @5% modèle Student-t GARCH (fenêtre à 500 jours)…….66

Figure 60 : CVaR @5% modèle Student-t GARCH (fenêtre à 500 jours)……..66

Figure 61 : CVaR @5% modèle Student-t GARCH (fenêtre à 500 jours)……..66

Figure 62 : VaR @5% modèle Cornish-Fisher GARCH (fenêtre à 500 jours)…….67

Figure 63 : VaR @5% modèle Cornish-Fisher GARCH (fenêtre à 500 jours)…….67

Figure 64 : CVaR @5% modèle Cornish-Fisher GARCH (fenêtre à 500 jours)…….67

Figure 65 : CVaR @5% modèle Cornish-Fisher GARCH (fenêtre à 500 jours)…….68

Figure 66 : VaR @5% modèle EGARCH-Normal (fenêtre à 500 jours)……68

Figure 67 : VaR @5% modèle EGARCH-Normal (fenêtre à 500 jours)……....68

Figure 68 : CVaR @5% modèle EGARCH-Normal (fenêtre à 500 jours)…….69

Figure 69 : CVaR @5% modèle EGARCH-Normal (fenêtre à 500 jours)…….69

Figure 70 : VaR @5% modèle Student-t EGARCH (fenêtre à 500 jours)……..69

Figure 71 : VaR @5% modèle Student-t EGARCH (fenêtre à 500 jours)……..……70

Figure 72 : CVaR @5% modèle Student-t EGARCH (fenêtre à 500 jours)……..….70

Figure 73 : CVaR @5% modèle Student-t EGARCH (fenêtre à 500 jours)……...70

Figure 74 : VaR @5% modèle Cornish-Fisher EGARCH (fenêtre à 500 jours)…….71

Figure 75 : VaR @5% modèle Cornish-Fisher EGARCH (fenêtre à 500 jours)…….71

Figure 76 : CVaR @5% modèle Cornish-Fisher EGARCH (fenêtre à 500 jours)…….71

Figure 77 : CVaR @5% modèle Cornish-Fisher EGARCH (fenêtre à 500 jours)……72

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude envers le professeur Georges Dionne pour son aide, sa disponibilité et pour m’avoir donné l'occasion de mener à bien ce projet.

Mon remerciement spécial est consacré à ma famille qui m’a toujours soutenu tout au long de mes études.

Introduction

Les dernières décennies ont vu un nombre croissant d'acteurs du marché se préoccuper de la précision des mesures de risque. Un défi majeur dans l'estimation précise du risque provient de la sélection adéquate de la distribution des séries de rendements financiers.

La valeur à risque (communément appelée VaR) est l'une des techniques de mesure des risques les plus populaires en finance. Cependant, malgré sa forte popularité comme un outil de gestion des risques, cette méthode a souvent été critiquée pour ses limites et de nombreux regards se tournent vers la valeur à risque conditionnelle (CVaR) qui est considérée comme un outil plus fiable pouvant produire de meilleures estimations.

Le présent travail démontre dans un premier temps l'impact de l'utilisation du coefficient d'asymétrie et du coefficient d'aplatissement dans la mesure du risque pour les titres canadiens à faible et à forte capitalisation et vient vérifier dans une deuxième étape que les résultats acquis à partir de calculs de VaR et de CVaR sont cohérentes et fiables et si la CVaR possède un réel avantage sur la VaR en mettant en place les tests rétroactifs appropriés.

Ce document est structuré comme suit : La section 1 présente les concepts relatifs à la VaR et a la CVaR, les sections 2 à 3 introduisent les différentes méthodes quantitatives que nous allons utiliser afin de modéliser le risque ainsi les tests rétroactifs appliquées à la VaR et à la CVaR, la section 4 décrit la méthodologie utilisée, les sections 5 à 8 exposent l'analyse approfondie de nos résultats. La dernière section présente quant à elle les conclusions globales de notre travail.

Section 1: Concepts relatifs à la valeur à risque et à la valeur à risque conditionnelle

Une mesure de risque de marché permet d'évaluer l'incertitude dans le rendement du portefeuille. Son objectif fondamental est de déterminer les écarts potentiels par rapport à une valeur cible.

Pour caractériser la dispersion des rendements d'un portefeuille, nous avons besoin de connaître les variations de prix pour chaque actif pris individuellement ainsi et la dépendance entre les mouvements des prix pour les différents titres constituants le portefeuille. De nos jours, la majorité les institutions financières utilisent la valeur à risque (VaR) afin de mesurer l'incertitude inhérente au marché.

La VaR représente la perte potentielle d'un portefeuille à un certain niveau de probabilité pour une période de détention donnée. Elle joue actuellement un rôle primordial dans l'évaluation et la gestion des risques des institutions financières et des investisseurs institutionnels. Sa simplicité et sa flexibilité ont grandement contribué à sa forte popularité.

Néanmoins, suite à la crise financière et aux événements extrêmes qui se sont produits sur les marchés financiers partout dans le monde, les régulateurs et les institutions financiers se sont dernièrement intéressés à une autre mesure de risque, la valeur a risque conditionnelle (CVaR) qui se défini comme l'espérance des pertes conditionnelles à ce que ces pertes dépassent la VaR. Elle peut être aussi interprétée comme la moyenne des VaRs à la gauche d'un certain niveau choisi de VaR.

Dans la suite de ce travail, nous nous attarderons sur ces deux mesures de risque ainsi que les concepts qui s'y rattachent.

1.1. Définition de la valeur à risque

Chaque individu qui a investi ou qui envisage d'investir dans un actif risqué se demande qu'elle est la valeur maximale qu'il peut se permettre de perdre sur son investissement. La valeur à risque tente d'apporter une réponse à cette question.

Dans sa forme la plus générale, La valeur à risque mesure la perte qu'un investisseur ou une société peut s'attendre à réaliser sur une période de détention définie avec un degré de confiance donné - disons 95%, 99% ou 99.9%.

Ainsi, si la VaR journalière à un niveau de confiance de 95% pour un actif donné est de 100 millions de dollars d'une journée, il y aura seulement 5% de chances que la valeur de l'actif baisse de plus de 100 millions de dollars sur une journée.

La valeur à risque est fréquemment utilisée par les banques commerciales et les banques d'investissement pour capturer la perte potentielle de la valeur de leurs portefeuilles suite aux fluctuations défavorables du marché sur une certaine période. Cette valeur peut ensuite être comparée aux réserves de capital et à la trésorerie disponible pour s'assurer que les pertes peuvent être couvertes sans mettre les institutions en péril.

La VaR possède deux paramètres de base:

• Le niveau de signification α (nous pouvons aussi définir le niveau de confiance (1−α));

• L'horizon temporel, h, qui est la période de temps, traditionnellement mesurée en jours ouvrables, sur laquelle la VaR est mesurée

1.2. Formulation mathématique de la valeur à risque

Dans la section précédente, nous avons définit la VaR comme la perte, suite aux fluctuations du marché, que nous sommes raisonnablement confiants de ne pas dépasser sur une certaine période de temps.

En termes mathématiques, la VaR à h-jour pour le niveau de confiance (1-α) représente le montant de la perte qui serait dépassée avec la probabilité α lorsque le portefeuille est détenu de façon statique au cours des h prochains jours.

Par conséquent, pour estimer la VaR à l'instant t, nous devons trouver le quantile $x_{h,a}$ de la distribution des rendements à h-jours $R_{t,h}$; nous devons donc identifier $x_{h,a}$ de telle sorte que

$$p\,(\,R_{t,h} \leq x_{t,h,a}\,) \;= \alpha$$

Nous définissons par la suite

$$VaR_{t,h,a} \;= x_{t,h,a}$$

Le schéma suivant représente l'illustration de la formulation mathématique de la VaR

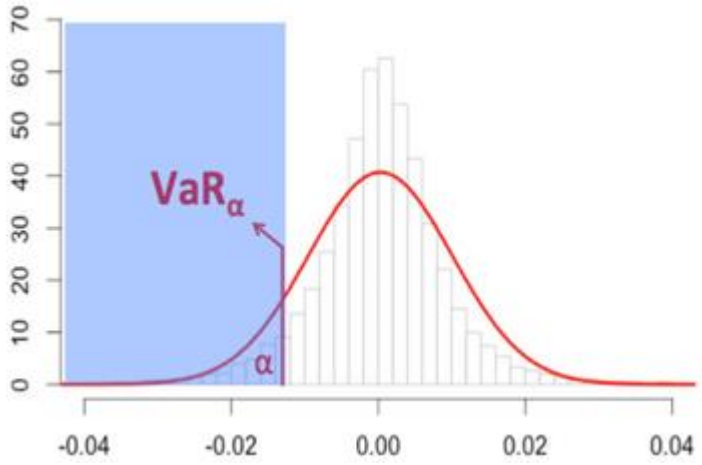


Figure1: Représentation graphique de la valeur à risque

Les modèles mathématiques de rendements peuvent être d'un grand intérêt parce qu'ils sont mesurés en termes relatifs et sont donc comparables sur de longues périodes de temps, même lorsque les niveaux de prix ont considérablement varié.

1.3. Méthodes communément utilisées pour calculer la VaR

Les méthodes les plus couramment utilisées pour calculer la VaR sont :

• La simulation historique;

• La méthode paramétrique;

• Les simulations Monte-Carlo

1.3.1. Simulation historique

La méthode de simulation historique pour le calcul de la VaR ne nécessite pas d'imposer des hypothèses sur la distribution des rendements.

Cette approche est basée sur les étapes suivantes:

• Calcul des rendements de chaque actif entre deux périodes successives de temps.

• Tri de la série des rendements de la plus basse à la plus haute valeur.

• La VaR est donnée par la valeur du α ème centile dans la série des rendements triés.

1. 3.2. Méthode paramétrique

Selon cette méthode, une hypothèse sur la distribution des rendements doit être faite.

Les étapes à suivre sont les suivantes:

• Supposer une distribution pour les rendements.

• Déterminer les paramètres pertinents de la distribution choisie en calibrant les rendements historiques à cette dernière.

• Calculer la VaR en utilisant les paramètres de la distribution.

La distribution gaussienne est souvent utilisée car elle a pour avantage de simplifier les calculs puisque nous avons seulement besoin de calculer la moyenne et l'écart type de la série de rendements.

1.3.3. Simulation Monte Carlo

Les deux premières étapes d'une simulation de Monte Carlo ne diffèrent pas des deux premières étapes de la méthode paramétrique, c'est dans la troisième étape que les différences apparaissent.

Une fois que la distribution des rendements a été spécifiée, nous commençons le processus de simulation, générant ainsi un grand nombre d'observations aléatoires selon la fonction de répartition choisie. Après une série répétée de simulations, nous aurons une distribution de rendements que nous utiliserons pour évaluer la valeur à risque.

1.4. La valeur à risque conditionnelle

Supposons que nous détenons un portefeuille qui ne devrait pas perdre plus de 100 milles dollars par jour avec une probabilité de 5% selon le critère de la VaR (c'est-à-dire $VaR_{1\ jour,5\%}$ =100 000 $).

Il faut cependant considérer qu'il y a une possibilité que le portefeuille en question réalise une perte journalière de 100 milles dollars, voire même plus dans 5% des cas.

Ainsi, bien que la valeur à risque définisse un niveau de perte qui ne sera raisonnablement pas dépassée avec un certain niveau de confiance pendant un laps de temps donné, elle n'indique pas l'ampleur de la perte qui pourrait être réalisée si la VaR est dépassée.

La valeur à risque conditionnelle (CVaR) permet de combler cette limite du fait qu'elle prend en compte les informations sur l'ensemble des pertes au-delà de la frontière de la VaR.

La CVaR, tout comme la VaR, est une fonction de deux paramètres: l'horizon temporelle exprimé en jours h et le niveau de confiance (1-α).

Elle représente la perte espérée sous réserve que cette perte soit supérieure au α ème centile de la distribution, c'est-à-dire qu'elle dépasse la VaR correspondant à ce niveau de confiance.

1.5. Formulation mathématique de la CVaR

La CVaR au niveau de confiance (1-α) sur un horizon de h jours ($CVaR_{h,\alpha}$) est la perte espérée du portefeuille étant donné que la $VaR_{h,\alpha}$ est dépassée. Ainsi, elle peut être statistiquement décrite comme suit:

$$CVaR_{h,a} = E\,(R_h \,|R_h < VaR_{h,a})$$

$$CVaR_{h,a} = \frac{1}{1-a}\int_{a}^{1} VaR_{h,ß}(X)dß$$

Avec:

$$\begin{cases} R_h & \text{Le rendement du portefeuille au cours h jours} \\ VaR_{h,a} & \text{La VaR à h jours correspondant au niveau de confiance}(1-a) \end{cases}$$

Pour une série de rendements donné, la relation $CVaR_{h,a}(X) \geq VaR_{h,a}(X)$ est toujours vérifiée.

L'interprétation graphique de la CVaR est présentée dans le graphe suivant:

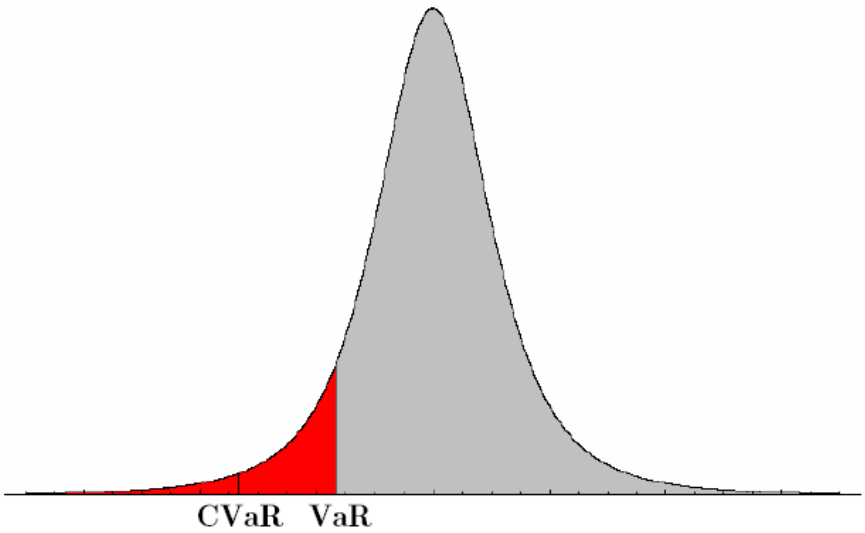


Figure2: Interprétation graphique de la CVaR

1.6. Méthode numérique pour calculer la CVaR en utilisant les VaRs moyennes

En pratique, la CVaR peut être estimée comme une moyenne des VaRs à la queue de la distribution.

La meilleure façon de mettre en œuvre cette approche selon Dowd (2002) est de couper la queue de la distribution en un nombre important de tranches, chaque tranche ayant la même distribution de probabilité, afin d'estimer par la suite la VaR associée à chaque tranche.

La CVaR est obtenue en calculant la moyenne de ces VaRs.

$$CVaR_{h,a} = \frac{VaR_{h,(a-k)} + VaR_{h,(a-2k)} + \cdots + VaR_{h,(a-nk)}}{n}$$

Avec: $\begin{cases} (1-\alpha) & \text{le niveau de confiance} \\ \text{n} & \text{le nombre de tranches} \\ k = \frac{\alpha}{\text{n}} & \text{la largeur de chaque tranche} \end{cases}$

Dowd (2002) donne aussi un exemple d'estimation de la CVaR au niveau de confiance de 95% pour une distribution Normale avec une moyenne de 0 et un écart type 1 qui est présentée dans le tableau ci-dessous pour illustrer la procédure d'estimation de la CVaR utilisée dans le présent document.

Tail VaRs α	Tail VaR
At 95.5	1.6954
At 96.0	1.7507
At 96.5	1.8119
At 97.0	1.8808
At 97.5	1.9600
At 98.0	2.0537
At 98.5	2.1701
At 99.0	2.3263
At 99.5	2.5758
Average of Tail VARs	**1.9870**

Tableau 1 : Procédure d'estimation de la CVaR selon Dowd(2002)

Pour obtenir de bonnes estimations de la CVaR, nous devrions couper la queue en un grand nombre de tranches. Comme nous pouvons le voir dans le tableau ci-dessus, si nous utilisons n = 10, l'estimation de la CVaR est de 1,9870, si nous utilisons un nombre de tranches n supérieure à 1000, la valeur estimée de la CVaR se rapproche de la vraie valeur qui est de 2,061. Pour notre travail, nous avons utilisé un certain nombre de tranche n égal à 5000.

Section 2: Modèles quantitatifs

2.1. Introduction

Dans cette section, nous allons explorer différents modèles pour calculer les estimations de la VaR et de la CVaR.

Ces modèles peuvent être classés comme suit:

Modèles déterministes (volatilité Constante)

- Distribution Normale;
- Ajustement de Cornich-Ficher ;
- Distribution t de Student.

Modèles stochastiques (volatilité conditionnelle)

- GARCH(1,1) avec innovations normalement distribuées;
- GARCH(1,1) dont les innovations suivent la distribution t de Student ;
- EGARCH(1,1) avec innovations normalement distribuées;
- EGARCH(1,1) dont les innovations suivent la distribution t de Student

2.2. Modèles déterministes

2.2.1. VaR Normale

Dans le modèle de la VaR suivant une distribution Gaussienne nous supposons que les rendements à h-jour sont indépendants et normalement distribués:

$$R_h \sim \mathrm{N}\ (\mu_h;\sigma_h)$$

Les paramètres μ_h et σ_h représentent respectivement le rendement moyen et l'écart type des rendements.

Comme indiqué dans les sections précédentes, la VaR est définie comme suit:

$$p(R_{t,h} < VaR_{h,a}) = a$$

$$p\ (\ R_{t,h} < VaR_{h,a}\ )\ = p\left(\frac{R_{t,h} - \mu_{t,h}}{\sigma_{t,h}} < \frac{VaR_{h,a}\ - \mu_{t,h}}{\sigma_{t,h}}\right)$$

$$= p\left(\mathrm{Z} < \frac{VaR_{h,a}\ - \mu_{t,h}}{\sigma_{t,h}}\right)$$

Où Z est une variable Normale standardisée. Ainsi :

$$\frac{VaR_{h,a}\ - \mu_{t,h}}{\sigma_{t,h}} = \phi^{-1}(a) = z_a$$

Où ϕ-1 (a) est la valeur du quantile Normale standardisé a, par exemple:

$$\phi^{-1}(0.05) = -1.644$$

Nous pouvons par la suite calculer la VaR comme suit:

$$VaR_{h,a}\ = \mu_{t,h} + \sigma_{t,h}\ \phi^{-1}(a)$$

Ainsi, pour calculer la VaR normale, nous n'avons besoin que de deux paramètres à savoir la moyenne et l'écart type des rendements historiques.

Une fois que la VaR est calculée, nous pouvons estimer la CVaR en utilisant la méthodologie de Dowd(2002) décrite dans la section 1.6

2.2.2. VaR Cornish-Fisher

Malgré sa popularité, la distribution Normale ne reflète pas toujours la réalité du marché.

En effet, elle suppose que la distribution des rendements est symétrique autour de la moyenne et que la queue de la distribution est très mince.

En d'autres termes la distribution Gaussienne implique que la survenue d'événements extrêmes soit particulièrement peu fréquente, voire extrêmement rare.

L'ajustement de Cornish-Fisher prend en compte ces deux facteurs, la VaR est ainsi adaptée en prenant en compte la skewness de la distribution (qui reflète l'asymétrie) et le kurtosis (c'est-à-dire l'épaisseur des queues de distribution).

- ***Skewness***: décrit l'asymétrie pour un ensemble de données statistiques.

  L'asymétrie peut être négative ou positive selon le sens d'orientation des données par rapport à la moyenne, une orientation vers la gauche reflète une asymétrie négative alors que celle à droite décrit une asymétrie positive.

  La figure ci-dessous illustre les différences entre une distribution Normale et une distribution asymétrique.

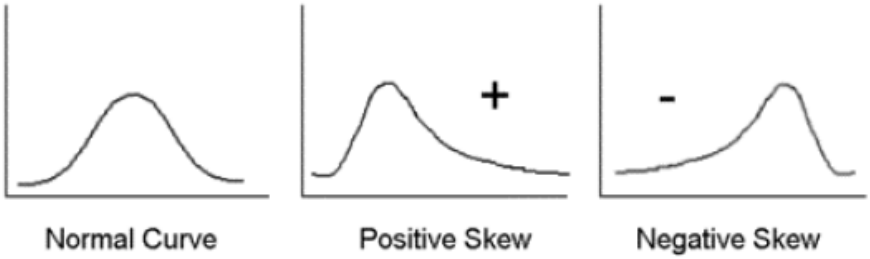


Figure 3: Illustration de la skewness

- ***Kurtosis***: Le quatrième moment est un indicateur statistique mesurant l'aplatissement de la distribution des données par rapport à une distribution Normale.

  Ce coefficient permet de décrire la façon dont les données sont concentrées autour de la moyenne.

  Les données avec un coefficient d'aplatissement élevé (supérieur à 3) sont appelés leptokurtiques et ont tendance à avoir un pic distinctif près de la moyenne, à décliner rapidement, et à posséder des queues plus épaisses.

  Les données avec un faible coefficient d'aplatissement (inférieur à 3) sont appelés platicurtiques et ont tendance à avoir un sommet plat près de la moyenne plutôt qu'un pic pointu.

  La figure suivante illustre le concept de l'aplatissement des queues de distribution à travers une comparaison entre une distribution Normale et une distribution leptokurtique:

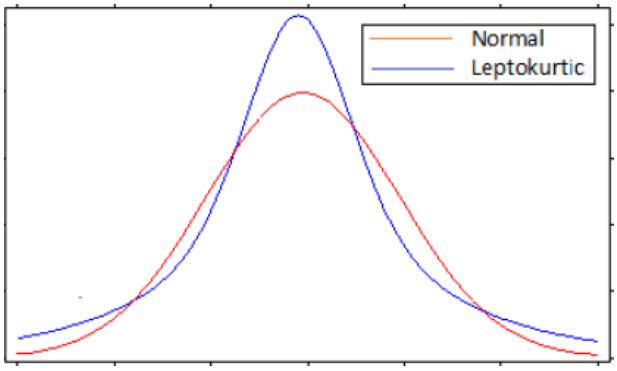


Figure 4: Illustration du concept du kurtosis

Au sein du présent document, les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement sont calculés comme suit:

$$Skewness = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{R_i - \mu}{\sigma}\right)^3$$

$$Kurtosis = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{R_i - \mu}{\sigma}\right)^4$$

Avec: $\begin{cases} \text{N: nombre d'observations} \\ R_i\text{: rendements , i} = 1, \dots, \text{N} \\ \mu : \text{rendement moyen} \\ \sigma : \text{ écart type des rendements} \end{cases}$

L'ajustement de Cornish-Fisher prend en compte à la fois l'asymétrie et l'aplatissement des données en transformant le quantile Normale z_a comme suit :

$$w_a = f(z_a) = f(\phi^{-1}(a)) < 0$$

$$w_a = z_a + \frac{1}{6}({z_a}^2 - 1)SK + \frac{1}{24}({z_a}^3 - 3z_a)K - \frac{1}{36}(2{z_a}^3 - 5z_a)SK^2$$

Avec: $\begin{cases} z_a = \phi^{-1}(a) \text{ quantile de la loi Normale} \\ \text{SK} \quad \text{Coefficient d'asymétrie} \\ K \quad \text{Coefficient d'aplatissement} \end{cases}$

Par la suite, nous calculons la VaR en utilisant la même formule que dans la méthode Normale, mais avec le nouveau quantile ajusté w_a:

$$VaR_{h,a} = \mu_{t,h} + \sigma_{t,h}\, w_a$$

Une fois que la VaR est calculée, nous pouvons estimer la CVaR en utilisant la méthodologie de Dowd(2002) décrite dans la section 1.6.

2.2.3. Student-t VaR

Une autre alternative au modèle normal est de considérer dès le début une distribution leptokurtique des rendements.

La distribution t de Student est une bonne candidate puisque sa fonction de densité possède un pic et des queues plus épaisses relativement à la distribution Gaussienne.

La distribution t de Student avec un degré de liberté ν possède la fonction de densité suivante :

$$f_v(t) = (v\pi)^{-\frac{1}{2}}\ \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)(1 + v^{-1}t^2)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)}$$

$$\text{Avec: } \begin{cases} \Gamma & fonction\ gamma \\ v & degré\ de\ liberté \end{cases}$$

La distribution possède une moyenne nulle est une asymétrie de zéro. Pour ν> 2 la variance d'une variable distribuée selon la loi de Student n'est pas égale à 1

$$\sigma^2 = \frac{v}{v-2}$$

Son excédant d'aplatissement est finie pour ν> 4, et est donné par

$$kurtosis = \frac{6}{v-4}$$

Nous remarquons donc que plus le degré de liberté est élevé, plus le coefficient d'aplatissement est faible (c'est à dire que les queues de distribution sont plus fines).

Lorsque le degré de liberté tend vers l'infini, la distribution de Student tend vers la Normale équivalente. La figure suivante illustre ce fait:

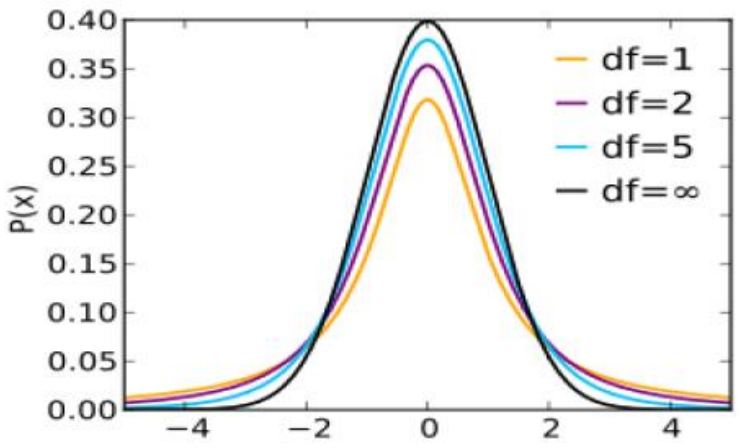


Figure 5: Illustration de la distribution t de Student selon différents degrés de liberté

<u>Calcul de la VaR :</u>

Soit T une variable aléatoire suivant une distribution t de Student et μ_h et σ_h désignent respectivement la moyenne et l'écart type à h-jours de notre série de rendements.

Pour calculer la VaR pour notre série de rendements suivant la distribution t de Student, nous devons utiliser la transformation suivante car la variance de la distribution t de Student est égale à $\frac{v}{v-2}$ et non pas à 1 :

$$R_h = \mu_h + \sqrt{\frac{(v-2)}{v}} \times \sigma_h \times T$$

Par conséquent, la formule de la VaR est donnée par:

$$VaR_{h,a} = \mu_h + \sqrt{\frac{(v-2)}{v}} \times \sigma_h \times t^{-1}(a)$$

Ou $t^{-1}(\alpha)$ représentant le quantile de la distribution t de Student correspondant au niveau de confiance (1-α).

Une fois que la VaR est calculée, nous pouvons estimer la CVaR en utilisant la méthodologie de Dowd(2002) décrite dans la section 1.6.

2.3. Modèles stochastiques

Dans la première partie de notre travail, nous avons utilisé une variété de distributions afin de calculer la valeur à risque et la valeur à risque conditionnelle en supposant que les rendements

sont **iid** (indépendants et identiquement distribués) et en utilisant la volatilité inconditionnelle. Cependant, cette méthode présente quelques inconvénients.

En effet, elle ne tient pas compte de l'information sur la volatilité passée et elle donne le même poids à tous les rendements ce qui est contre la nature hétéroscédastique des données financières.

En outre, l'hypothèse que les rendements sont iid est irréaliste pour les séries chronologiques financières.

Dans la pratique, les données financières sont caractérisées par:

• la dépendance des séries

• l'hétéroscédasticité (volatilité variable au fil du temps)

• les queues épaisses et la distribution asymétrique des données.

Divers modèles ont été proposés pour décrire ces caractéristiques, l'un des plus populaires et des plus efficaces est le suivant:

$$R_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t Z_t$$

Avec: $\begin{cases} R_t \text{ la série des rendements} \\ \mu \text{ la moyenne empirique} \\ \varepsilon_t \text{ la série des résidus} \end{cases}$

Dans notre contexte, Z_t est une série de variables aléatoires normalisées indépendantes et identiquement distribuées et σ_t est un processus stochastique non négatif tel que Z_t et σ_t sont indépendants.

Selon ce modèle, la direction des variations de prix est modélisée par le signe de Z_t , indépendamment de l'ampleur de cette variation qui est dirigée par le terme de volatilité σ_t.

Ceci est cohérent avec les éléments empiriques démontrant qu'il est difficile, voire impossible, de prédire le signe d'une fluctuation des prix.

Un modèle de variance conditionnelle aborde le phénomène du regroupement de volatilité (volatility clustering) des séries financières en spécifiant l'évolution dynamique de la variance des innovations.

$\sigma^2{}_t = Var\ (\varepsilon_t \mid H_{t-1})$,

H_{t-1} représente l'historique du processus qui contient:

- Les variances passées, $\sigma^2{}_1, \sigma^2{}_2, \ldots, \sigma^2{}_{t-1}$
- Les innovations passées, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{t-1}$

Le modèle autorégressif conditionnellement hétéroscédastique (ARCH) développé par R.Engle (1982) capture ce regroupement de volatilité. T. Bollerslev (1986) a généralisé ce processus en introduisant le modèle GARCH qui se défini comme suit :

$$\sigma_t^2 = \kappa + \sum_{i=1}^{P} \gamma_i\, \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{Q} \lambda_j\, \varepsilon_{t-j}^2$$

A des fins de stationnarité et pour s'assurer que la variance soit non négative, le modèle GARCH présente les contraintes suivantes :

- $\kappa > 0$
- $\gamma_i \geq 0$
- $\lambda_j \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{P} \gamma_i + \sum_{j=1}^{Q} \lambda_j < 1$

Bien que le modèle GARCH parvienne à capturer plusieurs caractéristiques inhérentes aux séries financières, telles que l'épaisseur des queues de distribution des rendements et le regroupement de volatilité, sa structure présente certaines faiblesses.

En effet, selon le modèle GARCH, la variance dépend exclusivement de l'ampleur et non pas du signe des innovations ε_t , ce qui est dans une certaine mesure en contradiction avec le comportement empirique des prix dans les marchés boursiers qui sont beaucoup plus sensibles aux baisses importantes ($\varepsilon_t < 0$) qu'aux fortes augmentations ($\varepsilon_t > 0$).

Les modèles ARCH asymétriques ont été introduits afin de capturer cet effet levier caractérisant les données; l'un des plus populaires asymétriques est le processus GARCH exponentiel (EGARCH) de Nelson (1991) qui se défini comme suit :

$$\ln(\sigma_t^2) = \kappa + \sum_{i=1}^{P} \gamma_i \ln(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^{Q} ß_j \left[\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - E\left\{ \frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right\} \right] + \sum_{j=1}^{Q} \xi_j \left(\frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}} \right)$$

Le modèle EGARCH rajoute un terme de levier ξ dans le but de capturer l'asymétrie dans le groupement de volatilité.

La forme des termes d'espérance associée aux coefficients ARCH dans l'équation précédente dépend de la distribution des ε_t:

- Si les innovations sont normalement distribuées :

$$E\left\{\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

- Si les innovations suivent une distribution t de Student avec un degré de liberté $v > 2$, nous aurons alors :

$$E\left\{\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}}\right\} = \sqrt{\frac{v-2}{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{v-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}$$

Dans le présent travail, nous modéliserons les rendements quotidiens sous les processus stochastiques GARCH (1, 1) et EGARCH (1, 1) avec des innovations Gaussiennes, puis avec des innovations distribuées selon la loi de Student afin de prendre en compte l'épaisseur des queues de distribution.

Pour l'estimation des paramètres, la technique du maximum de vraisemblance sera appliquée.

Section 3: Tests rétroactifs

Dans les sections précédentes, nous avons discuté de différentes méthodes de calcul de la VaR et de la CVaR. Il faut néanmoins garder à l'esprit que les modèles de VaR ne sont utiles que s'ils reflètent rigoureusement les risques.

Par conséquent, nous devons évaluer la précision de nos estimateurs de risque en vérifiant s'ils sont compatibles avec les rendements historiques compte tenu du niveau de confiance sur lequel les VaRs ont été calculées.

Afin d'évaluer la qualité des estimations, nous allons procéder à une série de tests pour déterminer la performance de nos modèles; cette procédure est appelée tests rétroactifs (backtesting).

3.1. Tests rétroactifs appliqués à la VaR

Nous définissons une exception (ou violation) lorsque le rendement observé est inférieur à la valeur estimée de la VaR.

Les tests couramment utilisés pour évaluer la robustesse d'un modèle de VaR consistent à compter le nombre d'exceptions.

Un nombre d'exceptions inférieur au niveau de confiance choisi indiquerait que le système surestime le risque alors qu'un nombre plus élevé signalerait une sous-estimation du risque.

Nous devrons également vérifier que le modèle de VaR en question ne produit pas seulement la quantité acceptable d'exceptions, mais aussi des exceptions qui sont uniformément réparties sur le temps (indépendantes dans le temps)

Nous allons donc tester si la fréquence des exceptions est statistiquement en ligne avec le niveau de confiance sélectionné et si les exceptions semblent être indépendantes d'une période à l'autre.

Commençons par définir la variable indicatrice I_t qui contiendra la série des exceptions:

$$I_t = \begin{cases} 1 \;\; si \;\; R_t < \; VaR_t \\ 0 \;\; si \; R_t \geq VaR_t \end{cases}$$

Introduisons par la suite les notations suivantes :

- T: nombre d'observations
- T_0: nombre d'observations pour lesquelles $I_t = 0$
- N: nombre d'observations pour lesquelles $I_t = 1$: **Nombre d'exceptions dans notre série**
- n_{00}: nombre d'observations pour lesquelles $I_{t-1} = 0$ suivi par $I_t = 0$
- n_{10}: nombre d'observations pour lesquelles $I_{t-1} = 1$ suivi par $I_t = 0$
- n_{01}: nombre d'observations pour lesquelles $I_{t-1} = 0$ suivi par $I_t = 1$
- n_{11}: nombre d'observations pour lesquelles $I_{t-1} = 1$ suivi par $I_t = 1$

Au sein de ce travail, nous allons utiliser les procédures de backtesting qui sont basées sur les propriétés statistiques des queues de distribution, à savoir le test de Kupiec (1995) et le test de Christoffersen (1998).

3.1.1Couverture inconditionnelle: test de Kupiec (1995)

Le test de couverture inconditionnelle a pour but d'évaluer si la fréquence des exceptions est compatible avec le quantile de la perte que la VaR est censée refléter.

Soit N le nombre d'exceptions et T le nombre total d'observations, nous pouvons définir la fréquence des exceptions $\pi = \frac{N}{T}$; idéalement, ce taux devrait refléter le niveau de confiance choisi.

Le test de Kupiec (1995) nous permet de vérifier l'hypothèse nulle que la fréquence des exceptions $\pi = \frac{N}{T}$ est égale au niveau de signification α que nous utilisons lors du calcul de la VaR.

En d'autres termes:

$$H_0 : \pi = \alpha$$

La fréquence des exceptions suit une loi de distribution Binomiale N ~ B(T, p).

Conséquemment le rapport de vraisemblance approprié, sous l'hypothèse nulle $\frac{N}{T} = \alpha$ est:

$$2\ ln\left[\left(1-\frac{N}{T}\right)^{T-N}\left(\frac{N}{T}\right)^{N}\right] - 2\ ln[(1-\alpha)^{T-N}\alpha^{N}]$$

Asymptotiquement, la statistique de test suit une loi χ2 avec un degré de liberté. Si la valeur du ratio de vraisemblance dépasse la valeur critique, nous pouvons rejeter l'hypothèse nulle.

Il est d'usage de prendre un niveau de confiance de 10% pour effectuer le test; les valeurs critiques pour un niveau de confiance de 10% sont 2,705 pour un degré de liberté et de 4,605 pour deux degrés de liberté.

3.1.2 Couverture conditionnelle : test de Christoffersen (1998)

Les tests de couverture inconditionnelle, comme le test Kupiec(1995), se concentrent uniquement sur le nombre d'exceptions. En théorie cependant, nous nous attendons à ce que ces exceptions soient réparties uniformément dans le temps, le regroupement des exceptions indiquant que le modèle ne parvient pas à capturer avec précision les variations de la volatilité du marché

Un test plus élaboré a été proposé par Christoffersen (1998) qui a développé un rapport de vraisemblance pour tester l'hypothèse conjointe de la couverture inconditionnelle et de l'indépendance des exceptions. Le principal avantage de ce test est de distinguer les effets du groupement des exceptions des effets des hypothèses de distribution.

Soit n_{ij} le nombre d'observations pour lesquelles l'évènement j s'est produit suite à la survenue de l'évènement i le jour précèdent. Nous définissons par la suite π_{ij} qui représente la probabilité d'observer l'événement j conditionnellement au fait que l'événement i se soit produit la veille:

$$\pi_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_j n_{ij}}$$

Les valeurs i, j = 1 indique qu'une exception a été réalisée, tandis que i, j = 0 indique le contraire.

Si la série des n_{ij} obtenue est indépendante, une exception aujourd'hui ne devrait pas dépendre de la réalisation ou non d'une exception la veille, en d'autres termes, sous l'hypothèse nulle et π_{01} et π_{11} doivent être égales.

$$H_0 : \pi_{01} = \pi_{11} \ (= \pi \ )$$

En combinant ce test d'indépendance avec le test de Kupiec (1995), nous obtenons un test conjoint qui examine les propriétés d'un bon modèle de la VaR, à savoir une fréquence correcte et l'indépendance pour les exceptions:

$$H_0 : \pi_{01} = \pi_{11} = \pi \quad and \quad \pi = \alpha$$

La statistique de test se calcule comme suit**:**

$$-2\, ln[(1-\alpha)^{T-N}\alpha^{N}] + 2\, ln\left[(1-\pi_{01})^{n_{00}}\, \pi_{01}^{n_{01}}(1-\pi_{11})^{n_{10}}{\pi_{11}}^{n^{11}}\right]$$

Asymptotiquement, la statistique de test suit elle aussi une loi χ2 mais avec deux degrés de liberté. Si la valeur du ratio de vraisemblance dépasse la valeur critique, nous pouvons rejeter l'hypothèse nulle.

Il est d'usage de prendre un niveau de confiance de 10% pour effectuer le test; les valeurs critiques pour un niveau de confiance de 10% sont 2,705 pour un degré de liberté et de 4,605 pour deux degrés de liberté.

3.2. Tests rétroactifs appliqués à la CVaR

Malgré la forte relation théorique entre la VaR et la CVaR, ces deux mesures de risque possèdent des propriétés complètement différentes.

La VaR est une estimation du centile de la distribution des rendements, c'est à dire un seul point dans la distribution alors que la CVaR représente la valeur espérée des rendements au-delà du centile de la VaR, c'est à dire une estimation qui prend en compte tous les points au-delà du centile de la VaR. De ce fait, les tests rétroactifs conçus pour la VaR ne peuvent pas être utilisés directement pour la CVaR.

En octobre 2013, le Comité de Bâle a proposé d'adopter la valeur a risque conditionnelle comme alternative à la VaR car elle permettrait, selon les régulateurs, de mieux saisir les pertes extrêmes qui peuvent se produire en période de crise systémique tout en continuant à utiliser la VaR pour effectuer le backtesting en raison de la difficulté d'implémenter des tests rétroactifs pour la CVaR.

Ainsi, l'apparente complexité du backtesting de la CVaR comparativement à celui de la VaR est l'une des raisons principales ayant conduit à l'exclusion de la CVaR du cadre règlementaire du comité de Bâle.

Le 22 Octobre 2014, MSCI Inc. (NYSE: MSCI), a annoncé avoir mis au point, en collaboration avec Carlo Acerbi, Ph.D. et directeur exécutif à MSCI et Balazs Szekely, Ph.D. et chercheur principal au MSCI, une méthodologie pour tester la valeur à risque conditionnelle.

Au sein de ce document, nous utiliserons la méthode de backtesting mise au point par Carlo Acerbi et Balazs Szekely dans leur article « Backtesting Expected Shortfall » datant du 21 janvier 2015.

Soit F_t la distribution réelle (non observable) de nos données qui est inconnue et P_t la distribution théorique que nous avons adoptée pour chacun de nos modèles (à savoir la distribution Normale, la distribution t de Student et la distribution Normale avec ajustement Cornish-Fisher).

Nous pouvons calculer la CVaR grâce à la formule ci-dessous

$$CVaR_{t,a} = -E\left[R_t | R_t + VaR_{t,\alpha} < 0\right]$$

Nous allons tester les hypothèses suivantes :

H_0 : $P_t^a = F_t^a$ (le modèle est adéquat)

H_1 : $CVaR_{t,a}^P < CVaR_{t,a}^F$ (le modèle sous-estime le risque tel que mesuré par la CVaR)

<u>Méthode 1: Tester la CVaR Après avoir tester la VaR</u>

A partir de la relation suivante :

$$E\left[\frac{R_t}{CVaR_{t,\alpha}} | R_t + VaR_{t,\alpha} < 0\right] + 1 = 0$$

Nous obtenons :

$$Z_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{R_t I_t}{CVaR_{t,\alpha}}}{\sum_{t=1}^{T} I_t} + 1$$

$$E_{H_0}[Z_1] = 0 \; et \;\; E_{H_1}[Z_1] < 0$$

La statistique Z_1 est sensible à la magnitude des exceptions mais pas à leurs fréquences.

<u>Méthode 2: Tester la CVaR directement</u>

A partir de la relation

$$E\left[\frac{-R_t\, I_t}{\alpha}\right] = CVaR_{t,\alpha}$$

Nous définissons

$$Z_2 = \sum_{t=1}^{T} \frac{R_t\, I_t}{T\, \alpha\, CVaR_{t,\alpha}} + 1$$

$$Z_2 = 1 - (1 - Z_1)\frac{\sum_{t=1}^{T} I_t}{T\, \alpha}$$

$$E_{H_0}[Z_2] = 0 \; et \;\; E_{H_1}[Z_2] < 0$$

La statistique Z_2 est sensible à la fois à l'ampleur et à la fréquence des exceptions.

Pour ces deux tests, le calcul des valeurs critiques nécessite en principe une simulation Monte Carlo, les auteurs ont cependant remarqué que le deuxième test (Z_2) affiche une remarquable stabilité des seuils critiques par rapport à l'épaisseur des queues de distribution (reflétées par le degré de liberté v), qui couvrent tous les cas financièrement réalistes comme le montre le tableau suivant

	Significance					
	5%			0.01%		
	location			location		
ν	-1	0	1	-1	0	1
3	-0.78	-0.82	-0.88	-3.9	-4.4	-5.5
5	-0.72	-0.74	-0.78	-1.9	-2.0	-2.3
10	-0.70	-0.71	-0.74	-1.8	-1.9	-1.9
100	-0.70	-0.70	-0.72	-1.8	-1.8	-1.9
Gaussian	-0.70	-0.70	-0.72	-1.8	-1.8	-1.9

Au sein de ce travail, nous utiliserons la statistique de test Z_2 avant de vérifier la fiabilité de nos estimateurs de la CVaR obtenus selon les différents modèles.

Nous jugerons les modèles (Acceptation / rejet) en nous basant sur le niveau de signification de 5%. Une valeur de la statistique de test inférieure à **-0.70** engendre le rejet du modèle car il sous-estime le risque.

3.3. Choix du modèle adéquat

Les tests décrits ci-dessus permettent de déduire si une méthode spécifique génère des estimations précises de la VaR. Si l'hypothèse nulle ne peut être rejetée, nous allons caractériser le modèle comme étant adéquat.

Cependant, dans la plupart des cas, plus d'un modèle est jugé adéquat et donc, le gestionnaire des risques ne peut pas conclure si un modèle jugé adéquat est plus précis qu'un autre en utilisant seulement les tests précédents.

Pour pallier à cet inconvénient des tests rétroactifs, Lopez (1999) a suggéré de mesurer la précision des modèles de VaR sur la base de la distance entre les rendements observés et les valeurs de VAR estimées. Il définit la fonction de perte suivante:

$$\Psi_t = \begin{cases} \mathbf{1} + (VaR_t - R_t)^2, & R_t < VaR_t \\ 0 \quad , & R_t \geq VaR_t \end{cases}$$

Cette fonction prend en considération l'ampleur des pertes de la queue $(VaR_t - R_t)^2$ et ajoute un score de un à chaque fois qu'une violation est observée.

En utilisant cette fonction de perte, Lopez ne pénalise que les scénarios pour lesquels les rendements observés sont inférieurs à la VaR estimée. Cependant, une bonne mesure de risque ne doit ni surestimer ni sous-estimer le "vrai" risque.

Angelidis et al. (2004) proposent la fonction du quantile de perte (quantile loss function QLF), qui pénalise non seulement les scénarios qui produisent des exceptions, ce qui représente un échec de la politique de gestion des risques , mais aussi ceux pour lesquels le rendement observé dépasse la VaR estimée, engendrant ainsi des exigences de capital plus élevées .

$$QLF_t = \begin{cases} (VaR_t - R_t)^2 & , \quad R_t < VaR_t \\ (quantile(R,a) - VaR_t)^2, & R_t \geq VaR_t \end{cases}$$

Selon cette équation, la « vrai » valeur de la VaR qui n'est pas observable est approximée en utilisant la distribution empirique des rendements réalisés. Par exemple, si T observations sont disponibles pour une évaluation de la VaR, leur a-quantile est un indicateur de la «vraie» valeur de la VaR au niveau de confiance $(1 - a)$.

Nous pensons néanmoins que la CVaR est une mesure du risque plus robuste que la VaR du fait que toutes les valeurs dans la queue de la distribution de rendements sont prises en compte pour calculer la CVaR, par rapport à un plus petit nombre de valeurs lors du calcul de la VaR.

De ce fait, la fonction de perte serait plus performante si l'on compare la CVaR calculée au rendement observé dans le cas où ce rendement particulier dépasse la VaR, cette dernière ne donnant aucune indication sur la taille de la perte attendue étant donné une violation alors que les rendements dans la queue sont inclus dans le calcul de la CVaR.

Dans le présent document, nous utiliserons la fonction de perte suivante :

$$\Omega_t = \begin{cases} (CVaR_t - R_t)^2 & , \quad R_t < VaR_t \\ (quantile(R,a) - VaR_t)^2, & R_t \geq VaR_t \end{cases}$$

Le modèle le plus adéquat sera celui qui minimise l'erreur quadratique moyenne.

Section 4: Méthodologie

Dans notre évaluation des risques, nous calculons les VARs et les CVARs à 1 jour pour la distribution normale, la distribution t de Student et l'expansion Cornish-Fisher sur la période 2002 à 2014.

L'estimation est réalisée en utilisant des fenêtres de 250 observations (1 an de jours ouvrables) et de 500 observations (deux années de jours de négociation) qui sont roulées quotidiennement sur les dix prochaines années.

Chaque fenêtre nous offre deux perspectives distinctes : La première étant plus courte, elle donne plus de poids aux événements récents qui se sont produits dans les marchés financiers. Cela traduit généralement des mesures moins performantes compte tenu de la diminution du nombre d'observations. En ce qui concerne les 500 jours-fenêtre de roulement, elle permet l'utilisation de plus de données, facilitant ainsi la modélisation, en particulier lorsque nous utilisons les modèles à volatilité stochastique.

Afin d'effectuer nos calculs nous utilisons trois niveaux de confiance, respectivement 95%, 99% et 99,9% dans le but d'analyser le comportement de nos mesures du risque sur différents quantiles de distribution.

Nous utilisons aussi quatre modèles stochastiques différents, à savoir la GARCH (1, 1) et le EGARCH asymétrique (1, 1), chacun avec des innovations suivant une distribution Normale et Student-t.

Etant donné que les paramètres des modèles stochastiques intègrent les informations sur l'évolution des marchés, nous considérons que leur estimation doit être fondée uniquement sur les informations disponibles les plus récentes. Par conséquent, les paramètres des modèles GARCH et EGARCH ont été ré-estimés chaque jour de négociation à travers les fenêtres roulantes.

Bien que l'expansion des Cornish-Fisher permette de refléter les écarts par rapport à une distribution Normale, elle ignore le regroupement de volatilité des rendements. Pour tenir compte de ce phénomène, nous combinons les modèles GARCH et EGARCH Gaussiens avec la méthode d'approximation Cornish-Fisher en remplaçant l'écart-type historique par la volatilité conditionnelle estimée pour chaque processus GARCH.

Pour finir, nous évaluons la fiabilité des estimateurs de la VaR et de la CVaR en utilisant les tests décrits dans la section 3.

Section 5: Analyse des données

5.1. Collecte des données

Le présent document s'attarde sur l'étude du risque des marchés boursiers canadiens. Il existe deux marchés boursiers pour les actions canadiennes: la bourse de Toronto et la bourse de croissance TSX, qui est située à Vancouver.

Au sein de notre étude, nous avons collecté les données de Janvier 2002 au 10 Décembre 2014 pour l'indice composite S & P TSX 60 et l'indice S&P TSX Venture Composite à partir de la salle des marchés de HEC MONTREAL en utilisant BLOOMBERG.

Les graphes suivants illustrent l'évolution du prix de clôture quotidien de nos deux indices :

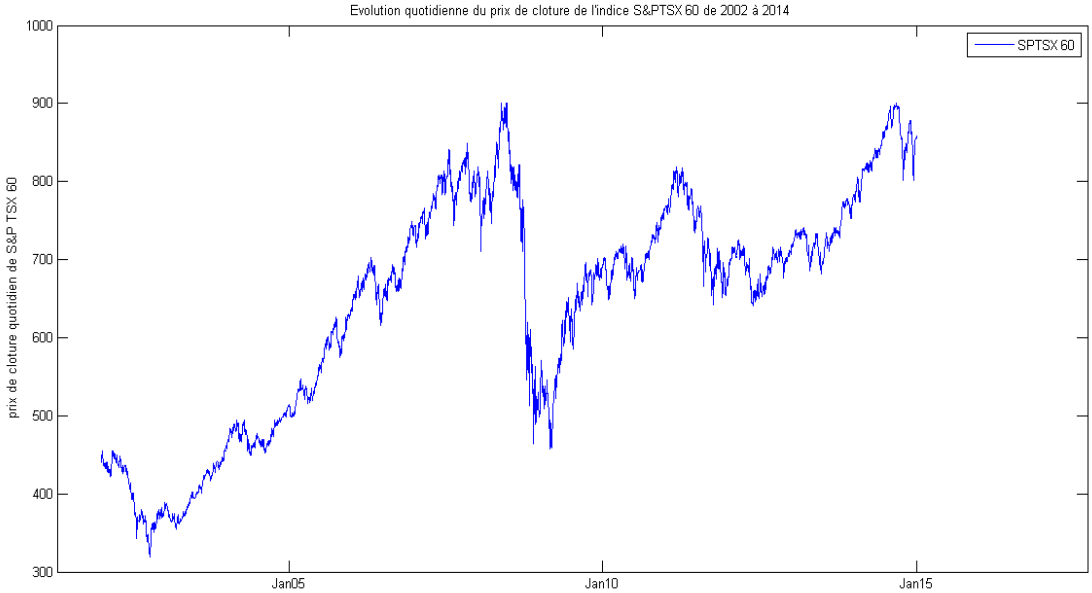


Figure 6:Evolution du prix de clôture quotidien pour le S&PTSX 60 pour la période 2002-2014

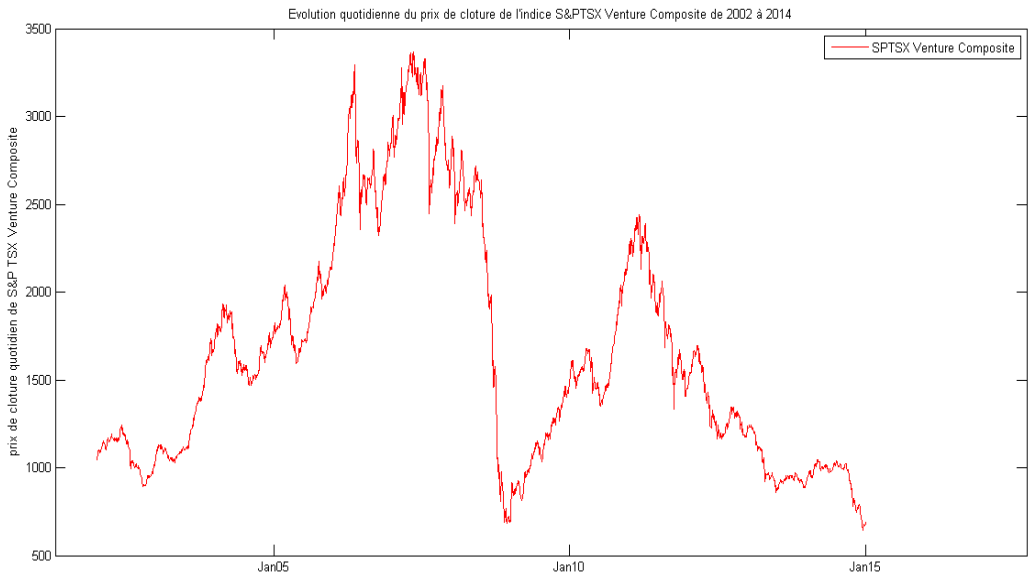


Figure 7:Evolution du prix de clôture quotidien pour le S&PTSX Venture Composite pour la période 2002-2014

Nous calculons les log-rendement quotidiens de chaque indice afin de calculer nos VARs et nos CVARS.

Ces rendements sont obtenus en utilisant le calcul suivant:

$$R_t = ln(P_{t+1}) - ln(P_t) = ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right)$$

Où P_t représente le prix de clôture quotidien du titre en question à la date t.

Les graphes suivants montrent l'évolution de nos deux séries de rendements sur la période 2002-2014 :

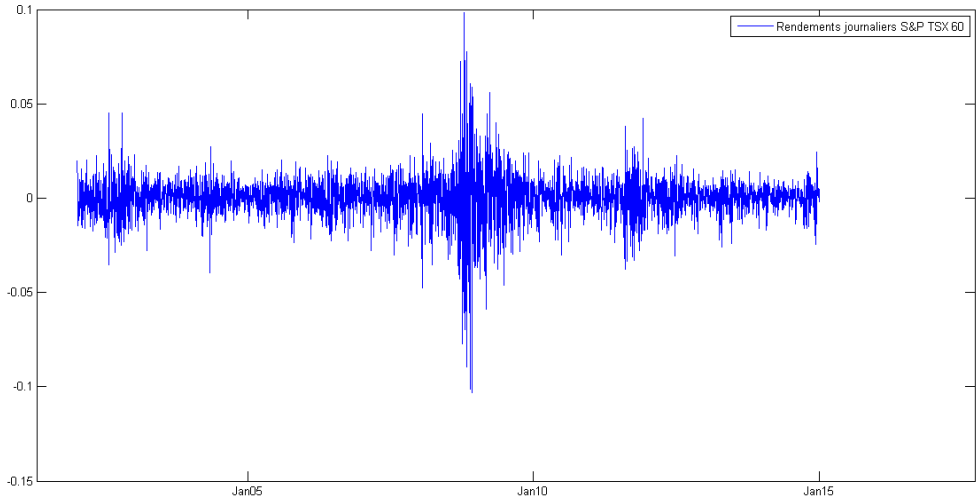


Figure 8:Evolution des rendements quotidiens pour le S&PTSX 60 sur la période 2002-2014

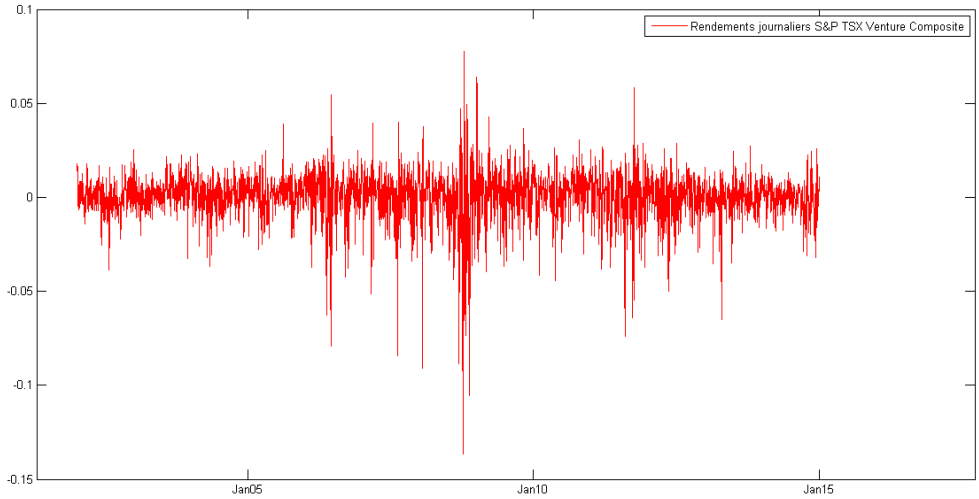


Figure 9:Evolution des rendements quotidiens pour le S&PTSX Venture Composite sur la période 2002-2014

La représentation graphique de ces rendements suggère l'existence de regroupement de volatilité.

5.2. Statistiques descriptives

Nous présentons dans le tableau suivant les statistiques descriptives qui nous permettent d'avoir une idée générale de la distribution de nos deux séries de rendements.

Index	**Moyenne**	**Ecart type**	**skewness**	**kurtosis**	**Jarque-Bera**
SPTSX 60	2.0355×10^{-4}	0.0118	-0.6129	13.9744	1.6594e+04
SPTSX Venture Composite	-1.2817×10^{-4}	0.0132	-1.4950	13.4846	1.6111e+04

Tableau 2 : Statistiques descriptives

Les quatre premiers moments des deux séries de rendements présentent une asymétrie négative et un excès de kurtosis significatifs qui reflètent l'écart par rapport à la normalité, cet écart peut également être mis en évidence par la grande valeur de la statistique de test de normalité de Jarque - Bera.

Ces faits stylisés sont compatibles avec la caractérisation des données financières, à savoir des distributions asymétriques possédant des queues épaisses.

Attardons-nous maintenant en détails sur les quatre premiers moments de nos séries de rendements

La Moyenne

Alors que nous nous attendions à un rendement moyen plus élevé pour les titres à petite capitalisation (SPTSX venture composite) en raison de leur plus grand risque, nous trouvons une performance journalière supérieure pour les titres à forte capitalisation (S & PTSX 60) sur notre période étudiée.

Les graphiques suivants présentent les rendements moyens quotidiens pour les deux indices en utilisant les fenêtres roulantes à 250 jours et à 500 jours.

Figure 10: Evolution des rendements historiques moyens pour la période 2002-2014 (fenêtre roulante à 250 jours)

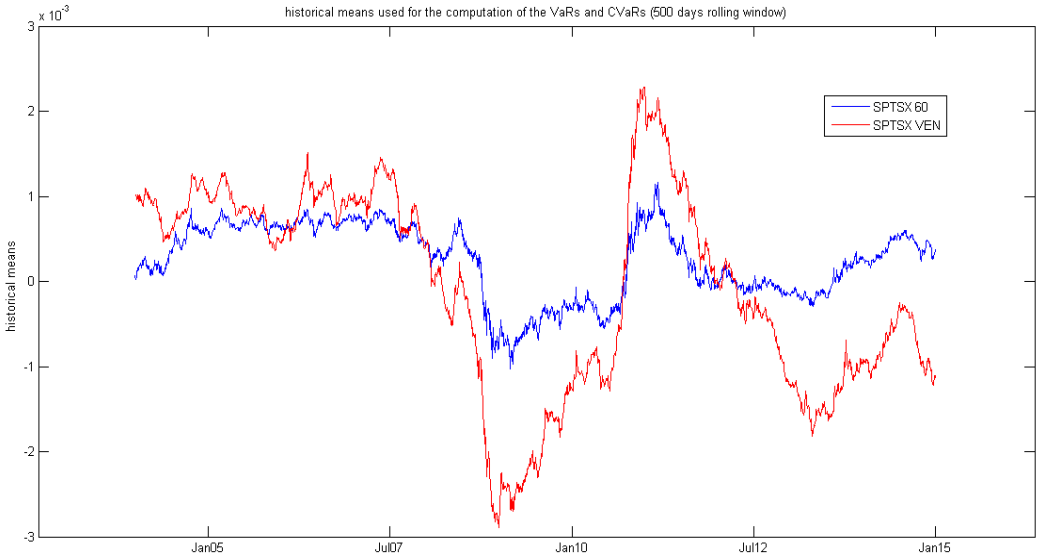


Figure 11: Evolution des rendements historiques moyens pour la période 2002-2014 (fenêtre roulante à 500 jours)

Nous remarquons que la récession suite à la crise des subprimes provoque des rendements moyens négatifs pour les deux titres. La récession semble particulièrement peser sur la performance du S&P TSX Venture Composite.

Nous pouvons également constater que la moyenne semble avoir un poids encore plus important au cours de la période de récession pour le calcul de la VaR et de la CVaR.

L'écart type

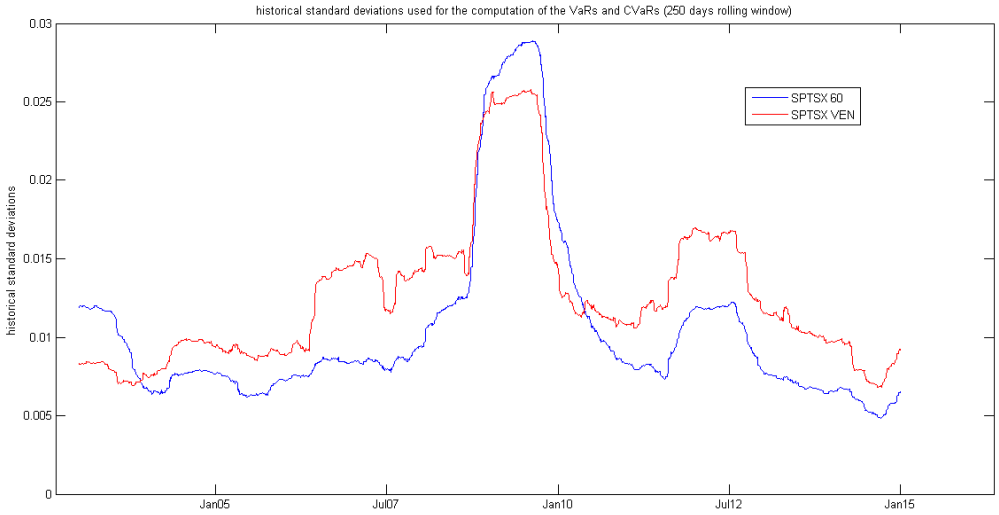


Figure 12:Evolution de l'écart type des rendements pour la période 2002-2014(fenêtre roulante à 250 jours)

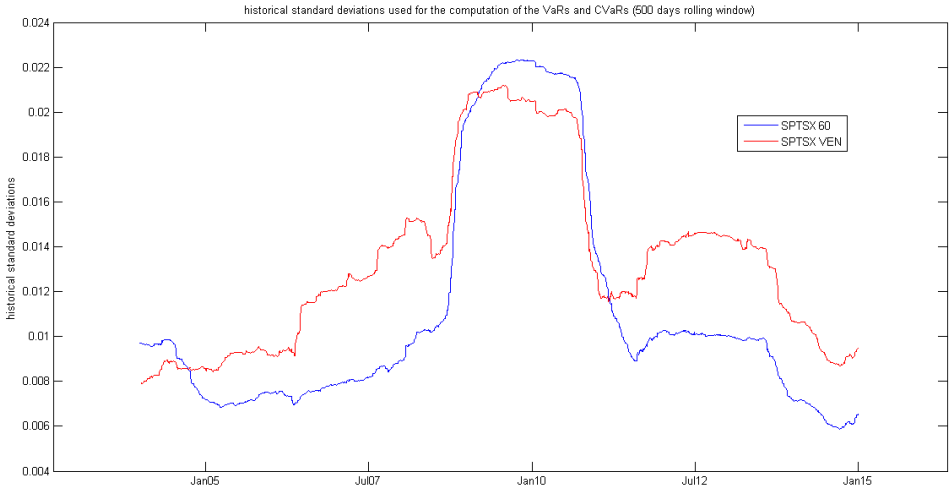


Figure 13:Evolution de l'écart type des rendements pour la période 2002-2014(fenêtre roulante à 500 jours)

Sur la période étudiée, la volatilité des deux indices évolue assez similairement.

Nous pouvons voir que l'écart type des rendements du S&P TSX venture composite est plus élevé sur la période précédant la récession et suivant la récession.

Cependant, suite à la dépression économique, la volatilité des rendements du S&P TSX 60 dépasse celle des rendements du S&P TSX Venture Composite, augmentant ainsi la mesure des risques de manière très significative au cours de cette période. Ce phénomène pourrait être dû à la faible liquidité des marchés spéculatifs comme le TSX en temps de crise qui freine la croissance de la volatilité.

Skewness

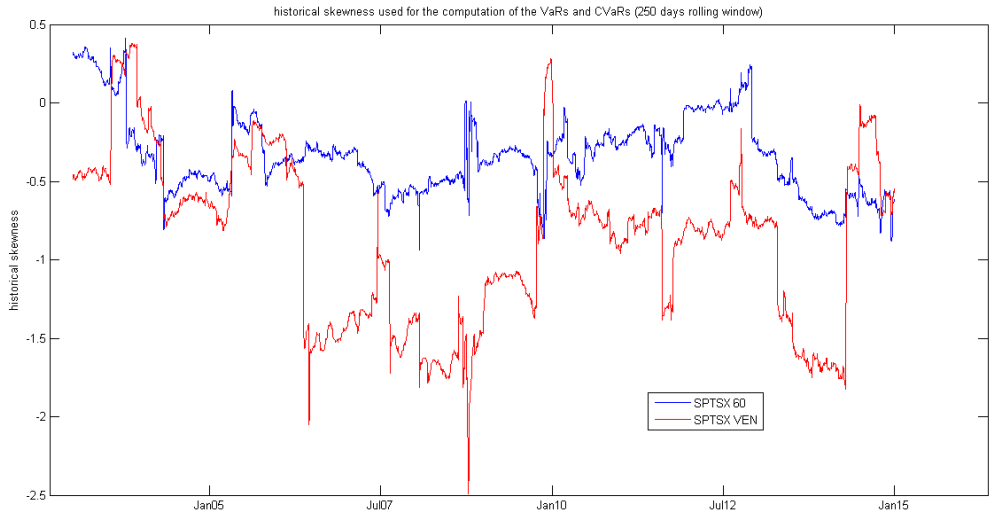


Figure 14: Evolution de l'asymétrie des rendements pour la période 2002-2014(fenêtre roulante à 250 jours)

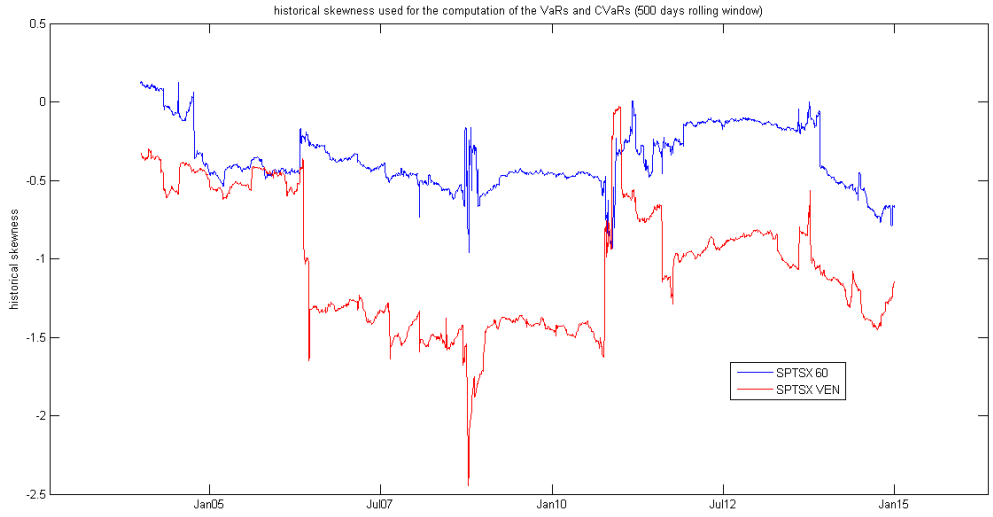


Figure 15:Evolution de l'asymétrie des rendements pour la période 2002-2014(fenêtre roulante à 500 jours)

Selon les graphiques ci-dessus, nos deux séries de rendements présentent une asymétrie négative, qui est particulièrement notable pour l'indice S&P TSX venture composite, ce qui indique que les rendements pour les deux indices sont décalés vers la gauche de leurs moyennes respectives.

Visuellement, nous pouvons voir que les deux indices, et plus particulièrement le S&P TSX Venture Composite, se comportent différemment de la distribution Gaussienne, surtout en période de récession durant laquelle le coefficient d'asymétrie des rendements de l'indice des titres à faible capitalisation atteint des valeurs négatives remarquablement élevées.

Cela suggère que l'utilisation de la distribution Normale dans le calcul des VaRs et des CVaRs produirait des estimateurs de risque moins performants.

Kurtoses

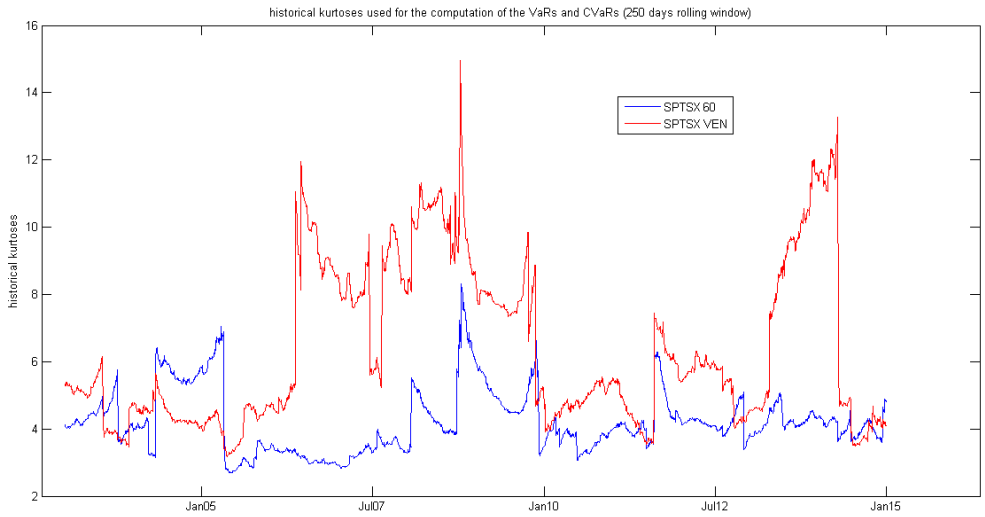


Figure 16: Evolution du kurtosis des rendements pour la période 2002-2014(fenêtre roulante à 250 jours)

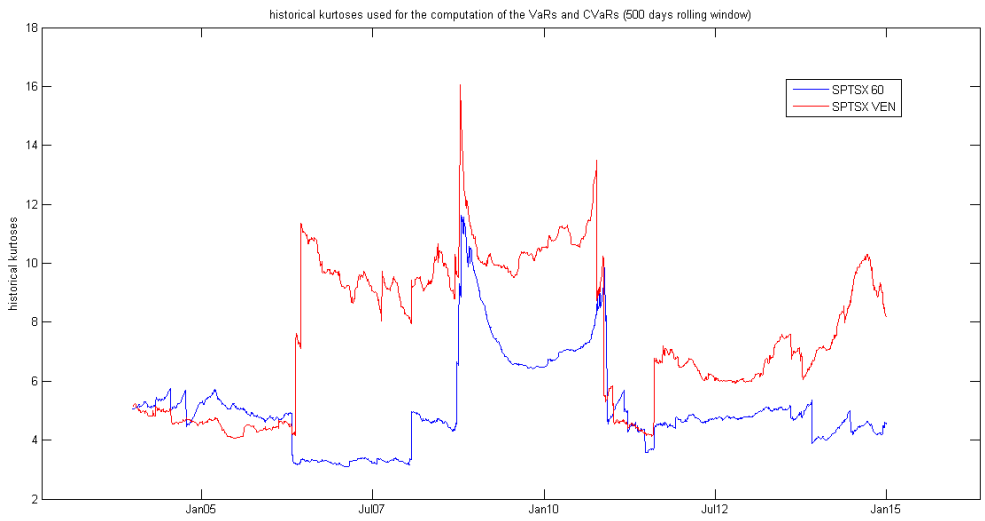


Figure 17:Evolution du kurtosis des rendements pour la période 2002-2014(fenêtre roulante à 500 jours)

Selon les deux graphiques précédents, nous pouvons voir que les deux séries de rendements présentent des valeurs élevées du coefficient d'aplatissement tout au long de la période étudiée. Cela signifie qu'une plus grande proportion de la variance dans les données provient d'écarts extrêmes.

Notons aussi que le kurtosis est plus important pour les titres à faible capitalisation, suggérant de ce fait que l'utilisation du quatrième moment pour le calcul de nos mesures de risque aura plus d'impact pour le S&P TSX Venture Composite que pour le S&P TSX 60.

L'analyse préliminaire que nous venons d'effectuer nous fait penser que l'utilisation des quatre premiers moments pour calculer la VaR et la CVaR produirait des estimateurs de risque plus efficaces que si l'on suppose que les rendements suivent une distribution Normale, en particulier pour l'indice des titres à faible capitalisation S&P TSX Venture Composite.

Section 6: Calcul des estimateurs pour la VaR et la CVaR

Au sein de cette section nous allons dans un premier temps utiliser nos deux séries de rendements pour effectuer un calcul singulier de la VaR et la CVaR sur les 3 niveaux de confiance 95%, 99% et 99.9%.

Nous obtiendrons ainsi une valeur unique de la VaR et de la CVaR pour chaque seuil de signification.

Ces calculs ont pour but de nous donner une idée générale sur le profil de risque de chacun de nos deux titres selon les différentes méthodologies utilisées.

Par la suite, nous présenterons les graphiques illustrant l'évolution de nos deux mesures du risque dans le temps pour les différentes méthodologies utilisées en utilisant les fenêtres roulantes à 250 jours et à 500 jours.

6.1. Calcul de VaR et CVaR pour la totalité de l'échantillon

Les résultats du calcul singulier de la VaR et la CVaR sur les 3 niveaux de confiance 95%,99% et 99.9% sont reportés dans les tableaux 3 à 12 de l'annexe 1.

Notons tout d'abord que l'indice S & P TSX Venture composite, reflétant les titres à faible capitalisation, présente un risque plus élevé que le S&P TSX 60 qui représente les titres à forte capitalisation, ce résultat va de pair avec l'analyse des moments faite à la section 5.

Au seuil de signification de 5%, les différentes méthodologies donnent des valeurs estimées pour la VaR et la CVaR assez proche. Cependant plus nous faisons augmenter le niveau de confiance (passant de 95% à 99.9%), plus les écarts de valeurs se creusent entre les différents modèles.

Nous remarquons que la méthodologie reposant sur la loi Normale donne, tel qu'indiqué dans les tableaux 4,7et 8, les estimateurs de risque les plus faibles en valeur absolue au niveau de confiance de 99.9% alors que son homologue s'appuyant sur l'ajustement de Cornish-Fisher (tableaux 6,11 et 12) produit les valeurs les plus élevées en valeur absolue pour la VaR et la CVaR. La méthode de Student (tableau 4) dégage quant à elle des valeurs de VaR et CVaR se rapprochant le plus des estimateurs obtenus grâce à la méthode historique.

En outre, nous obtenons des résultats plus homogènes à travers nos 3 seuils de signification sous l'hypothèse de la loi Normale. Néanmoins, les fortes hypothèses du modèle Gaussien nous font douter de la fiabilité des estimateurs obtenus.

Le modèle Cornish-Fisher produit quant à lui des estimateurs beaucoup plus éparpillés à travers les différents niveaux de confiance, atteignant des valeurs assez importantes au niveau 99.9%. Bien que cette méthode semble être mieux adaptée à nos données, l'inquiétude peut survenir dans le cas où elle surestime le risque.

Le deuxième élément qui ressort de ces calculs préliminaires est la plus faible dispersion des résultats obtenus avec les modèles stochastiques GARCH et EGARCH comparativement aux modèles de volatilité historique.

Ainsi, l'analyse des résultats obtenus au sein de cette sous-section laisse penser que l'exclusion du troisième et du quatrième moment de la distribution du rendement produit des estimateurs de VaR et de CVaR qui viennent sous-estimer le risque, particulièrement pour le marché des titres à faible capitalisation.

De plus, les méthodologies stochastiques tenant compte des caractéristiques des données financières semblent être mieux adaptées, fournissant des résultats plus lisses à travers les différents niveaux de confiance.

6.2. Calcul des estimateurs de la VaR et de la CVaR en utilisant les fenêtres roulantes

La présente section décrit l'évolution de la VaR et de la CVaR sur la période étudiée en utilisant nos deux fenêtres roulantes (250 jours et 500 jours). Les figures de l'annexe 2 présentent l'évolution graphique de nos mesures de risque.

Nos deux estimateurs du risque présentent un comportement similaire tout au long de la période d'étude, la CVaR se caractérisant par une translation vers le bas par rapport à la VaR ce qui est cohérent avec le fait que la CVaR est une mesure du risque plus conservatrice, la relation empirique $CVaR_{t,a}(X) \geq VaR_{t,a}(X)$ est ainsi bel et bien vérifiée.

Une première inspection des graphiques montre que la valeur à risque pour les deux indices est à son niveau le plus bas en valeur absolue jusqu'en 2007 ce qui est sans doute expliqué par la forte croissance économique et les marchés à la hausse de l'époque.

La période 2008-2010 se caractérise par l'augmentation fulgurante de nos estimateurs du risque, la valeur à risque ayant plus que doublé comparativement à la période précédente. Ces niveaux plus élevés en valeur absolue correspondent à l'accroissement de l'incertitude au sein des marchés financiers suite à la crise des subprimes.

Enfin, à partir de la mi-2011, nous retrouvons des valeurs proches de celles de la période précédant la récession, le risque s'estompe logiquement suite à la sortie de la crise et au retour progressif de la croissance.

Notons aussi l'écart qui subsiste entre les deux titres tout au long de notre période d'étude : l'indice des petites capitalisations S&P TSX Venture Composite offre des niveaux de risque plus élevés sauf pour la période de récession (à partir de mi-2006) pour laquelle la valeur à risque pour le S & P TSX 60 se rapproche de celle du S&P TSX Venture composite jusqu'à la dépasser pour ensuite retomber à des valeurs plus basses vers la deuxième moitié de l'année 2011.

Un élément important pour les méthodes utilisant la volatilité historique est la conséquente augmentation de valeurs de nos mesures de risque qui atteignent des niveaux élevés en termes absolus et s'y raccrochent sur une période de temps significativement étendue suite à la crise (à partir du dernier trimestre de 2008 jusqu'à la mi-2011). Cela se traduit graphiquement par une région de plateau qui est particulièrement évidente lorsque nous utilisons l'ajustement Cornish-Fisher.

Ce phénomène représente une menace potentielle pour les banques et les institutions financières car il pourrait nuire à leur capacité à générer de la croissance suite aux fortes pressions des exigences de capital réglementaire découlant d'une telle situation.

Tournons-nous à présent vers les modèles de volatilité stochastique : un fait important à ce propos concerne la difficulté de ces modèles à converger en utilisant la fenêtre à 250 jours.

Ce problème peut être causé par la période fortement instable qui a suivi la crise, nous restreignons ainsi à utiliser la fenêtre de roulement à 500 jours.

L'utilisation des modèles de volatilité conditionnelle ne montre pas la caractéristique décrite précédemment, éliminant ainsi l'obligation de maintenir une réserve de capital consistante pour un laps de temps assez soutenu et facilitant par ce fait la reprise de la croissance.

Nous ne pouvons néanmoins nous empêcher de remarquer la présence de valeurs extrêmes qui suggère une plus forte instabilité dans l'évolution de la VaR et de la CVaR, particulièrement

pour le S&P TSX Venture Composite. Cela nous pousse à dire que l'évaluation du risque sur les marchés à faible capitalisation est plus délicate que sur ceux à forte capitalisation.

6.3 .Conclusion

L'analyse effectuée au sein de la section 6 nous permet de forger une première idée sur la pertinence des différentes méthodologies utilisées dans le présent document.

Nous sommes peu enclins à accepter la méthode Gaussienne en raison des hypothèses trop restrictives sur lesquelles elle repose et à préférer les méthodes qui utilisent les quatre premiers moments dans le calcul des estimateurs du risque. De plus les modèles stochastiques nous semblent plus pertinents que leurs homologues déterministes.

Cependant, on ne peut s'empêcher d'émettre des réserves quant à ce constat avant d'avoir vérifié si nos mesures surestiment ou sous-estiment le risque réel pour nos deux séries de données. La prochaine section, qui présente les tests rétroactifs pour la VaR et la CVaR, a pour but d'éclaircir ce point.

Section 7:Analyse des résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR et à la CVaR

7.1. Tests rétroactifs sur la VaR

Les tableaux 13 à 18 de l'annexe 3 résument les résultats des tests du rapport de vraisemblance (LR) pour la couverture inconditionnelle, l'indépendance et la couverture conditionnelle. Le symbole (*) désigne un résultat qui est statistiquement significatif à 10%, alternativement l'hypothèse nulle d'une couverture correcte est rejetée.

En outre, si une valeur de 0 est signalée pour le test de l'indépendance, c'est qu'il n'y a pas de violations consécutives, et, évidemment, le modèle en question passe le test.

Selon les tableaux 13 et 16, l'hypothèse de normalité engendre des résultats très peu fiables pour nos deux indices: l'hypothèse nulle de la couverture conditionnelle correcte ainsi que celle de la couverture inconditionnelle sont rejetées pour le modèle gaussien déterministe.

En effet, nous obtenons des fréquences d'exceptions plus élevées que les niveaux de signification prévus (5%, 1% et 0.1%) en plus d'avoir des exceptions dépendantes d'une période à l'autre.

La prise en compte du regroupement de volatilité inhérent à nos deux séries de données nous donne des exceptions indépendantes d'une période à l'autre mais ne fait pas baisser significativement la fréquence des exceptions.

Nous pouvons donc dire que la distribution Normale, du fait qu'elle ne tienne pas compte du caractère asymétrique et leptokurtique de nos deux séries de rendements explicitées dans la section 5, produit des mesures qui sous-estiment le risque réel sur les marchés, ce qui nous amène à rejeter le modèle Gaussien pour les deux indices.

Selon le tableau 14 , le modèle déterministe Student-t , qui permet en théorie de modéliser de manière plus adéquate l'épaisseur des queues , se comporte de manière similaire à la Normale pour le niveau de confiance de 95% pour le S&P TSX 60 et génère des estimateurs de la VaR de moindre qualité que son homologue Gaussien au seuil de signification de 5% pour le S&P TSX Venture Composite faisant passer le ratio de couverture conditionnelle de 17.4852 à une valeur qui tend vers l'infini .

Il semble donc que l'hypothèse de Student surestime l'épaisseur des queues de distribution des rendements du S&P TSX Venture Composite au niveau de 95%, donnant de pires résultats que ceux issus d'une Normale.

Pour les niveaux de confiance plus élevés, le modèle Student offre de meilleurs résultats, particulièrement à 99.9% (le ratio de couverture conditionnelle passe de 108.49 à 4.5376 pour le S&P TSX 60 et de 162.0196 à 14.0052 pour le S&P TSX Venture Composite).

Cette amélioration s'explique par le fait que la Student capture mieux le caractère leptokurtique de nos données, accordant plus de poids aux événements extrêmes, une condition nécessaire à un tel niveau de confiance. Néanmoins, bien que la distribution de Student améliore les résultats pour les seuils de signification les plus élevés, offrant même des exceptions indépendantes à travers le temps au niveau 99.9%, le modèle est toujours rejeté ce qui concerne les critères de couverture conditionnels.

Pour ce qui est de la méthode Cornish-Fisher, qui prend en considération à la fois le troisième et le quatrième moment de nos deux séries de rendements, elle semble produire des estimateurs plus appropriés selon les critères de couverture conditionnelle et d'indépendance des exceptions: Nous pouvons voir à partir du tableau 15 que pour le S&P TSX 60, la VaR est rejetée aux niveaux 95% et 99%, la fréquence des exceptions étant incompatible avec le quantile de la perte que la mesure de risque est censée refléter.

Pour le S&P TSX Venture Composite, le modèle est rejeté au niveau de signification de 5% car il produit des exceptions dépendantes dans le temps (tableau 15 annexe 3 :LR_{IND} = 51.45), l'ajustement de Cornish-Fisher donne cependant des résultats probants au seuil de 1% et ne peut être rejeté.

Au seuil de signification de 0,1%, le modèle Cornish-Fisher fonctionne bien pour les deux séries, aboutissant à un bon taux de couverture inconditionnelle (surtout pour le S & P TSX 60 avec un ratio de 0.4837) et à l'absence de violations consécutives. Nous ne pouvons donc pas rejeter le modèle au niveau de confiance de 99.9% (le modèle est jugé acceptable).

Considérons à présent les modèles stochastiques : pour les niveaux de confiance 99% et 99.9%, sous l'hypothèse que les innovations suivent une loi de Student-t, nous pouvons voir à travers le tableau 17 que la prise en compte de l'effet du groupement de volatilité vient grandement améliorer la qualité de nos estimateurs par rapport au modèle déterministe correspondant.

Pour l'indice S &P TSX 60, le modèle Student-GARCH ainsi que le modèle asymétrique Student-EGARCH ne peuvent être rejetés au niveau de signification de 0,1%.

Nous remarquons que pour le S & P TSX Venture Composite, la prise en compte de l'effet de levier vient améliorer la VaR au niveau de confiance 99.9% par rapport au modèle Student-GARCH. Le modèle Student-EGARCH est ainsi réputé acceptable pour ce niveau de confiance.

Un autre élément qui ressort de cette méthodologie est qu'elle n'engendre aucun rejet dans le test d'indépendance des exceptions à tous les niveaux de signification.

L'ajustement de Cornish-Fisher combiné aux modèles stochastiques GARCH et EGARCH produit les meilleurs résultats au sein de ce travail : les résultats des tests rétroactifs décrits dans le tableau 18 indiquent que pour l'indice S & P TSX 60, nous ne pouvons rejeter les deux modèles selon les critères de couverture inconditionnelle et d'indépendance des exceptions aux seuils de signification de 1% et 0,1% et même s'ils sont rejetés à 5%, ils donnent des exceptions qui sont indépendantes à travers le temps.

La VaR pour l'indice S&P TSX Venture Composite est quant à elle correctement modélisée par les modèles Cornish-Fisher-GARCH et Cornish-Fisher-EGARCH aux niveaux de confiance 95% et 99.9%.

Notons aussi que contrairement à la méthode Student stochastique, le signe des innovations ne semble pas avoir un impact significatif sur la qualité des estimateurs obtenus au sein de cette méthodologie.

Concernant l'effet de la taille de la fenêtre roulante (250 jours vs 500 jours) sur l'efficacité des estimateurs de risque, nous obtenons en général de meilleurs résultats à tous les niveaux de confiance lorsque nous considérons une distribution Normale. Cette tendance semble cependant s'inverser avec l'utilisation de la loi de Student et de l'ajustement de Cornish-Fisher.

Cela indique que pour les données affichant de l'asymétrie et des queues de distribution épaisses, l'utilisation d'un horizon plus court qui ne saisit que les mouvements récents du marché peut engendrer des mesures de risque moins dépendantes de la tendance de la volatilité à long terme qui sous-estiment le risque réel. Dans ce cas de figure, opter pour une fenêtre plus large permettant l'utilisation de plus de données améliorerait notre modélisation du risque au sein des marchés.

7.2. Tests rétroactifs sur la CVaR

Les tableaux 19 à 27 de l'annexe 4 présentent les résultats des tests rétroactifs appliqués à la valeur à risque conditionnelle pour la fenêtre à 500 jours. Le symbole (*) désigne un résultat qui est statistiquement significatif à 5% ; alternativement l'hypothèse nulle d'une estimation correcte est rejetée et le modèle ne passe pas le test.

Nous pouvons voir à travers les tableaux 19 et 20 que la seule différence entre la VaR et la CVaR pour les modèles déterministes se basant sur l'hypothèse de distribution Normale et de Student-t est le non rejet de la CVaR pour l'indice S&P TSX 60 au seuil de signification 5%. Notons aussi que pour le même indice, la méthode de l'ajustement de Cornish-Fisher nous offre des estimateurs forts probants puisque nous n'observons aucun rejet pour les trois niveaux de confiance comme indiqué dans le tableau 21.

Il s'agit là d'un résultat intéressant qui permet de noter un avantage de la CVaR par rapport à la VaR sur le marché des titres à forte capitalisation : Le caractère plus conservateur de la CVaR combiné à un moindre écart par rapport à la Normalité pour les rendements du S&P TSX 60 (reflété par les plus faibles valeurs du coefficient d'aplatissement et surtout du coefficient d'asymétrie que nous avons relevé à la section 5.2) permettent à la CVaR ajustée Cornish Fisher de produire des résultats supérieurs.

En ce qui concerne les modèles stochastiques, les résultats des tableaux 24 et 25 nous indiquent que l'hypothèse d'une distribution de Student pour les innovations produit d'excellents estimateurs de la CVaR, le modèle GARCH donnant des mesures de risque robustes, particulièrement pour le S&P TSX Venture Composite qui ne comporte aucun rejet , l'indice S&P TSX 60 donnant lieu quant à lui à un rejet du modèle GARCH et EGARCH au niveau 99.9%.

Ainsi, le modèle GARCH, de par sa plus forte rapidité d'ajustement, fait en sorte que les estimateurs de la CVaR obtenus grâce à la méthode stochastique sont plus robustes ce qui s'avère très intéressant pour mesurer le risque sur les marchés des titres à forte croissance caractérisés par une forte instabilité.

Tournons-nous pour finir sur les modèles Cornish-Fisher employant la volatilité conditionnelle : les valeurs fortement positives de la statistique de test décrites dans les tableaux 26 et 27 laissent penser que cette méthodologie produit des estimateurs de la CVaR qui surestiment le risque réel auquel font face les institutions financières.

7.3. Conclusion

Plusieurs éléments intéressants ressortent de l'analyse présentée au sein de cette section.

Premièrement, l'hypothèse de Normalité néglige de nombreux risques et ne parvient pas par conséquent à produire des estimations utiles pour nos deux indices. En outre, l'utilisation seulement des deux premiers moments dans nos calculs engendre des résultats très peu convaincants, l'intégration du coefficient d'asymétrie et du coefficient d'aplatissement améliorant grandement la fiabilité de nos estimateurs.

D'autre part, le choix de la taille de la fenêtre roulante a un impact sur la qualité des mesures obtenues. À notre connaissance, il n'existe aucune méthode persistante dans la littérature pour le choix de la taille des fenêtres, les chercheurs s'y prennent de manière arbitraire dans la plupart des cas.

Nous avons également constaté que l'utilisation de la CVaR semble être avantageuse, produisant des estimateurs généralement plus robustes que sa comparse. Il semble cependant que le choix entre une méthodologie déterministe ou une méthodologie stochastique dans la mesure du risque ait beaucoup plus d'impact que le choix entre la VaR ou la CVaR.

En effet, la prise en compte du groupement de volatilité inhérent aux marchés financiers a un impact significatif sur la VaR et la CVaR. Bien que certains résultats ne respectent pas le niveau de confiance, le modèle GARCH apporte une amélioration très importante par rapport à la méthodologie déterministe, particulièrement lorsque nous utilisons la CVaR pour mesurer le risque.

Il faut néanmoins noter que l'ajustement Cornish-Fisher utilisant comme intrant la volatilité conditionnelle semble fournir des valeurs de CVaR qui surestiment le risque. La section suivante nous permet d'en apprendre plus à ce sujet.

Section 8: Sélection du modèle le plus adéquat

Comme nous l'avons abordé au cours des premières sections de ce travail, les résultats des tests rétroactifs que nous avons employés dans les sections précédentes ne permettent pas de comparer les différents modèles de VaR directement, une fréquence d'exception plus proche de la probabilité théorique α attendue n'indiquant pas nécessairement la supériorité d'un modèle parmi ses concurrents.

Par conséquent, afin de choisir le modèle le plus approprié pour chacune de nos deux séries de rendements, nous allons calculer la fonction de perte Ω décrite à la section 3.3.

La sélection des modèles pour lesquels nous allons calculer la fonction de perte Ω se fait sur la base des résultats obtenus suite aux tests rétroactifs sur la VaR : Nous avons ainsi exclu les modèles qui ont produit une fréquence d'exception supérieure à celle attendue et des violations dépendantes dans le temps, ne prenant en considération de ce fait que les modèles suivants :

Pour le S&P TSX 60	**Pour le S&P TSX Venture Composite**
Au niveau de confiance 99% • Cornish-Fisher GARCH • Cornish-Fisher EGARCH *Au niveau de confiance 99.9%* • Cornish-Fisher avec moments historiques • Student EGARCH • Cornish-Fisher GARCH • Cornish-Fisher EGARCH	*Au niveau de confiance 95%* • Cornish fisher GARCH • Cornish fisher EGARCH *Au niveau de confiance 99.9%* • Cornish-Fisher avec moments historiques • Student GARCH 99.9% • Student EGARCH 99.9% • Cornish Fisher GARCH 99.9% • Cornish Fisher GARCH 99.9%

Ainsi, le modèle le plus performant sera celui qui permet d'obtenir un estimateur de la VaR robuste, c'est à dire qui satisfait la condition préalable de la couverture inconditionnelle et de

l'indépendance des exceptions, et qui produit la fonction de perte attendue qui minimise la valeur de perte totale et la perte moyenne.

Les tableaux 28 à 31 présentés dans l'annexe 5 résument les résultats de l'approche de la fonction de perte.

Un fait très intéressant qui ressort de l'analyse de ces résultats est qu'au niveau de confiance 99.9%, le modèle qui génère les plus faibles valeurs de perte totale et de perte moyenne pour les deux indices est le Cornish-Fisher déterministe alors que les modèles stochastiques génèrent les valeurs les plus élevées, cela confirme nos suspicions que les modèles Cornish-Fisher GARCH et EGARCH surestiment le risque réel, paralysant de ce fait la capacité des institutions financières à générer de la croissance en leur imposant des exigences de capital plus élevées qu'elles ne devraient l'être.

Afin de vérifier que le modèle Cornish-Fisher déterministe est bel et bien plus performant que ses comparses, nous allons utiliser le test de signe unilatéral de Sarma et al.(2003).

Ce test permet de déduire si un modèle A est nettement supérieur à un modèle B pour l'estimation du risque, relativement à notre fonction de perte préalablement choisie.

Soit la variable $z_t = \Omega_t^A - \Omega_t^B$ où Ω_t^A et Ω_t^B sont les fonctions de perte de modèles A et B.

Les valeurs négatives de z_t indiquent que le modèle A est plus performant que le modèle B.

L'hypothèse nulle de ce test est H_0: $\theta = 0$, contre l'hypothèse H_1: $\theta < 0$, où θ est la médiane de la distribution des z_t.

Nous allons comparer pour chaque indice le modèle Cornish-Fisher déterministe avec le reste des modèles non rejetés pour ce seuil de signification. Les résultats de ce test au niveau de signification de 5% sont reportés dans les tableaux 32 et 33 de l'annexe 6.

Les valeurs de h=1 et des p-values indiquent que l'hypothèse nulle de performance égale des deux méthodes est rejetée au niveau de signification de 5%. En d'autres termes le modèle Cornish-Fisher déterministe est nettement plus performant que les autres modèles à des fins d'estimation de VaR

En conclusion, l'alliance d'une distribution prenant en compte l'asymétrie et le caractère leptokurtique des rendements à la plus simple spécification de volatilité donne la meilleure combinaison et semble être préférée aux modèles plus complexes de volatilité conditionnelle.

Section 9: Conclusions

Nous avons effectué une évaluation de plusieurs modèles de VaR et de CVaR pour le marché canadien des titres à faible et à forte capitalisation boursière.

Un des éléments les plus importants qui ressort de notre étude est que l'hypothèse de Normalité pour la distribution des rendements génère des mesures de risque très peu robustes aussi bien pour la VaR que pour la CVaR.

Par ailleurs, l'utilisation du troisième et du quatrième moment de nos distributions produit des estimateurs plus précis, la méthodologie de Cornish-Fisher et dans une moindre mesure celle de Student-t parvenant à mieux modéliser le risque.
Nous pouvons ainsi dire que dans le cadre de l'estimation des risques pour les données financières, les distributions asymétriques et leptokurtiques sont plus appropriées que l'hypothèse Gaussienne.

Concernant la CVaR, elle semble fournir des résultats supérieurs comparativement à la VaR. Cependant, nous pensons que les modèles de CVaR surestiment les mesures de risque, spécialement pour la méthodologie Cornish-Fisher stochastique, ce qui incite les institutions financières à maintenir des niveaux de capital règlementaire assez élevés qui à son tour détériore la rentabilité des banques.

En outre, nous considérons que le choix entre l'utilisation d'une approche déterministe ou stochastique soit plus important que le choix entre la VaR ou la CVaR.

En effet, nous avons remarqué à travers les tests rétroactifs que la prise en compte du phénomène de groupement de volatilité grâce aux modèles de volatilité conditionnelle GARCH et EGARCH nous donne des résultats bien plus probants que ceux issus des modèles déterministes, tout particulièrement pour la CVaR.

Ainsi, nous voyons plus la CVaR comme une extension ou un outil complémentaire à la VaR que comme une remplaçante et nous encourageons l'utilisation combinée de ces deux mesures de risque.

Dans le cadre de l'évaluation qui a été élaborée en utilisant la fonction de perte, il y a des preuves solides que la méthodologie Cornish-Fisher associée à un modèle de volatilité historique produit des estimateurs de VaR plus adéquats pour nos deux indices.

A la lumière de nos résultats, nous pensons qu'il serait intéressant de modéliser le troisième et le quatrième moment grâce à des modèles stochastiques afin de voir l'impact que cela aura sur la mesure du risque à travers la VaR et la CVaR.

Annexe 1 : Calcul de la VaR et de la CVaR sur la totalité de l'échantillon

Tableau 3:Var et CVaR selon la méthode historique

Significance level	5%	1%	0.1%
VaR (%)			
SPTSX 60	-1.7729	-3.5459	-7.7448
SPTSX VEN	-2.2033	-4.1676	-9.0980
CVaR (%)			
SPTSX 60	-2.9222	-5.1675	-9.8010
SPTSX VEN	-3.6047	-6.3646	-11.1497

Tableau 4:Var et CVaR selon la méthode Gaussienne

Significance level	5%	1%	0.1%
VaR (%)			
SPTSX 60	-1,916	-2,7183	-3,6176
SPTSX VEN	-2,189	-3,0906	-4,1013
CVaR (%)			
SPTSX 60	-2,4076	-3,1169	-3,9432
SPTSX VEN	-2,7414	-3,5386	-4,4673

Tableau 5:Var et CVaR selon la méthode de Student

Significance level	5%	1%	0.1%
VaR (%)			
SPTSX 60	-1.5733	-3.0620	-6.9421
SPTSX VEN	-1.8138	-3.483	-7.8033
CVaR (%)			
SPTSX 60	-2.6035	-4.7358	-10.491
SPTSX VEN	-2.9670	-5.3461	-11.722

Tableau 6:Var et CVaR selon la méthode Cornish-Fisher

Significance level	5%	1%	0.1%
VaR (%)			
SPTSX 60	-1.8521	-6.1029	-15.0057
SPTSX VEN	-2.4158	-6.6752	-15.0389
CVaR (%)			
SPTSX 60	-4.5929	-9.8652	-19.936
SPTSX VEN	-5.1417	-10.223	-19.524

Tableau 7:Var et CVaR selon la méthode Gaussienne GARCH

Significance level	5%	1%	0.1%
VaR (%)			
SPTSX 60	-1.6391	-2.3267	-3.0973
SPTSX VEN	-2.0910	-2.9520	-3.9171
CVaR (%)			
SPTSX 60	-2.0604	-2.6683	-3.3764
SPTSX VEN	-2.6185	-3.3798	-4.2666

Tableau 8: Var et CVaR selon la méthode Gaussienne EGARCH

Significance level	5%	1%	0.1%
VaR (%)			
SPTSX 60	-1.6234	-2.3045	-3.0679
SPTSX VEN	-2.0092	-2.8364	-3.7635
CVaR (%)			
SPTSX 60	-2.0407	-2.6429	-3.3443
SPTSX VEN	-2.5160	-3.2474	-4.0993

Tableau 9: Var et CVaR selon la méthode Student GARCH

Significance level	5%	1%	0.1%
VaR (%)			
SPTSX 60	-1.3498	-2.6296	-5.9654
SPTSX VEN	-1.7469	-3.3543	-7.5135
CVaR (%)			
SPTSX 60	-2.2354	-4.0686	-9.0162
SPTSX VEN	-2.8572	-5.1478	-11.2865

Tableau 10:Var et CVaR selon la méthode Student EGARCH

Significance level	5%	1%	0.1%
VaR (%)			
SPTSX 60	-1.3384	-2.6076	-5.9158
SPTSX VEN	-1.6809	-3.2273	-7.2284
CVaR (%)			
SPTSX 60	-2.2167	-4.0347	-8.9413
SPTSX VEN	-2.7491	-4.9526	-10.8580

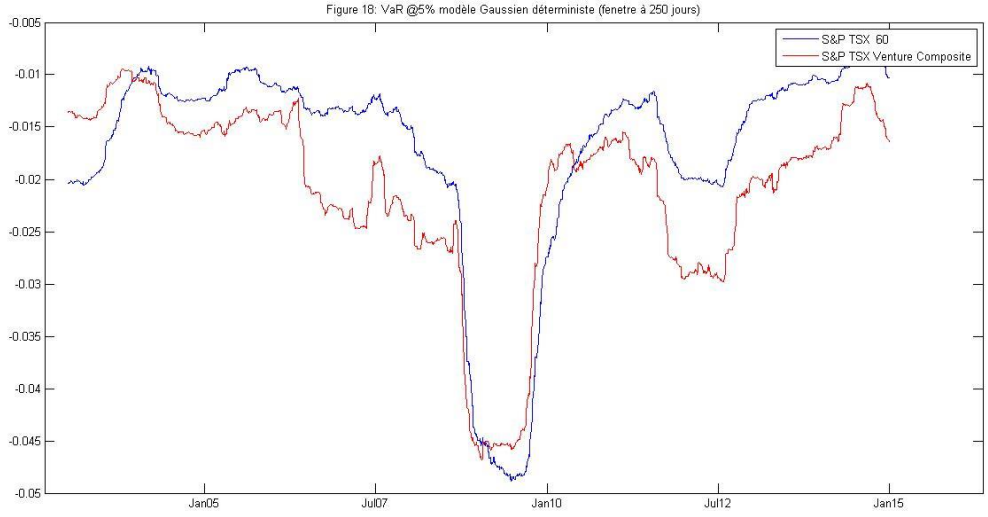
Tableau 11:Var et CVaR selon la méthode Cornish-Fisher GARCH

Significance level	5%	1%	0.1%
VaR (%)			
SPTSX 60	-1.5843	-5.2272	-12.8569
SPTSX VEN	-2.3075	-6.3751	-14.3621
CVaR (%)			
SPTSX 60	-3.9332	-8.4515	-17.0820
SPTSX VEN	-4.9106	-9.7633	-18.6453

Tableau 12:Var et CVaR selon la méthode Cornish-Fisher EGARCH

Significance level	5%	1%	0.1%
VaR (%)			
SPTSX 60	-1.5692	-5.1776	-12.7353
SPTSX VEN	-2.2173	-6.1248	-13.7977
CVaR (%)			
SPTSX 60	-3.8958	-8.3715	-16.9204
SPTSX VEN	-4.7180	-9.3798	-17.9125

Annexe 2 : Graphiques présentant l'évolution des estimateurs de la VaR et de la CVaR sur les fenêtres de 250 jours et de 500 jours



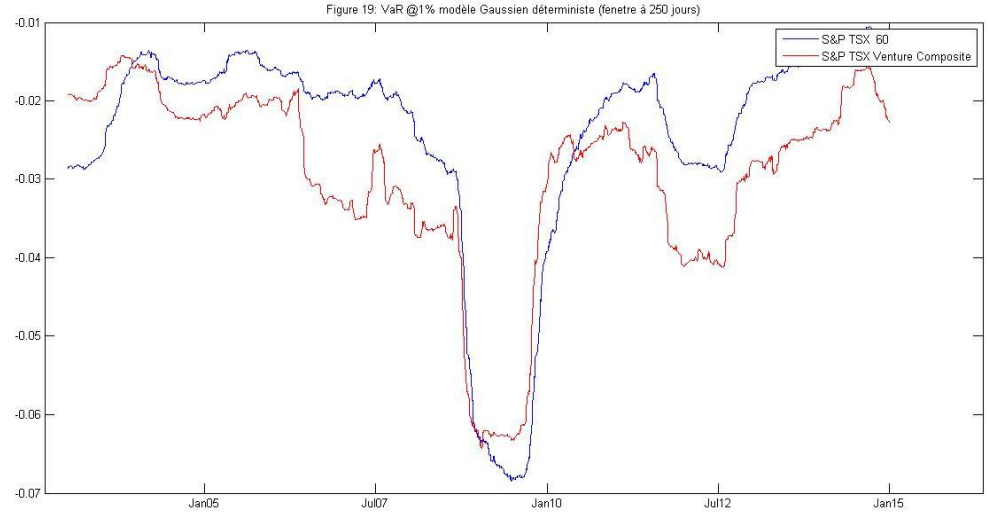


Figure 20: VaR @0.1% modèle Gaussien déterministe (fenetre à 250 jours)

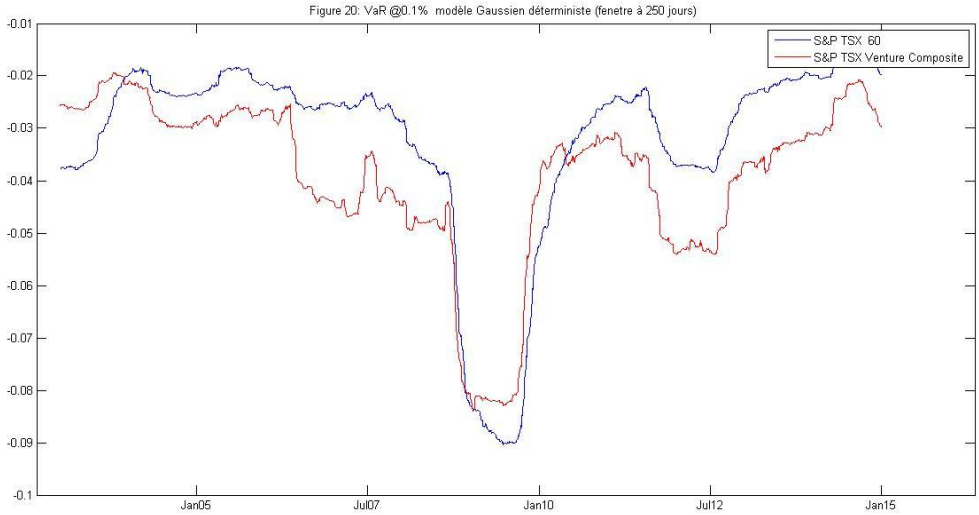


Figure 21: CVaR @5% modèle Gaussien déterministe (fenetre à 250 jours)

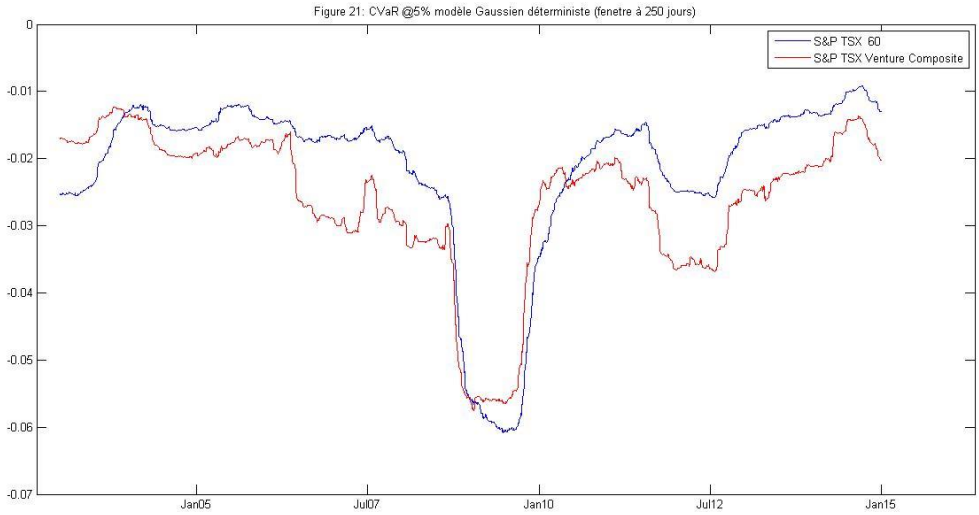


Figure 22: CVaR @1% modèle Gaussien déterministe (fenetre à 250 jours)

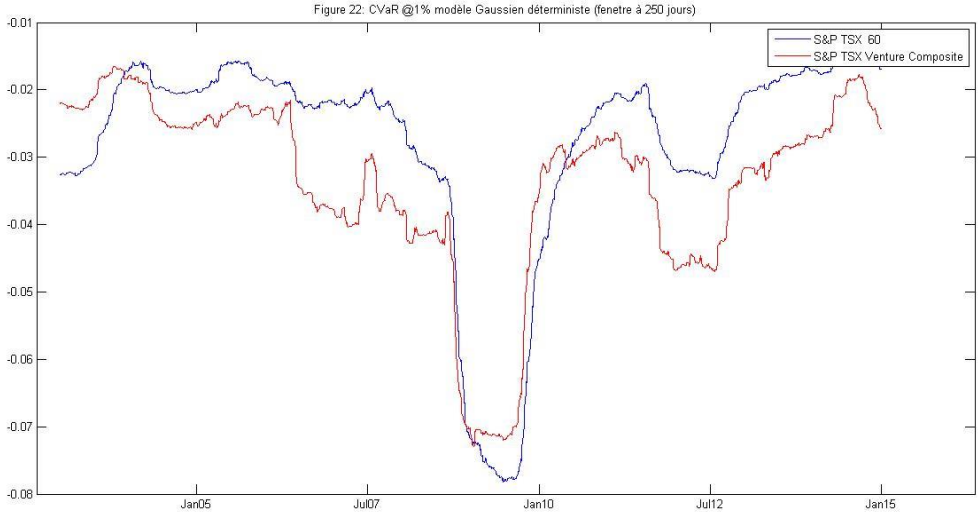


Figure 23: CVaR @0.1% modèle Gaussien déterministe (fenetre à 250 jours)

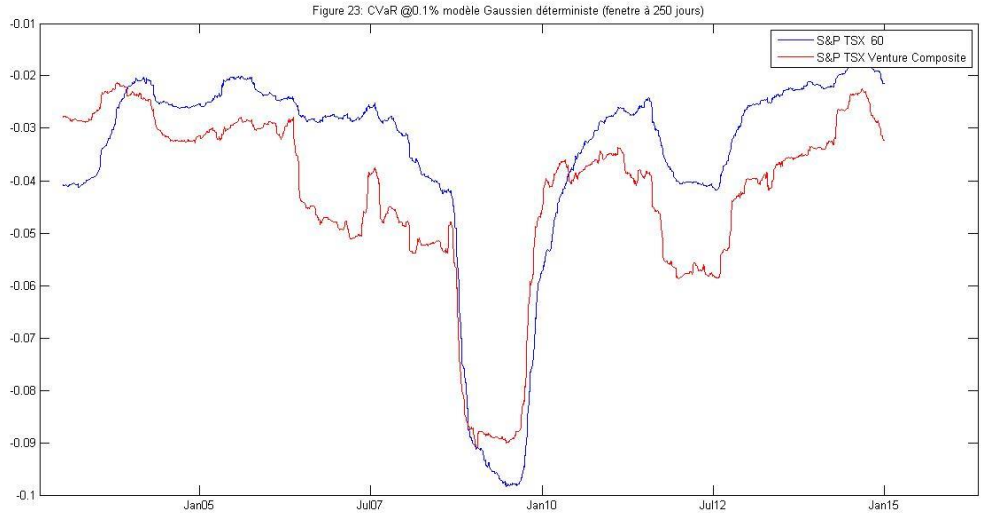


Figure 24: VaR @5% modèle Student-t deterministe (fenetre à 250 jours)

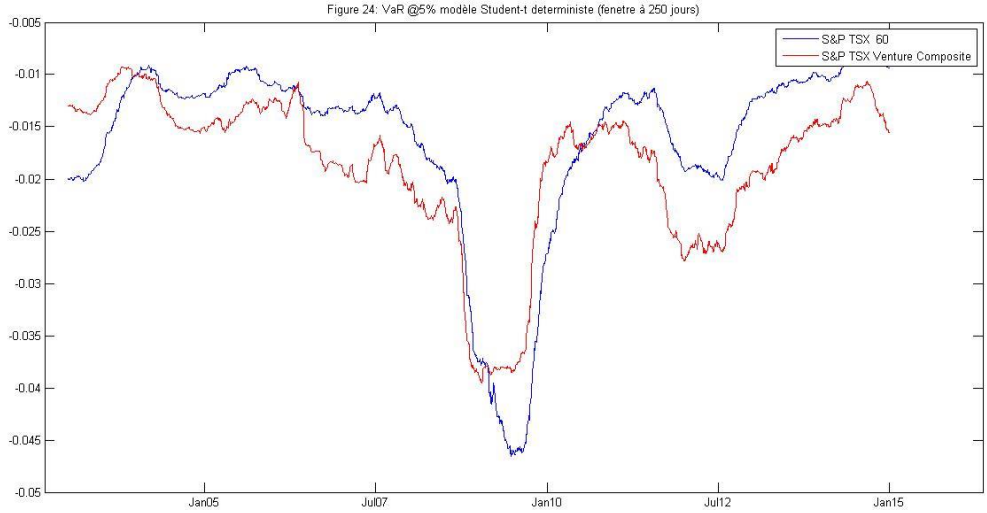


Figure 25: VaR @1% modèle Student-t deterministe (fenetre à 250 jours)

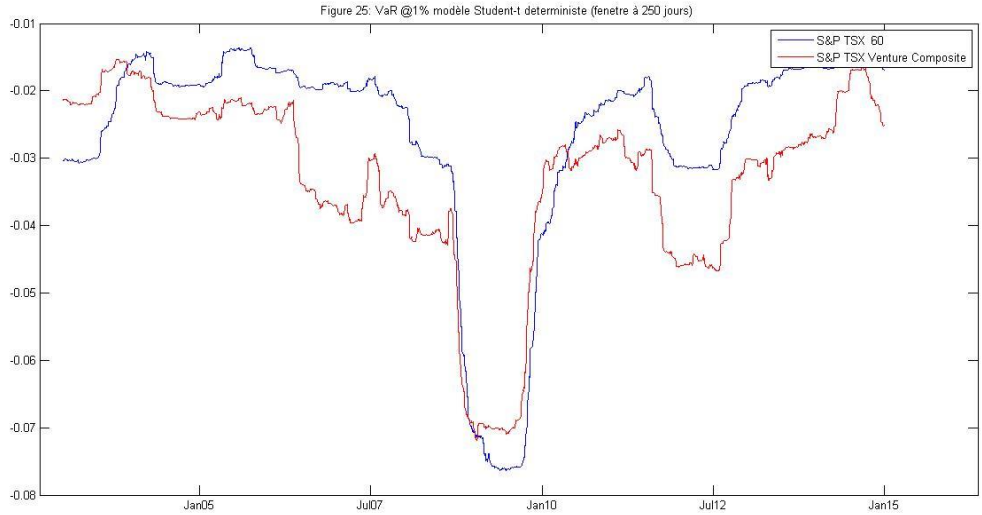


Figure 26: VaR @0.1% modèle Student-t deterministe (fenetre à 250 jours)

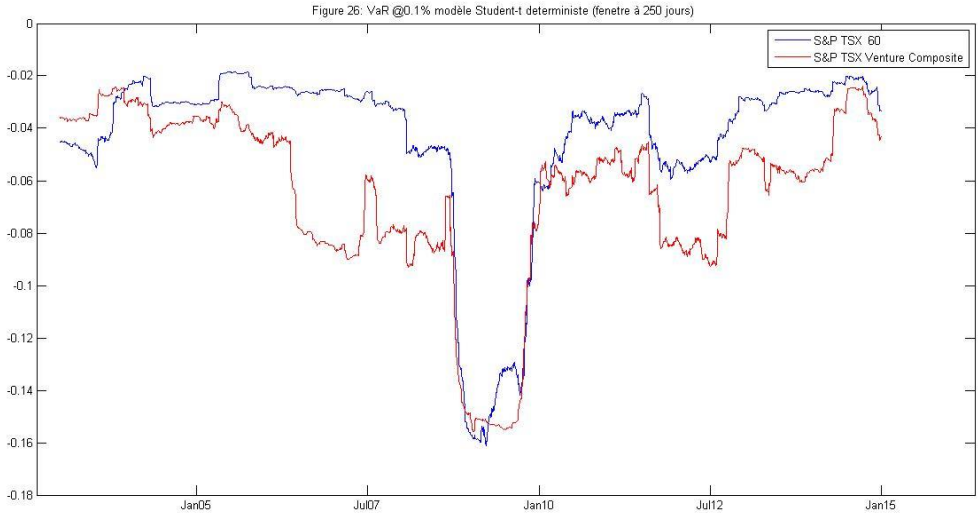


Figure 27: CVaR @5% modèle Student-t deterministe (fenetre à 250 jours)

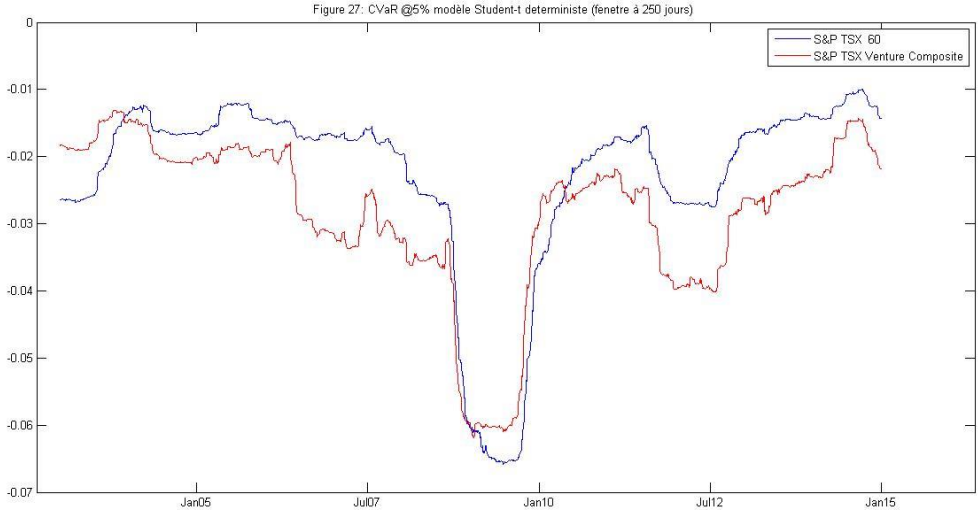


Figure 28: CVaR @1% modèle Student-t deterministe (fenetre à 250 jours)

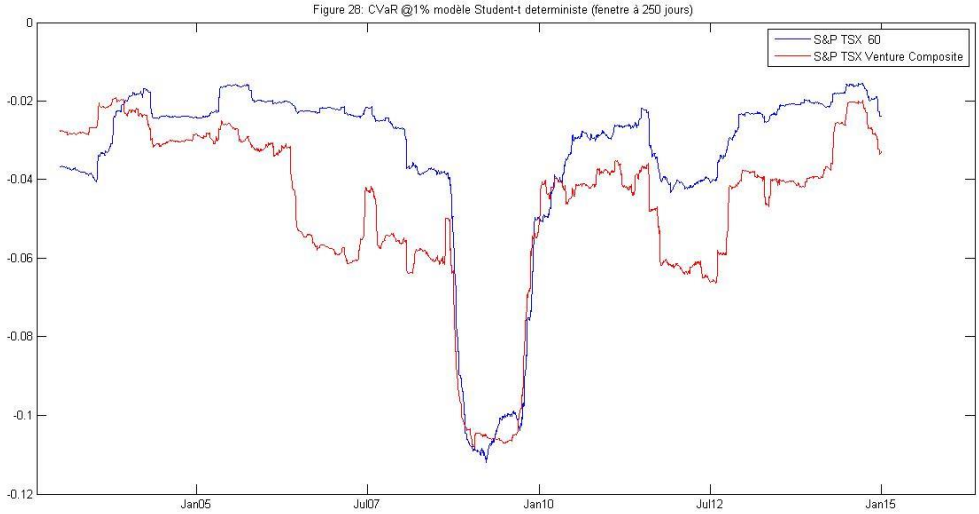


Figure 29: CVaR @0.1% modèle Student-t deterministe (fenetre à 250 jours)

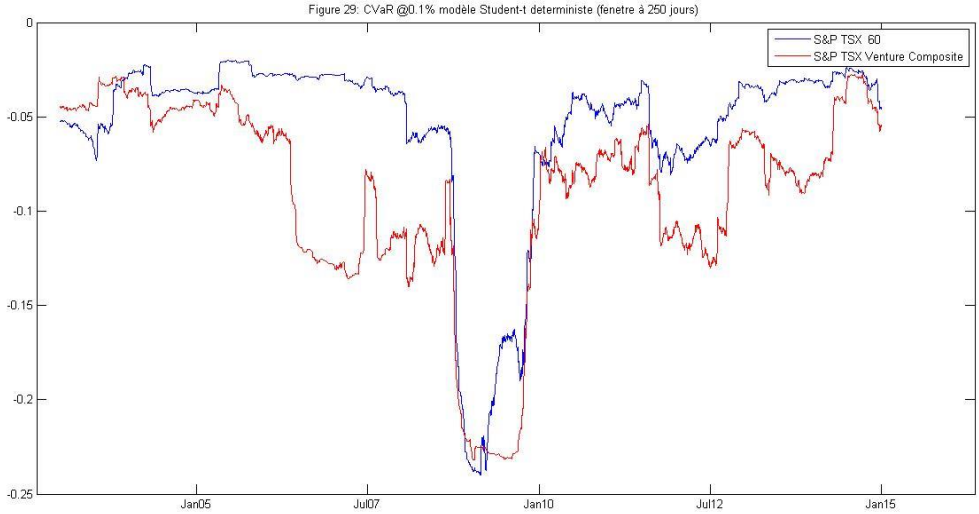


Figure 30: VaR @5% modèle Cornich-Ficher deterministe (fenetre à 250 jours)

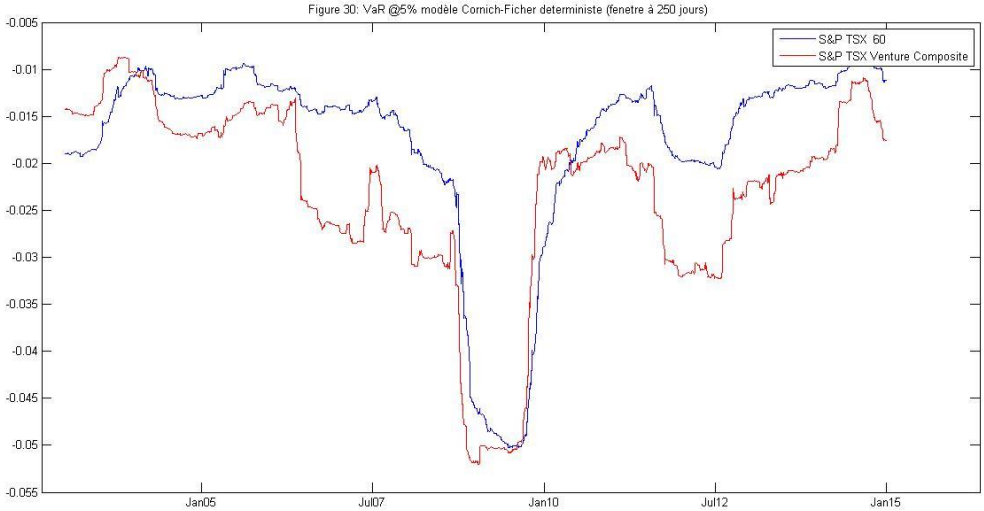


Figure 31: VaR @1% modèle Cornish-Fisher deterministe (fenetre à 250 jours)

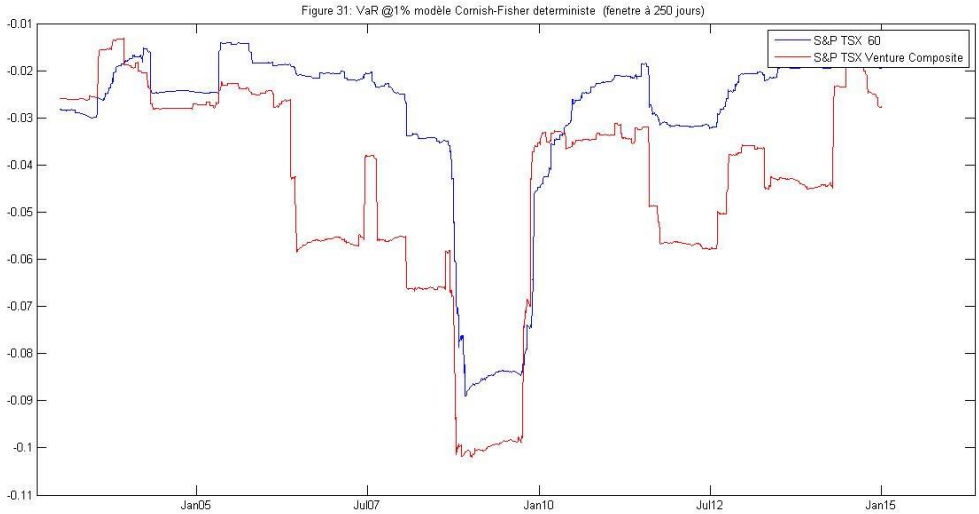


Figure 32: VaR @0.1% modèle Cornish-Fisher deterministe (fenetre à 250 jours)

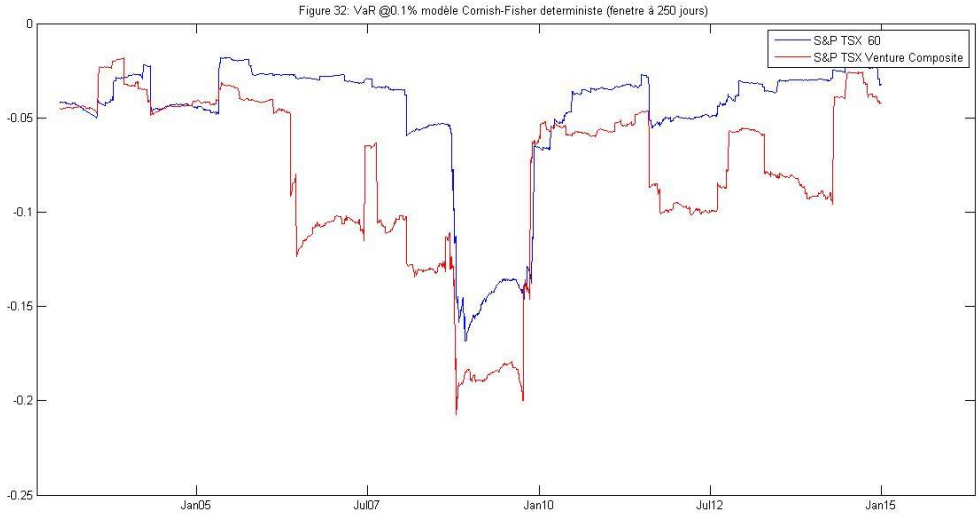


Figure 33: CVaR @5% modèle Cornish-Fisher deterministe (fenetre à 250 jours)

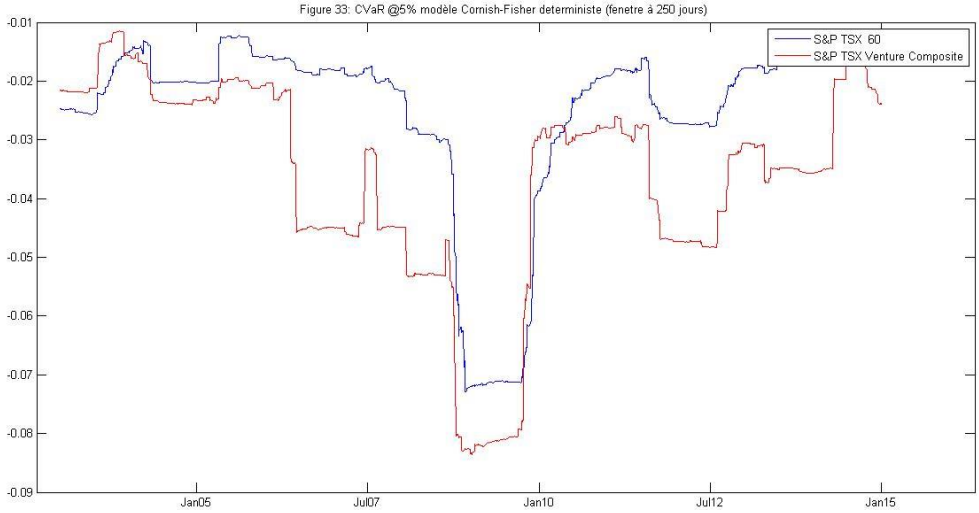


Figure 34: CVaR @1% modèle Cornish-Fisher deterministe (fenetre à 250 jours)

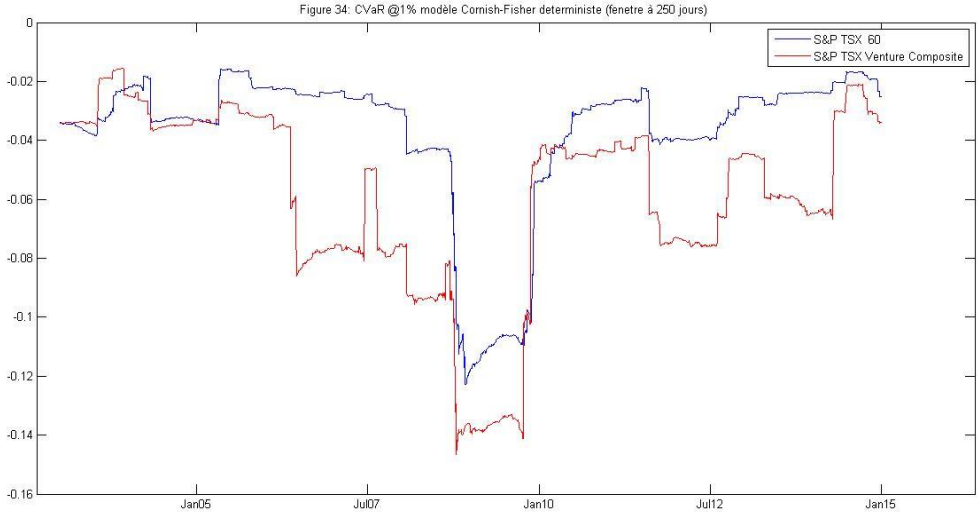


Figure 35: CVaR @0.1% modèle Cornish-Fisher deterministe (fenetre à 250 jours)

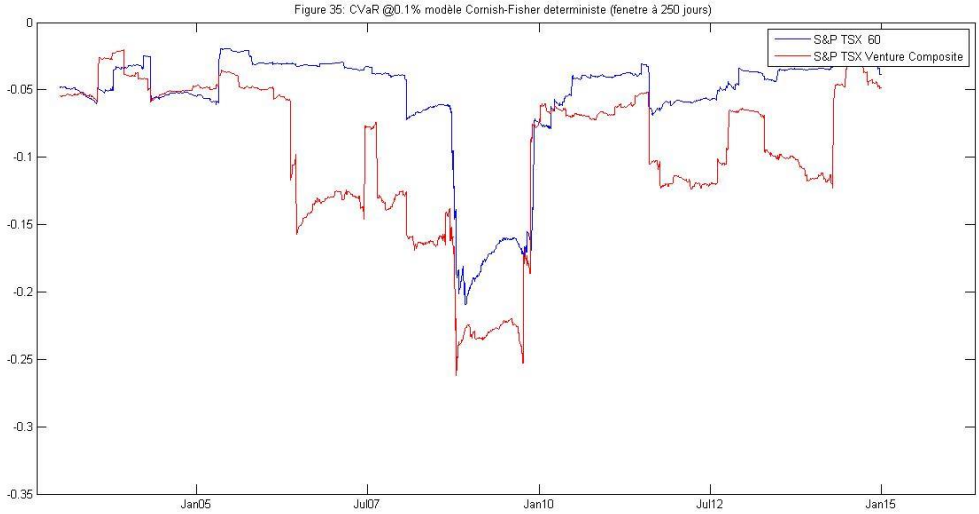


Figure 36: VaR @5% modèle Gaussien deterministe (fenetre à 500 jours)

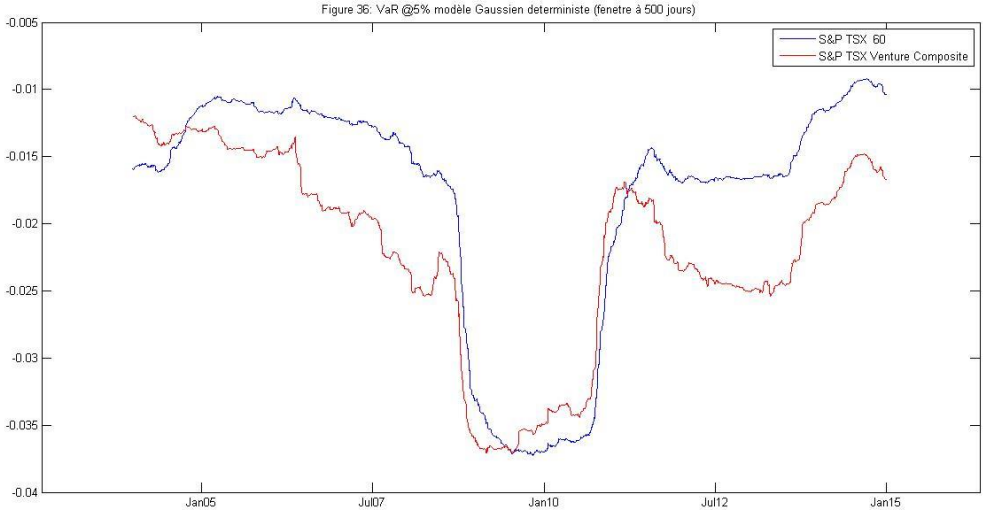


Figure 37: VaR @1% modèle Gaussien deterministe (fenetre à 500 jours)

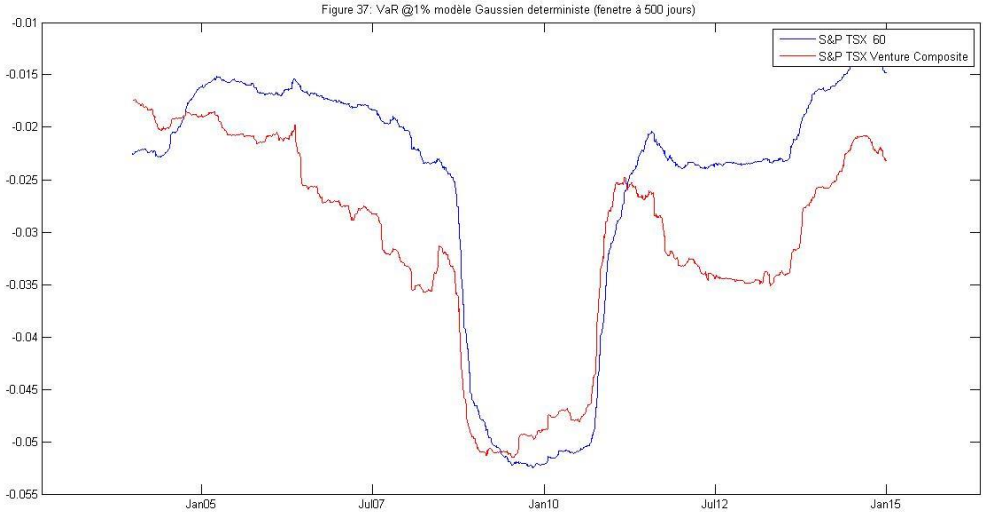


Figure 38: VaR @0.1% modèle Gaussien deterministe (fenetre à 500 jours)

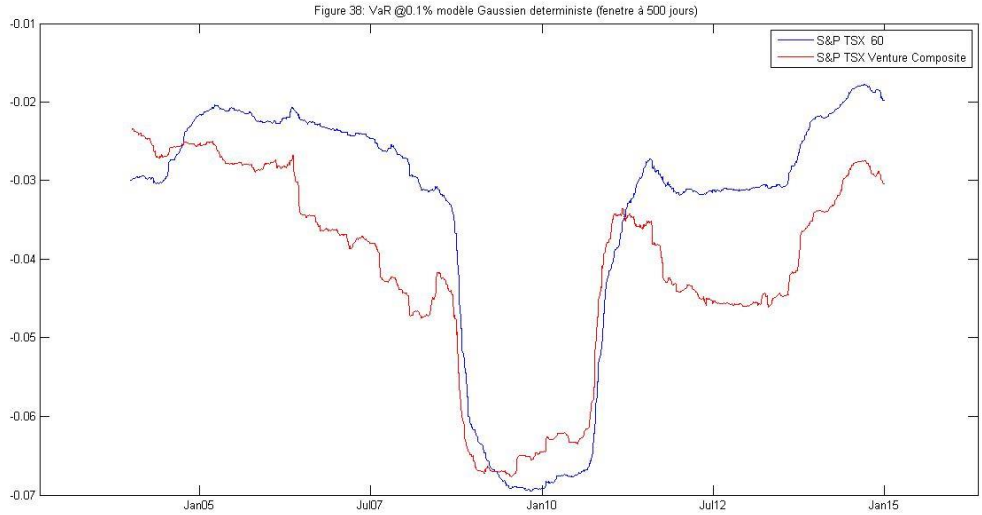


Figure 39: CVaR @5% modèle Gaussien deterministe (fenetre à 500 jours)

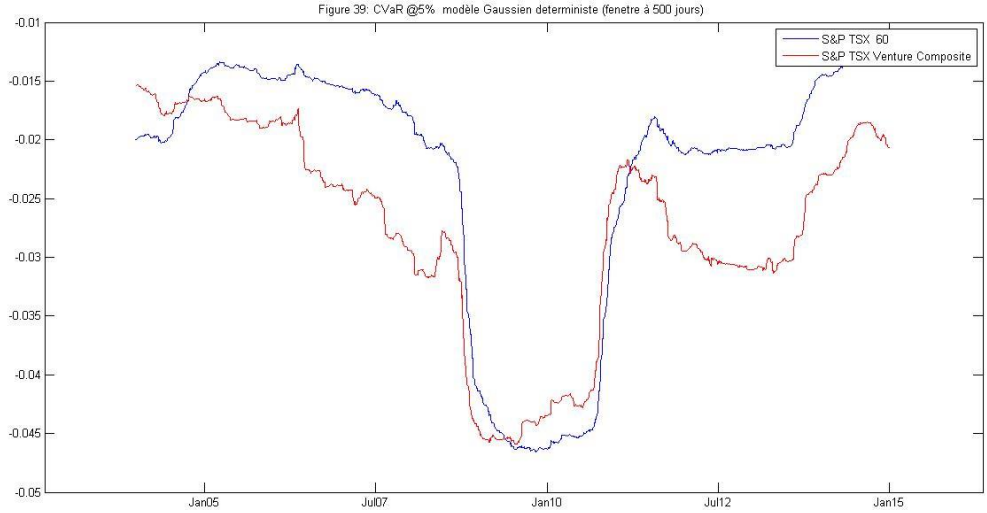


Figure 40: CVaR @1% modèle Gaussien deterministe (fenetre à 500 jours)

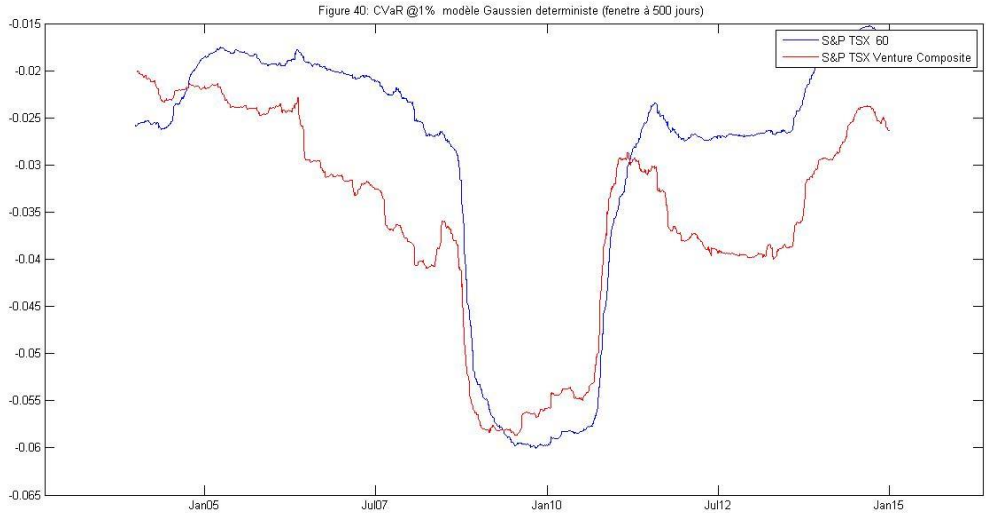


Figure 41: CVaR @0.1% modèle Gaussien deterministe (fenetre à 500 jours)

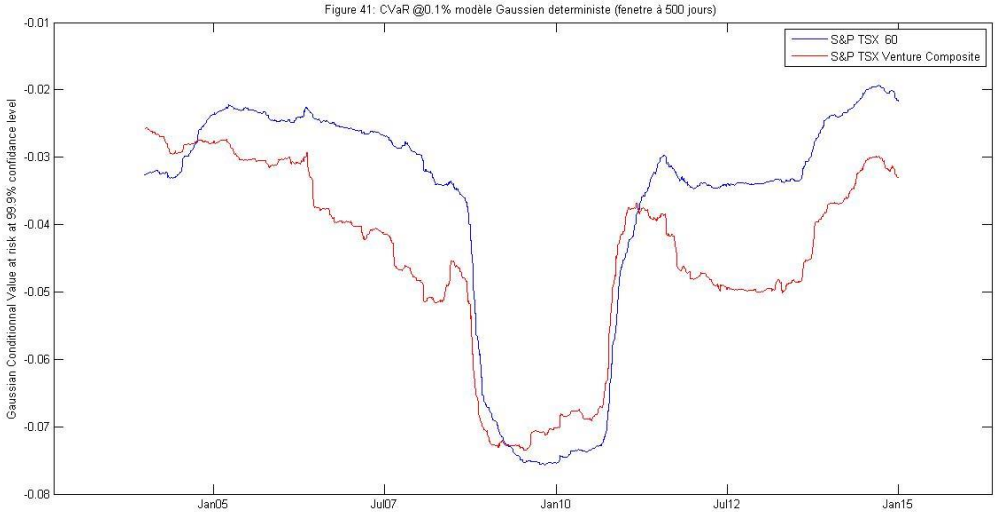


Figure 42: VaR @5% modèle Student-t deterministe (fenetre à 500 jours)

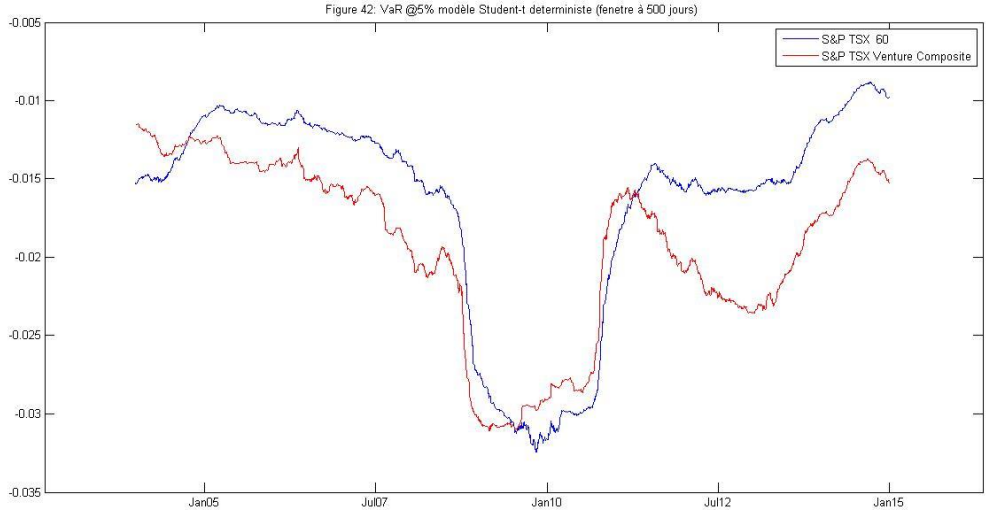


Figure 43: VaR @1% modèle Student-t deterministe (fenetre à 500 jours)

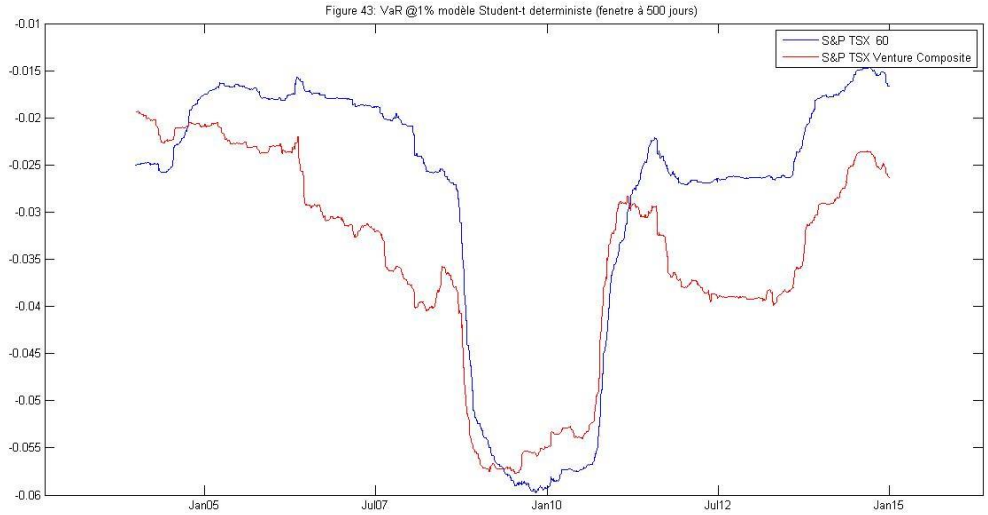


Figure 44: VaR @0.1% modèle Student-t deterministe (fenetre à 500 jours)

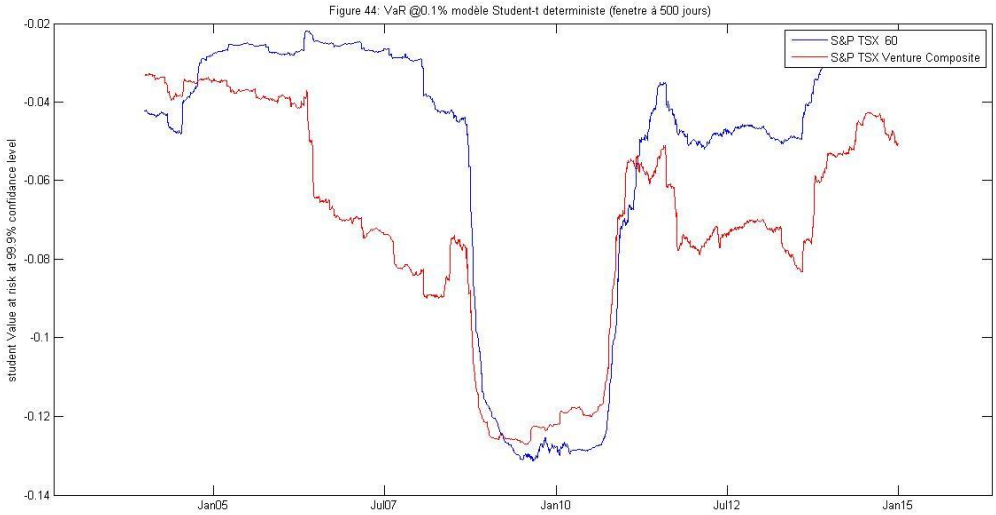


Figure 45: CVaR @5% modèle Student-t deterministe (fenetre à 500 jours)

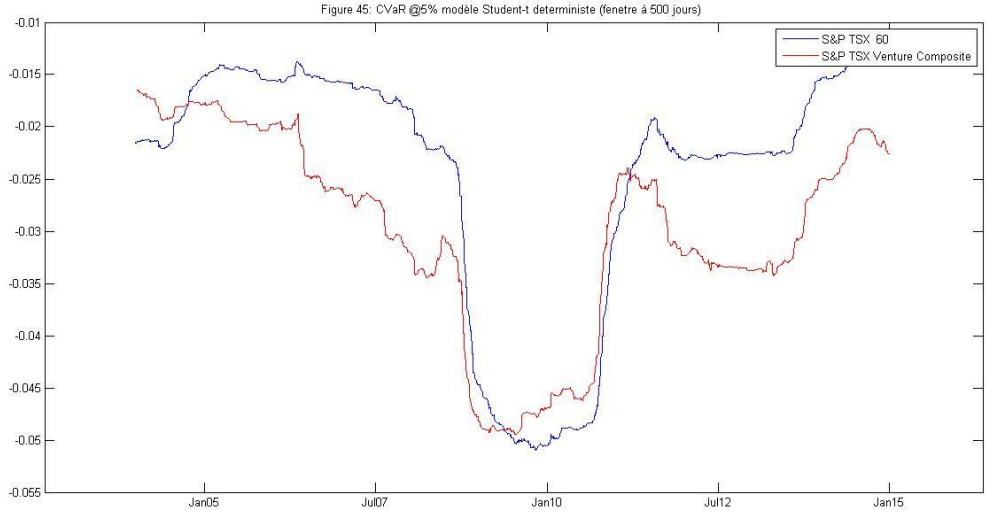


Figure 46: CVaR @1% modèle Student-t deterministe (fenetre à 500 jours)

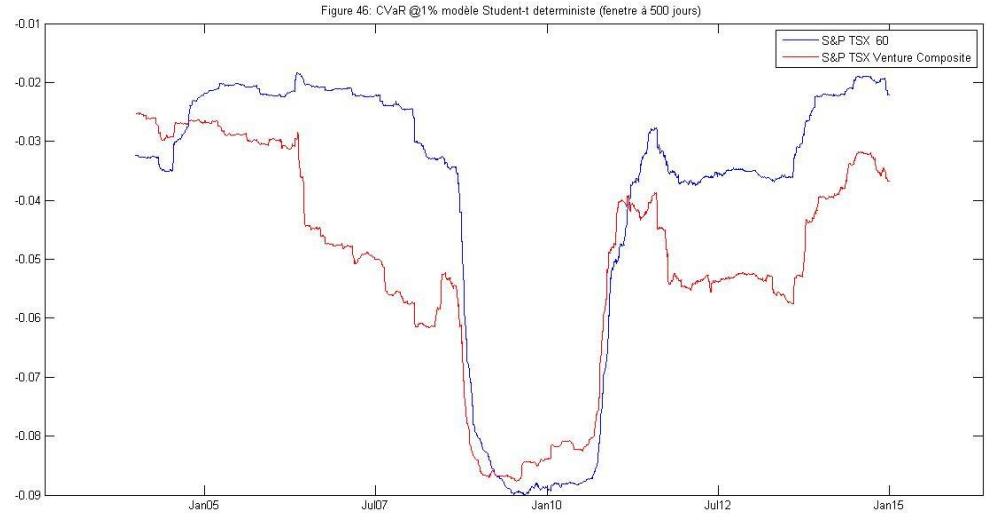


Figure 47: CVaR @0.1% modèle Student-t deterministe (fenetre à 500 jours)

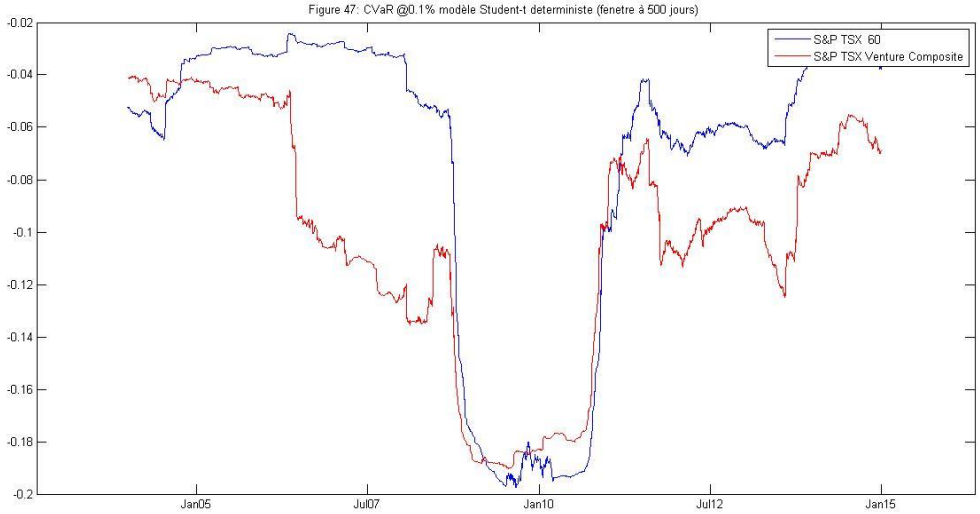


Figure 48: VaR @5% modèle Cornish-Fisher deterministe (fenetre à 500 jours)

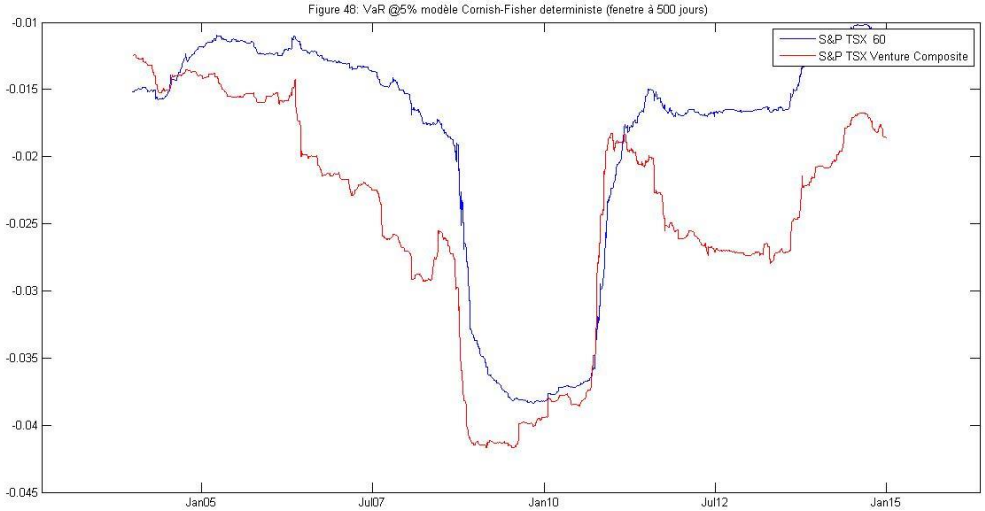


Figure 49: VaR @1% modèle Cornish-Fisher deterministe (fenetre à 500 jours)

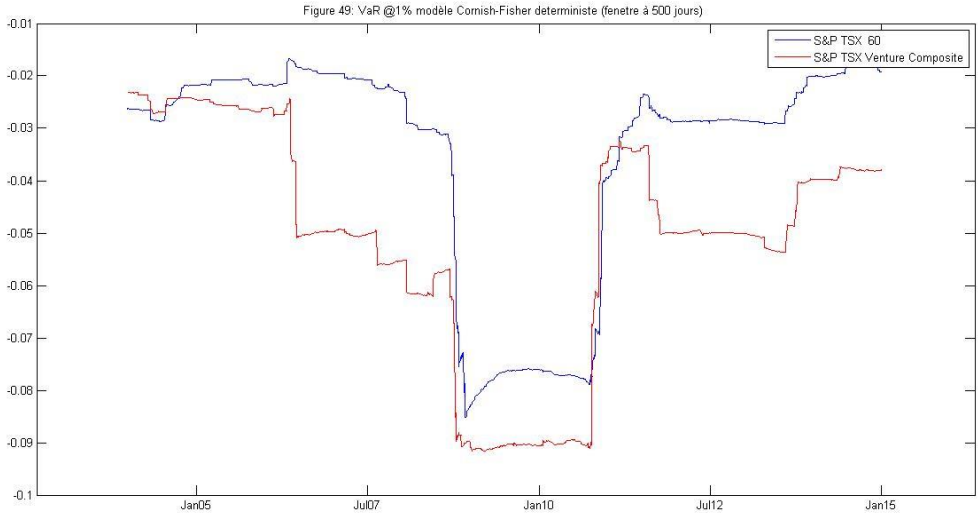


Figure 50:VaR @0.1% modèle Cornish-Fisher deterministe (fenetre à 500 jours)

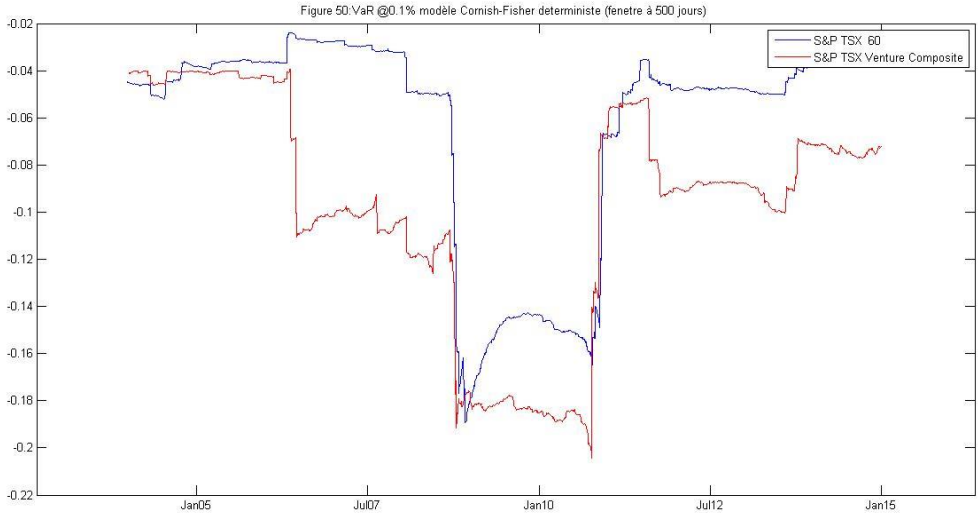


Figure 51: CVaR @5% modèle Cornish-Fisher deterministe (fenetre à 500 jours)

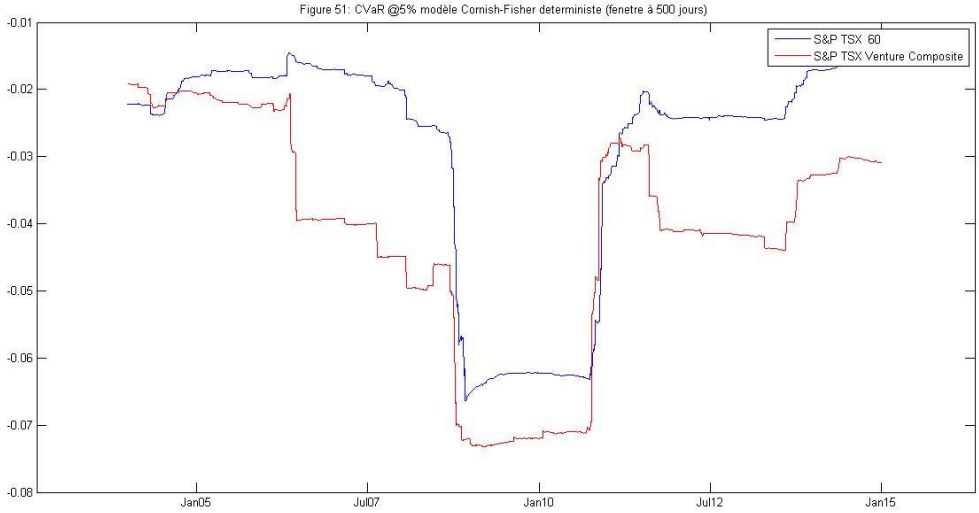


Figure 52: CVaR @1% modèle Cornish-Fisher deterministe (fenetre à 500 jours)

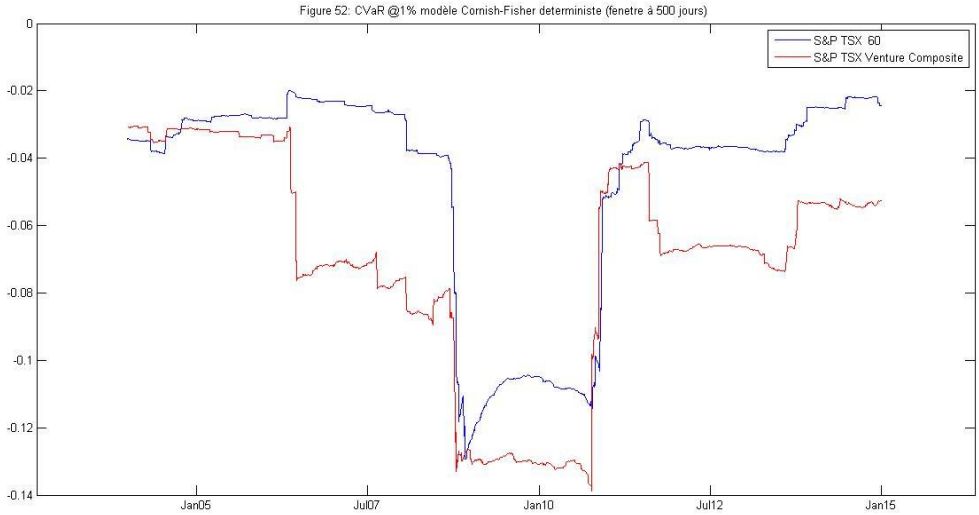


Figure 53: CVaR @0.1% modèle Cornish-Fisher deterministe (fenetre à 500 jours)

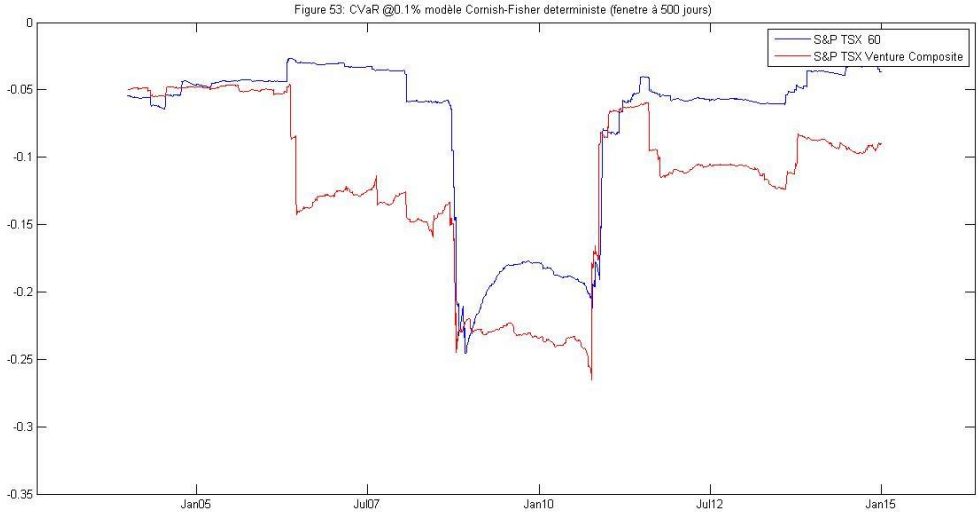


Figure 54: VaR @ 5% modèle GARCH-Normal (fenetre à 500 jours)

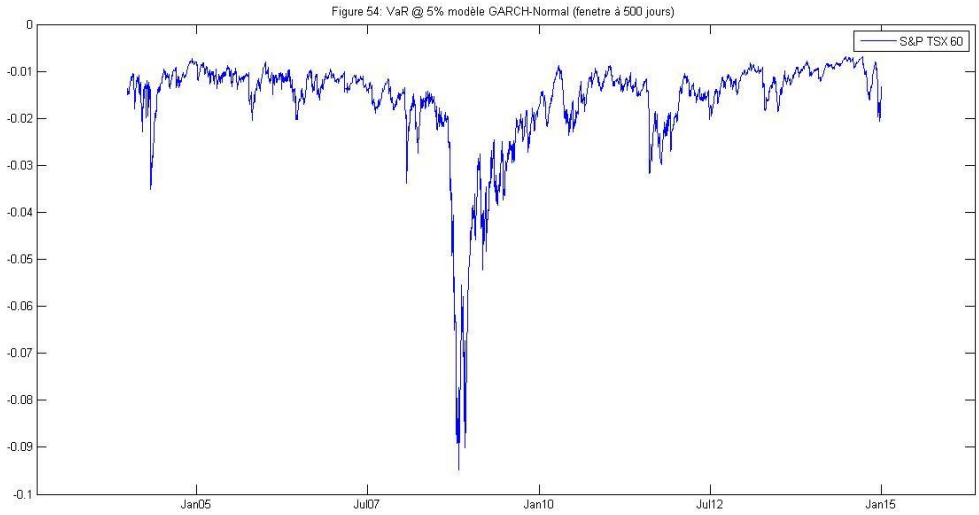


Figure 55: VaR @ 5% modèle GARCH-Normal (fenetre à 500 jours)

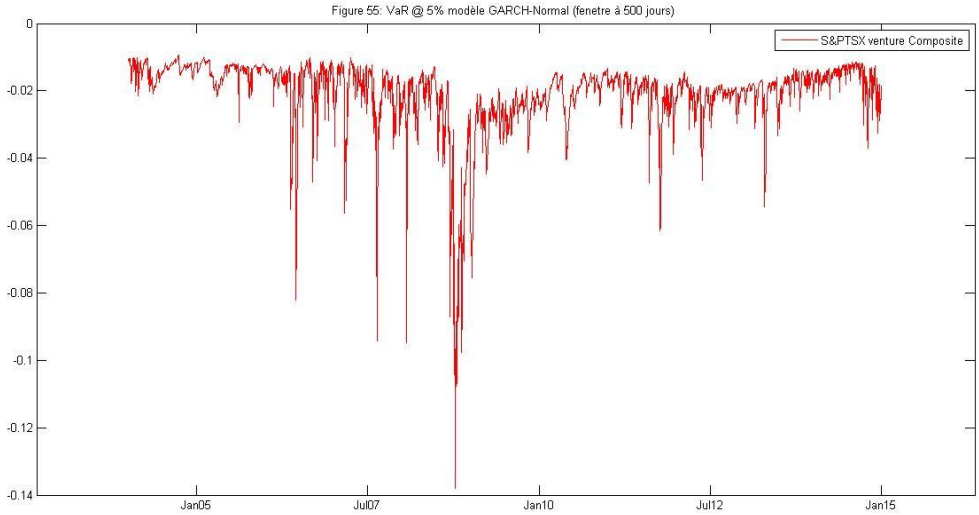


Figure 56: CVaR @ 5% modèle GARCH-Normal (fenetre à 500 jours)

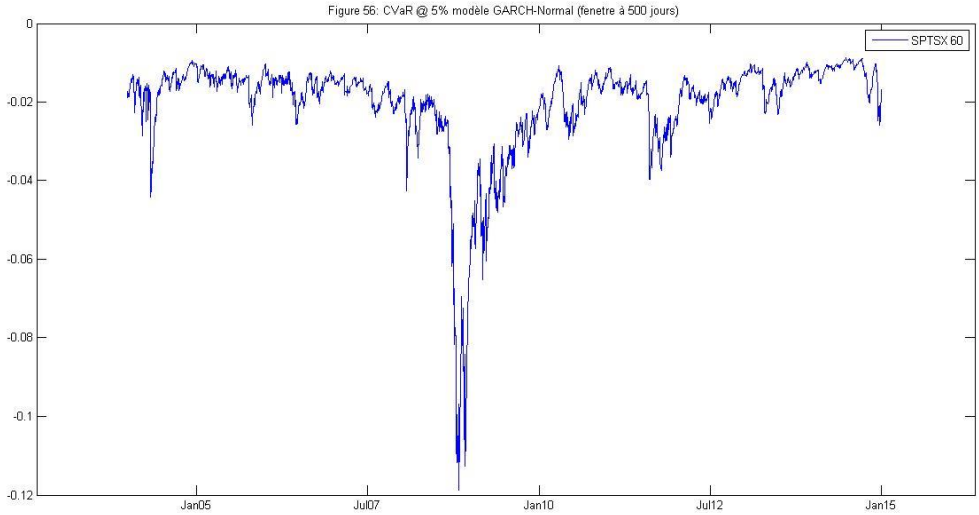


Figure 57: CVaR @ 5% modèle GARCH-Normal (fenetre à 500 jours)

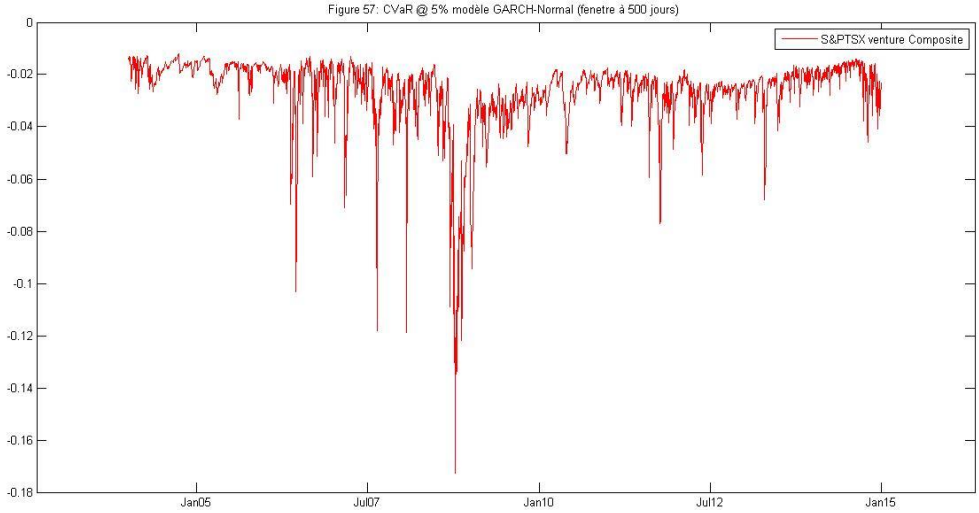


Figure 58: VaR @ 5% modèle Student-t GARCH (fenetre à 500 jours)

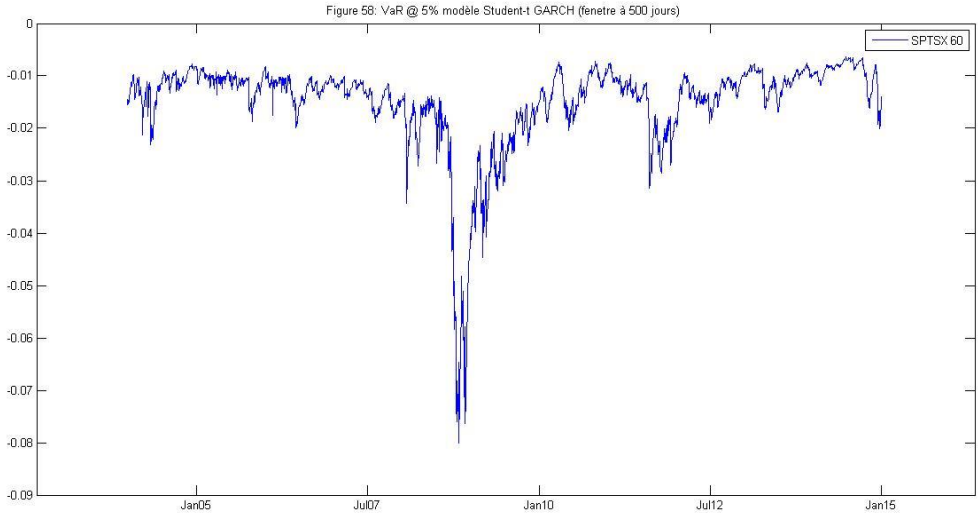


Figure 59: VaR @ 5% modèle Student-t GARCH (fenetre à 500 jours)

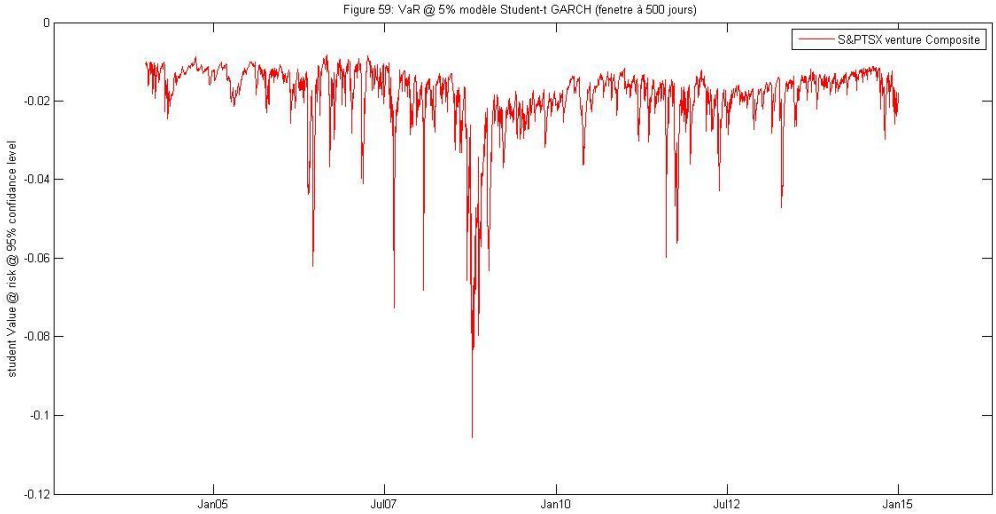


Figure 60: CVaR @ 5% modèle Student-t GARCH (fenetre à 500 jours)

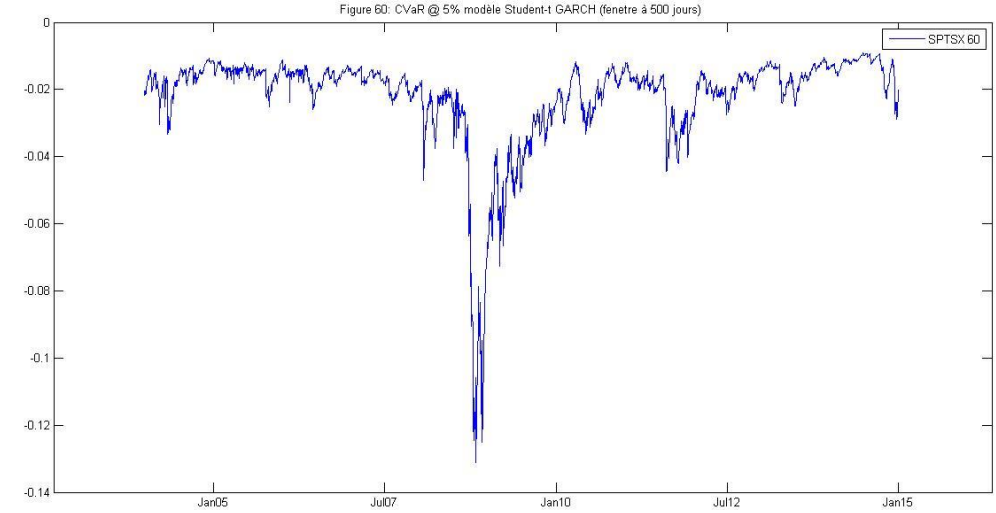


Figure 61: CVaR @ 5% modèle Student-t GARCH (fenetre à 500 jours)

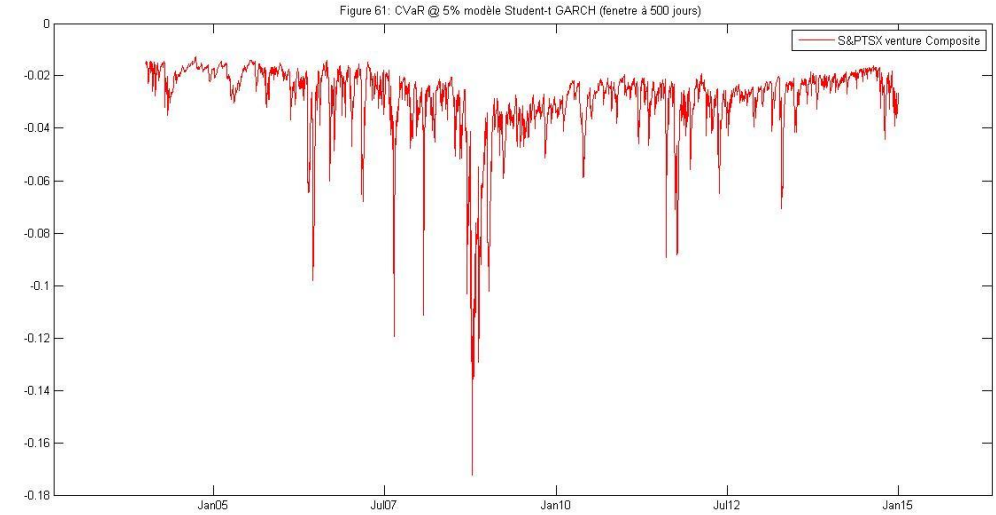


Figure 62: VaR @5% modèle Cornish-Fisher GARCH (fenetre à 500 jours)

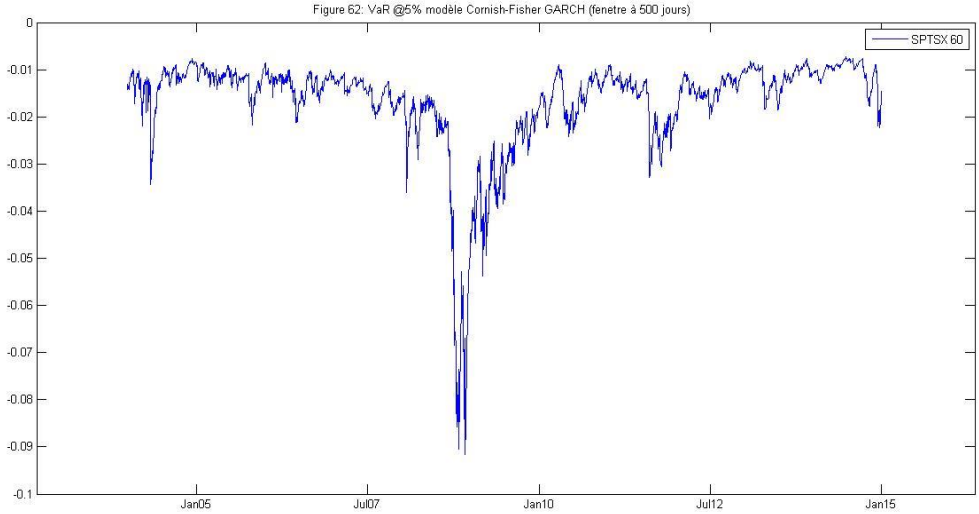


Figure 63: VaR @5% modèle Cornish-Fisher GARCH (fenetre à 500 jours)

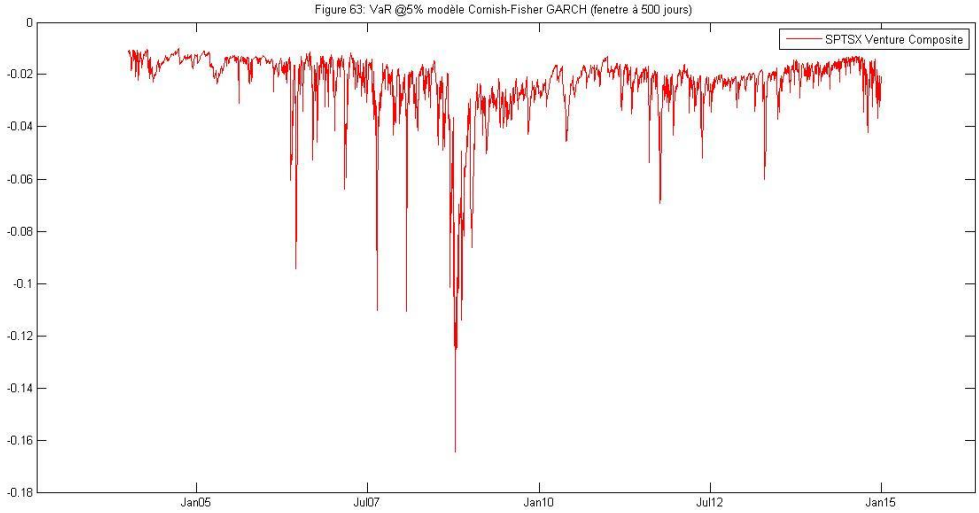


Figure 64: CVaR @5% modèle Cornish-Fisher GARCH (fenetre à 500 jours)

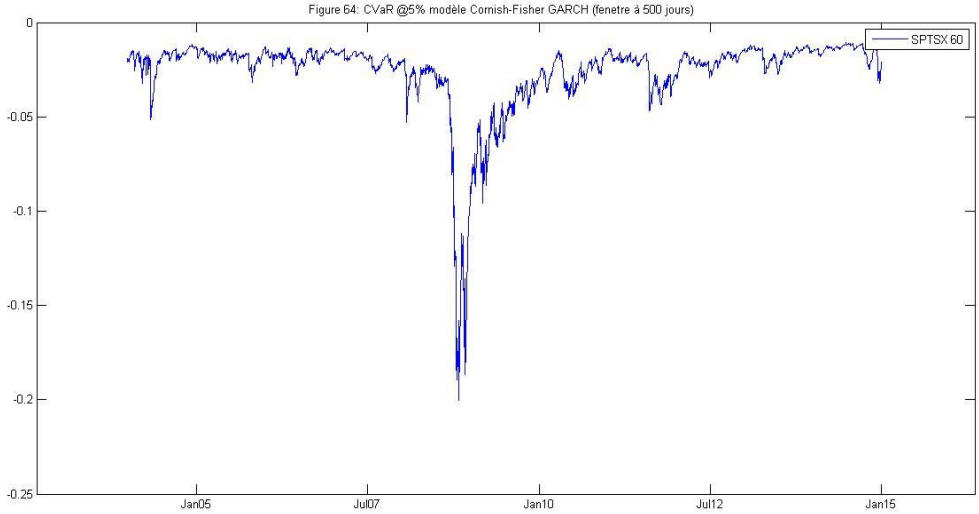


Figure 65: CVaR @5% modèle Cornish-Fisher GARCH (fenetre à 500 jours)

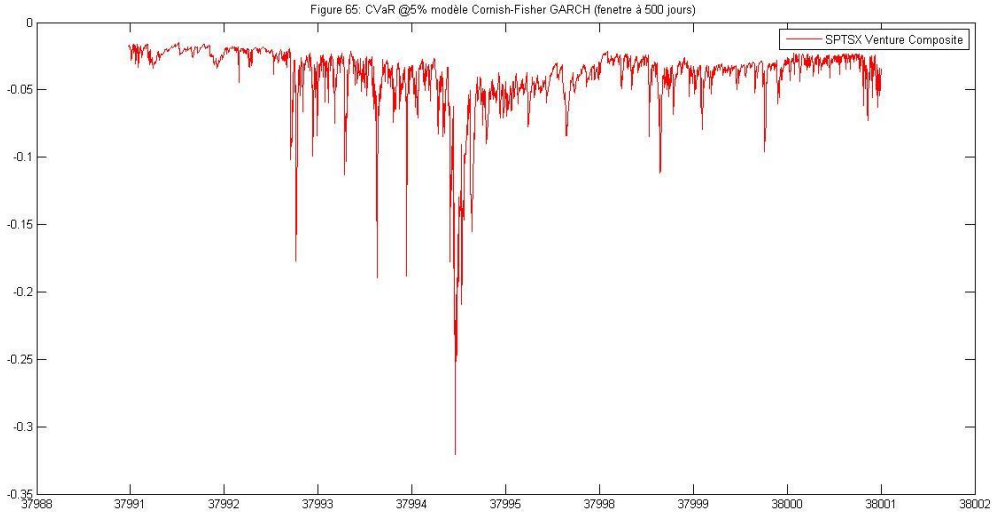


Figure 66: VaR @5% modèle Gaussien-EGARCH (fenetre à 500 jours)

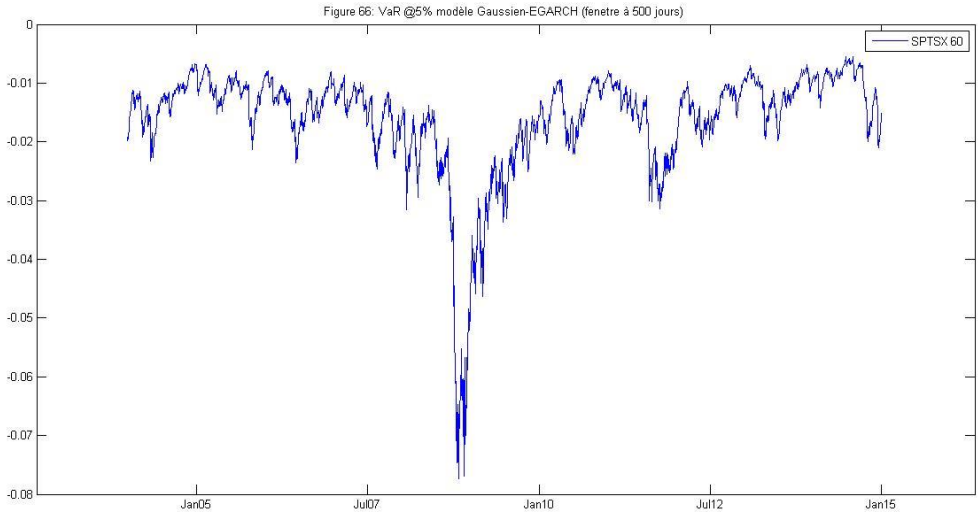


Figure 67: VaR @5% modèle Gaussien-EGARCH (fenetre à 500 jours)

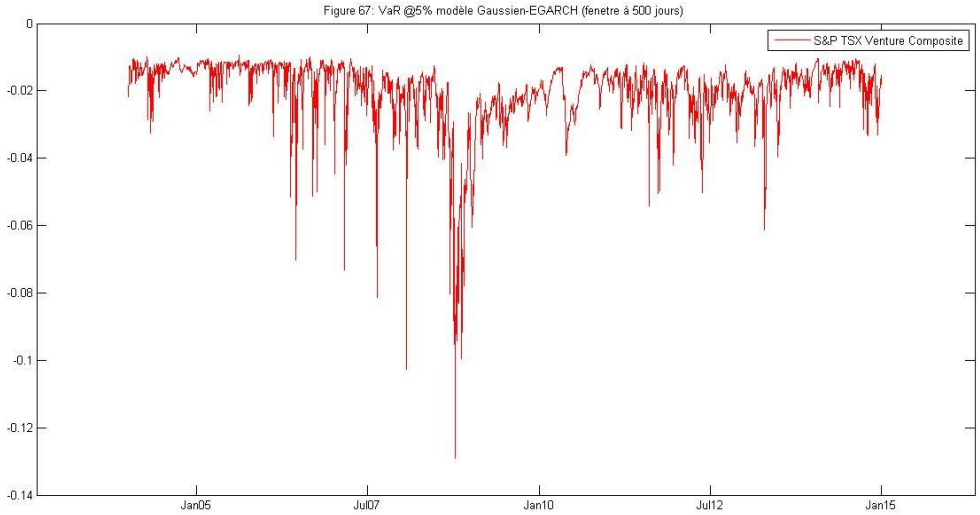


Figure 68: CVaRs @5% modèle Gaussien-EGARCH (fenetre à 500 jours)

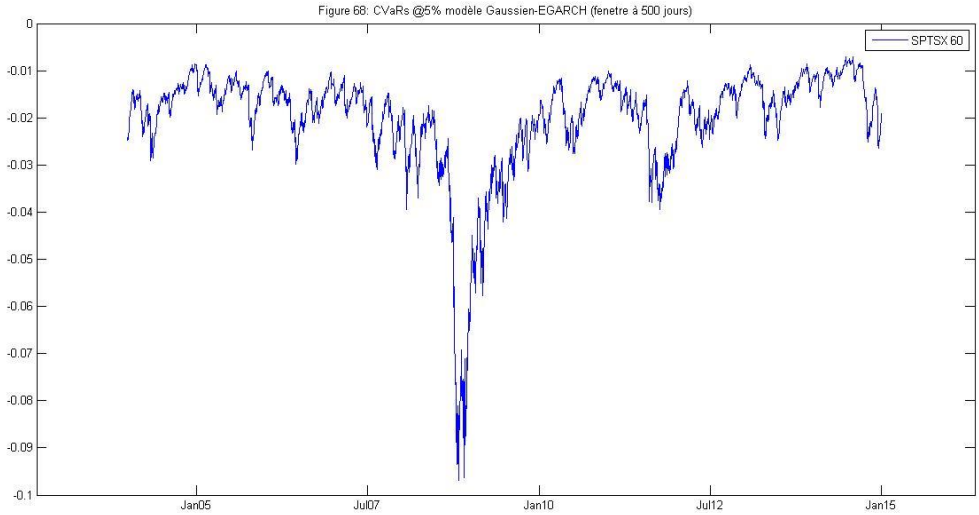


Figure 69: CVaRs @5% modèle Gaussien-EGARCH (fenetre à 500 jours)

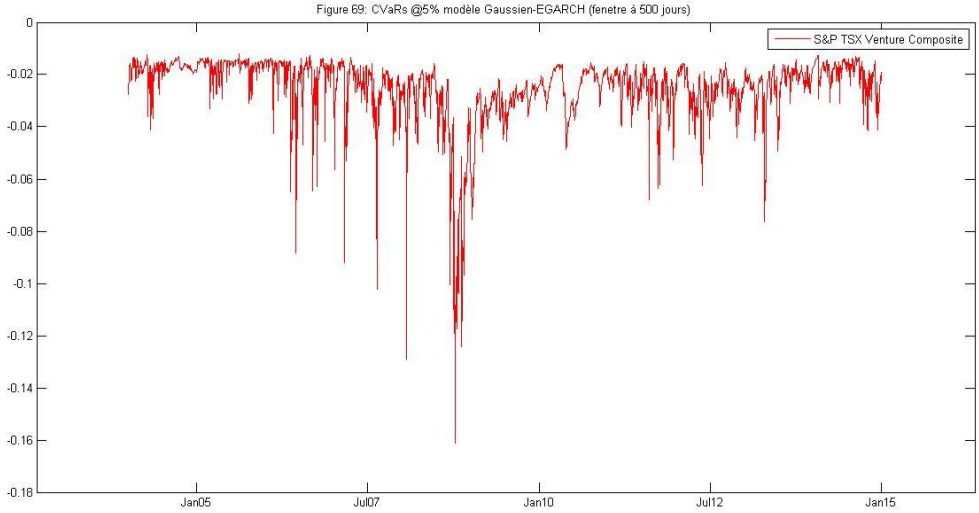


Figure 70: VaR @5% modèle Student-t EGARCH (fenetre à 500 jours)

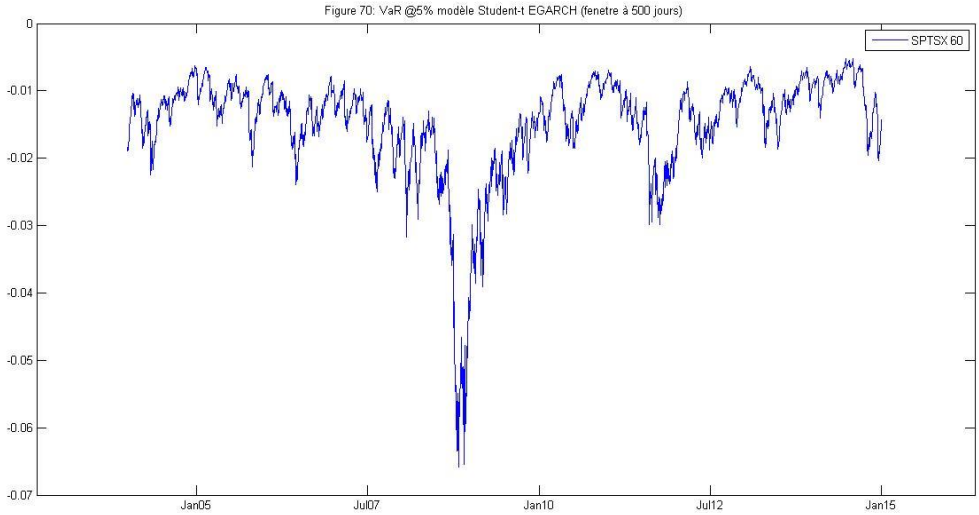


Figure 71: VaR @5% modèle Student-t EGARCH (fenetre à 500 jours)

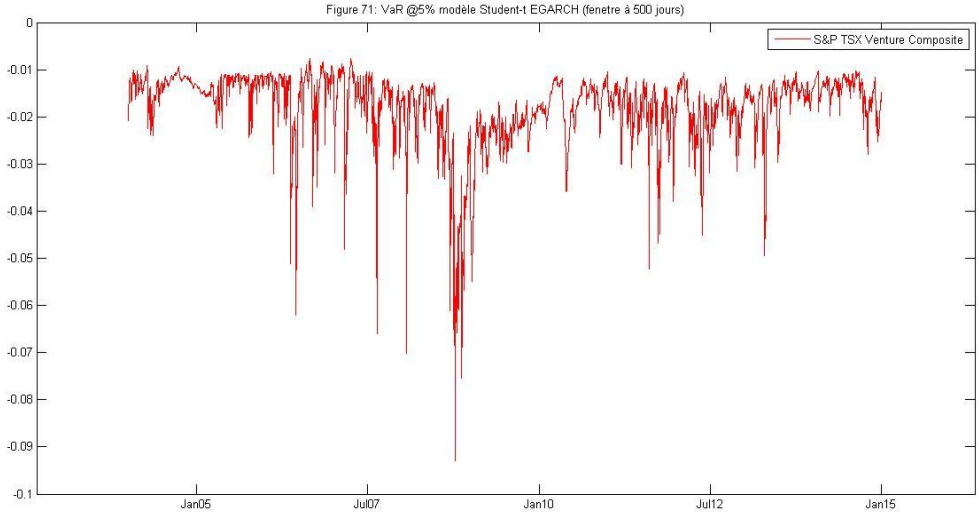


Figure 72: CVaR @5% modèle Student-t EGARCH (fenetre à 500 jours)

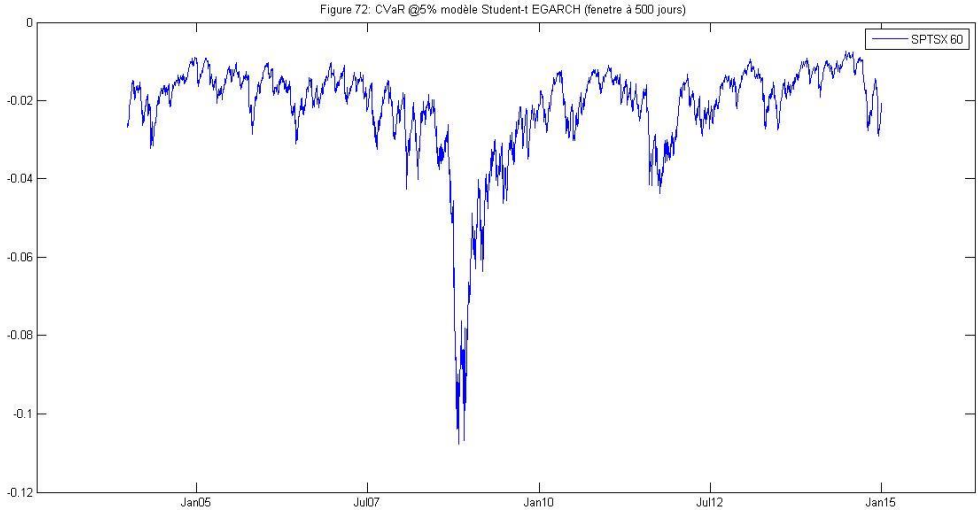


Figure 73: CVaR @5% modèle Student-t EGARCH (fenetre à 500 jours)

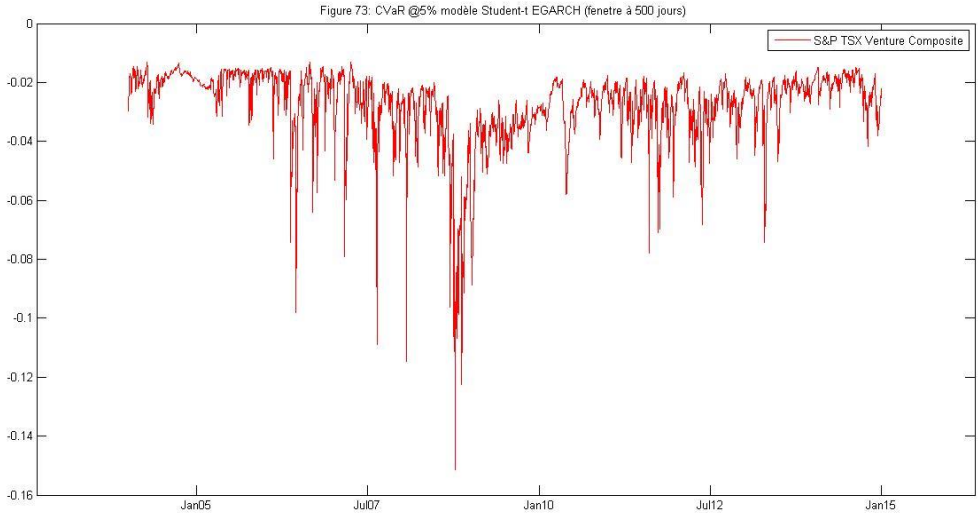


Figure 74: VaR @ 5% modèle Cornish-Fisher EGARCH (fenetre à 500 joiurs)

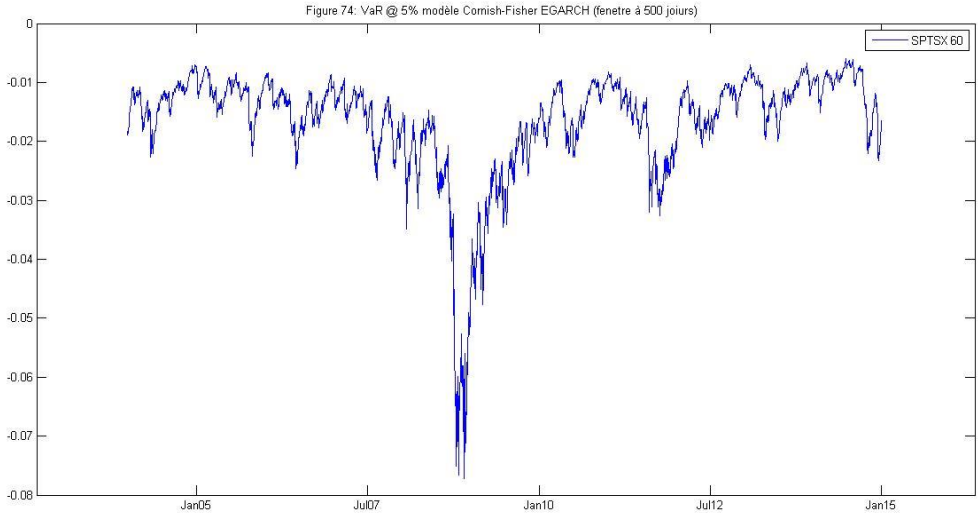


Figure 75: VaR @ 5% modèle Cornish-Fisher EGARCH (fenetre à 500 joiurs)

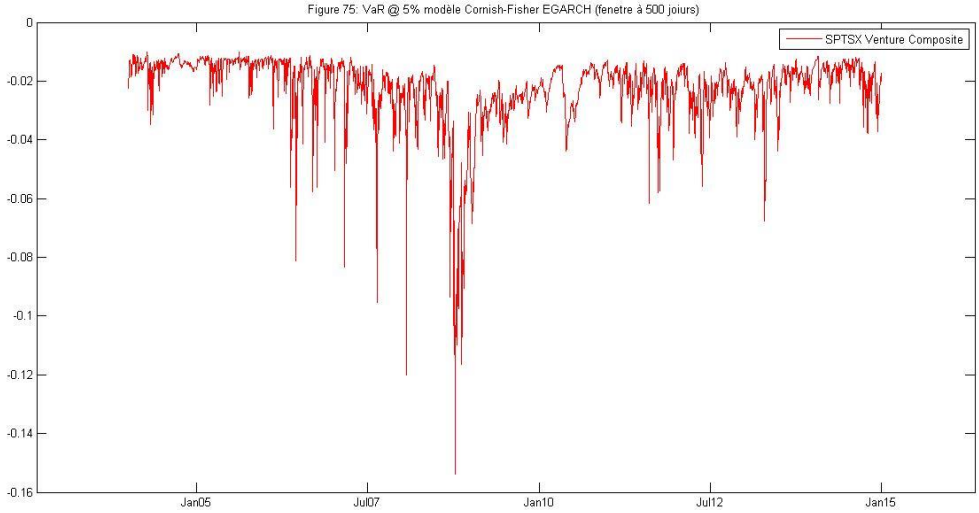


Figure 76: CVaR @ 5% modèle Cornish-Fisher EGARCH (fenetre à 500 joiurs)

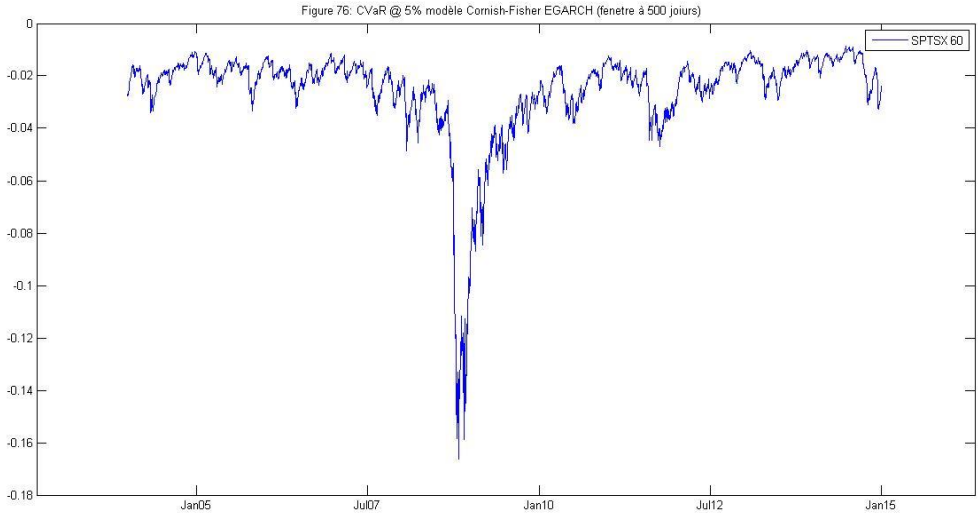
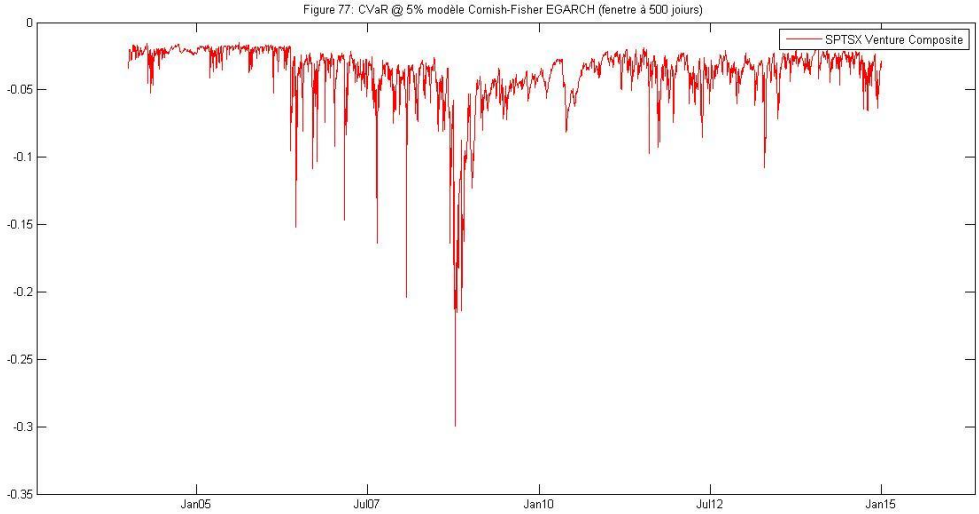


Figure 77: CVaR @ 5% modèle Cornish-Fisher EGARCH (fenetre à 500 joiurs)



Annexe 3 : Tableaux présentant les résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR

	Modèle Gaussien déterministe fenetre à 250 jours					
	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
significance level	5%	1%	0.1%	5%	1%	0.1%
T	3016	3016	3016	3003	3003	3003
T_0	2830	2935	2983	2796	2917	2961
N	186	81	33	207	86	42
n_{00}	2670	2863	2949	2633	2844	2923
n_{01}	159	71	33	162	7	37
n_{10}	159	71	33	162	72	37
n_{11}	27	10	0	45	14	5
π	0.0617	0.0269	0.0109	0.0690	0.0286	0.0140
π_{01}	0.0562	0.0242	0.0111	0.0580	0.0247	0.0125
π_{11}	0.1452	0.1235	0	0.2174	0.1628	0.1190
LR_{UC}	8.0769	59.2357	98.2414	Inf	70.0903	144.1120
LR_{IND}	18.0956	16.4818	0	Inf	28.9655	13.5688
L_{CC}	26.1725	75.7175	98.2414	Inf	99.0557	157.6808
	Modèle Gaussien déterministe fenetre à 500 jours					
	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
significance level	5%	1%	0.1%	5%	1%	0.1%
T	2766	2766	2766	2753	2753	2753
T_0	2589	2687	2732	2565	2666	2709
N	177	79	34	188	87	44
n_{00}	2434	2614	2700	2418	2593	2670
n_{01}	154	72	31	146	72	38
n_{10}	154	72	31	146	72	38
n_{11}	23	7	3	42	15	6
π	0.0640	0.0286	0.0123	0.0683	0.0316	0.0160
π_{01}	0.0595	0.0268	0.0114	0.0569	0.0270	0.0140
π_{11}	0.1299	0.0886	0.0882	0.2234	0.1724	0.1364
LR_{UC}	10.5133	64.1034	108.49	17.4852	82.5771	162.0196
LR_{IND}	10.9688	6.9669	7.0704	51.8650	30.1968	16.4912
L_{CC}	21.4820	71.0703	115.56	69.3502	112.7739	178.5108

Tableau 13: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR pour les modèles Gaussien déterministes

	Modèle Student-t déterministe fenetre à 250 jours					
	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
significance level	5%	1%	0.1%	5%	1%	0.1%
T	3016	3016	3016	3003	3003	3003
T_0	2820	2951	3006	2769	2939	2987
N	196	65	10	234	64	16
n_{00}	2652	2889	2995	2594	2883	2970
n_{01}	167	61	10	174	55	16
n_{10}	167	61	10	174	55	16
n_{11}	29	4	0	60	9	0
π	0.0650	0.0216	0.0033	0.0779	0.0213	0.0053
π_{01}	0.0592	0.0207	0.0033	0.0629	0.0187	0.0054
π_{11}	0.1480	0.0615	0	0.2564	0.1406	0
LR_{UC}	13.0836	30.5513	10.0213	Inf	29.3055	27.5977
LR_{IND}	18.2579	3.4113	0	Inf	20.6482	0
L_{CC}	31.3416	33.9626	10.0213	Inf	49.9537	27.5977
	Modèle Student-t déterministe fenetre à 500 jours					
	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
significance level	5%	1%	0.1%	5%	1%	0.1%
T	2766	2766	2766	2753	2753	2753
T_0	2574	2709	2759	2527	2694	2742
N	192	57	7	226	59	11
n_{00}	2406	2655	2751	2356	2642	2730
n_{01}	167	53	7	170	51	11
n_{10}	167	53	7	170	51	11
n_{11}	25	4	0	56	8	0
π	0.0694	0.0206	0.0025	0.0821	0.0214	0.0040
π_{01}	0.0649	0.0196	0.0025	0.0673	0.0189	0.0040
π_{11}	0.1302	0.0702	0	0.2478	0.1356	0
LR_{UC}	19.6839	24.0648	4.5376	Inf	27.3716	14.0052
LR_{IND}	9.7137	4.4439	0	Inf	17.6945	0
L_{CC}	29.3976	28.5086	4.5376	Inf	45.0661	14.0052

Tableau 14: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR pour les modèles Student-t déterministes

	Modèle Cornish-Fisher déterministe fenetre à 250 jours					
	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
significance level	5%	1%	0.1%	5%	1%	0.1%
T	3016	3016	3016	3003	3003	3003
T_0	2852	2972	3009	2834	2969	2995
N	164	44	7	169	34	8
n_{00}	2713	2928	3001	2702	2938	2986
n_{01}	138	43	7	131	30	8
n_{10}	138	43	7	131	30	8
n_{11}	26	1	0	38	4	0
π	0.0544	0.0146	0.0023	0.0563	0.0113	0.0027
π_{01}	0.0484	0.0145	0.0023	0.0462	0.0101	0.0027
π_{11}	0.1585	0.0227	0	0.2249	0.1176	0
LR_{UC}	1.1840 *	5.6195	3.8250	2.3980 *	0.5084 *	5.6916
LR_{IND}	25.4830	0.1762 *	0	59.4193	12.3064	0
L_{CC}	26.6671	5.7956	3.8250*	61.8174	12.8149	5.6916
	Modèle Cornish-Fisher déterministe fenetre à 500 jours					
	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
significance level	5%	1%	0.1%	5%	1%	0.1%
T	2766	2766	2766	2753	2753	2753
T_0	2602	2727	2762	2598	2727	2748
N	164	39	4	155	26	5
n_{00}	2461	2687	2757	2476	2701	2742
n_{01}	140	39	4	121	25	5
n_{10}	140	39	4	121	25	5
n_{11}	24	0	0	34	1	0
π	0.0593	0.0141	0.0014	0.0563	0.0094	0.0018
π_{01}	0.0538	0.0143	0.0014	0.0466	0.0092	0.0018
π_{11}	0.1463	0	0	0.2194	0.0385	0
LR_{UC}	4.7569	4.1658	0.4837 *	2.2157 *	0.0875 *	1.4753 *
LR_{IND}	17.61	0	0	51.45	1.3439 *	0
L_{CC}	22.37	4.1658	0.4837 *	53.67	1.4314 *	1.4753 *

Tableau 15: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR pour les modèles Cornish-Fisher déterministes

	Modèle GARCH-GAUSSIEN fenetre à 500 jours					
	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
significance level	5%	1%	0.1%	5%	1%	0.1%
T	2766	2766	2766	2753	2753	2753
T_0	2577	2710	2751	2569	2684	2728
N	189	56	15	184	69	25
n_{00}	2403	2653	2735	2405	2615	2702
n_{01}	173	56	15	163	68	25
n_{10}	173	56	15	163	68	25
n_{11}	16	0	0	21	1	0
π	0.0684	0.0203	0.0054	0.0669	0.0251	0.0091
π_{01}	0.0672	0.0207	0.0055	0.0635	0.0253	0.0092
π_{11}	0.0847	0	0	0.1141	0.0145	0
LR_{UC}	17.6422	22.6151	26.31	14.93	44.49	65.99
LR_{IND}	0.7949 *	0	0	5.99	0.38 *	0
L_{CC}	18.4371	22.6151	26.31	20.92	44.87	65.99
	Modèle EGARCH-GAUSSIEN fenetre à 500 jours					
	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
significance level	5%	1%	0.1%	5%	1%	0.1%
T	2766	2766	2766	2753	2753	2753
T_0	2583	2707	2752	2569	2680	2725
N	183	59	14	184	73	28
n_{00}	2408	2647	2737	2401	2608	2696
n_{01}	174	59	14	167	71	28
n_{10}	174	59	14	167	71	28
n_{11}	9	0	0	17	2	0
π	0.0662	0.0213	0.0051	0.0669	0.0265	0.0102
π_{01}	0.0674	0.0218	0.0051	0.0650	0.0265	0.0103
π_{11}	0.0492	0	0	0.0924	0.0274	0
LR_{UC}	13.8670	27.0710	22.9841	14.9278	52.1996	79.6312
LR_{IND}	0.9950 *	0	0	1.8697*	0.0022 *	0
L_{CC}	14.8621	27.0710	22.9841	16.7976	52.2018	79.6312

Tableau 16: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR pour les modèles Gaussien stochastiques

	Modèle Student-GARCH fenetre à 500 jours					
	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
significance level	5%	1%	0.1%	5%	1%	0.1%
T	2766	2766	2766	2753	2753	2753
T_0	2554	2726	2760	2533	2707	2749
N	212	40	6	220	46	4
n_{00}	2359	2685	2753	2337	2660	2744
n_{01}	194	40	6	195	46	4
n_{10}	194	40	6	195	46	4
n_{11}	18	0	0	25	0	0
π	0.0767	0.0145	0.0022	0.0799	0.0167	0.0015
π_{01}	0.0760	0.0147	0.0022	0.0770	0.0170	0.0015
π_{11}	0.0849	0	0	0.1136	0	0
LR_{UC}	Inf	4.8871	2.8281	Inf	10.4150	0.4954*
LR_{IND}	Inf	0	0	Inf	0	0
L_{CC}	Inf	4.8871	2.8281*	Inf	10.4150	0.4954*
	Modèle Student-EGARCH fenetre à 500 jours					
	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
significance level	5%	1%	0.1%	5%	1%	0.1%
T	2766	2766	2766	2753	2753	2753
T_0	2552	2728	2761	2530	2708	2751
N	214	38	5	223	45	2
n_{00}	2350	2689	2755	2334	2663	2748
n_{01}	201	38	5	195	44	2
n_{10}	201	38	5	195	44	2
n_{11}	13	0	0	28	1	0
π	0.0774	0.0137	0.0018	0.0810	0.0164	7.267×10-4
π_{01}	0.0788	0.0139	0.0018	0.0771	0.0163	7.273×10-4
π_{11}	0.0607	0	0	0.1256	0.0222	0
LR_{UC}	Inf	3.4966	1.4542*	Inf	9.3970	0.2280*
LR_{IND}	Inf	0	0	Inf	0.0884*	0
L_{CC}	Inf	3.4966*	1.4542*	Inf	9.4853	0.2280*

Tableau 17: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR pour les modèles Student-t stochastiques

	Modèle Cornish Fisher-GARCH fenetre à 500 jours					
	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
significance level	5%	1%	0.1%	5%	1%	0.1%
T	2766	2766	2766	2753	2753	2753
T_0	2597	2741	2762	2609	2739	2751
N	169	25	4	144	14	2
n_{00}	2438	2715	2757	2476	2724	2748
n_{01}	158	25	4	132	14	2
n_{10}	158	25	4	132	14	2
n_{11}	11	0	0	12	0	0
π	0.0611	0.0090	0.0014	0.0523	0.0051	7.267×10-4
π_{01}	0.0609	0 0.0091	0.0014	0.0506	0.0051	7.273×10-4
π_{11}	0.0651	0	0	0.0833	0	0
LR_{UC}	6.7201	0.2670*	0.4837*	0.3040 *	8.1929	0.2280 *
LR_{IND}	0.0485 *	0	0	2.5420 *	0	0
L_{CC}	6.7686	0.2670*	0.4837*	2.8459 *	8.1929	0.2280*
	Modèle Cornish Fisher-EGARCH fenetre à 500 jours					
	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
significance level	5%	1%	0.1%	5%	1%	0.1%
T	2766	2766	2766	2753	2753	2753
T_0	2604	2745	2764	2608	2739	2752
N	162	21	2	145	14	1
n_{00}	2449	2723	2761	2472	2724	2750
n_{01}	154	21	2	135	14	1
n_{10}	154	21	2	135	14	1
n_{11}	8	0	0	10	0	0
π	0.0586	0.0076	7.233×10-4	0.0527	0.0051	3.634×10-4
π_{01}	0.0592	0.0077	7.239×10-4	0.0518	0.0051	3.635×10-4
π_{11}	0.0494	0	0	0.0690	0	0
LR_{UC}	4.0618	1.7667 *	0.2352 *	0.4063 *	8.1929	1.4817 *
LR_{IND}	0.2777 *	0	0	0.7476 *	0	0.0001*
L_{CC}	4.3395	1.7667 *	0.2352 *	1.1540 *	8.1929	1.4819 *

Tableau 18: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la VaR pour les modèles Cornish-Fisher stochastiques

Annexe 4 : Tableaux présentant les résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR

	CVaR - Loi Normale - Fenêtre 500jours					
Indice	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
Niveau de confiance	95%	99%	99.9%	95%	99%	99.9%
Statistique de test	-0.5638	-2.4416	-13.6470	-0.7563	-3.1154	-19.5433

Tableau 19: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Gaussien déterministe

	CVaR - Loi Student - Fenêtre 500jours					
Indice	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
Niveau de confiance	95%	99%	99.9%	95%	99%	99.9%
Statistique de test	-0.5491	-1.1906	-1.5487	-0.8041	-1.2738	-2.6139

Tableau 20: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Student-t déterministe

	CVaR – Cornish Fisher - Fenêtre 500jours					
Indice	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
Niveau de confiance	95%	99%	99.9%	95%	99%	99.9%
Statistique de test	-0.2024*	-0.3814*	-0.4414*	-0.0927*	-2.3384	-19.6101

Tableau 21: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Cornish-Fisher déterministe

	CVaR – GARCH Normale - Fenêtre 500jours					
Indice	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
Niveau de confiance	95%	99%	99.9%	95%	99%	99.9%
Statistique de test	-0.4544*	-1.1622	-5.1526	-0.5582*	-2.0532	-9.2171

Tableau 22: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Gaussien GARCH

	CVaR – EGARCH Normale - Fenêtre 500jours					
Indice	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
Niveau de confiance	95%	99%	99.9%	95%	99%	99.9%
Statistique de test	-0.4213*	-1.2872	-4.4217	-0.5484*	-2.0589	-10.4091

Tableau 23: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Gaussien EGARCH

	CVaR – GARCH Student - Fenêtre 500jours					
Indice	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
Niveau de confiance	95%	99%	99.9%	95%	99%	99.9%
Statistique de test	-0.5050*	-0.4100*	-1.1860	-0.5928*	-0.5610*	-0.3204*

Tableau 24: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Student-t GARCH

	CVaR – EGARCH Student - Fenêtre 500jours					
Indice	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
Niveau de confiance	95%	99%	99.9%	95%	99%	99.9%
Statistique de test	-0.4875*	-0.3295*	-0.8885	-0.5935*	-1.5060	-0.5825*

Tableau 25: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Student-t EGARCH

	CVaR – Cornish Fisher GARCH - Fenêtre 500jours					
Indice	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
Niveau de confiance	95%	99%	99.9%	95%	99%	99.9%
Statistique de test	-0.1253*	0.1183*	-0.4203*	0.0670*	0.4729*	0.2751*

Tableau 26: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Cornish-Fisher GARCH

	CVaR – Cornish Fisher EGARCH - Fenêtre 500jours					
Indice	S&P TSX 60			S&P TSX Venture Composite		
Niveau de confiance	95%	99%	99.9%	95%	99%	99.9%
Statistique de test	-0.0614*	0.2515*	0.2022*	0.0784*	0.5150*	0.6441*

Tableau 27: Résultats des tests rétroactifs appliqués à la CVaR pour le modèle Cornish-Fisher EGARCH

Annexe 5 : Fonction de perte

S&P TSX 60		
Modèle	**Somme des erreurs au carré**	**Erreur quadratique moyenne**
Cornish-Fisher GARCH 99%	1,5772	5,70E-04
Cornish-Fisher EGARCH 99%	1,3035	4,71E-04

Tableau 28 : Fonction de perte des modèles non rejetés au niveau de confiance 99% pour le S&P TSX 60

S&P TSX 60		
Modèle	**Somme des erreurs au carré**	**Erreur quadratique moyenne**
Cornish-Fisher avec moments historiques 99.9%	1,5627	5,65E-04
Student EGARCH 99.9%	2,5063	9,06E-04
Cornish-Fisher GARCH 99.9%	8,3305	0,0033
Cornish-Fisher EGARCH 99.9%	6,2128	0,0022

Tableau 29 : Fonction de perte des modèles non rejetés au niveau de confiance 99.9% pour le S&P TSX 60

S&P TSX Venture Composite		
Modèle	**Somme des erreurs au carré**	**Erreur quadratique moyenne**
Cornish-Fisher GARCH 95%	0,3895	1,42E-04
Cornish-Fisher EGARCH 95%	0,345	1,25E-04

Tableau 30 : Fonction de perte des modèles non rejetés au niveau de confiance 95% pour le S&P TSX Venture Composite

S&P TSX Venture Composite		
modèle	**Somme des erreurs au carré**	**Erreur quadratique moyenne**
Cornish-Fisher avec moments historiques 99.9%	1.7160	6.2333e-04
Student GARCH 99.9%	3.6154	0.0013
Student EGARCH 99.9%	3.1789	0.0012
Cornish-Fisher GARCH 99.9%	8.4892	0.0031
Cornish-Fisher EGARCH 99.9%	6.9367	0.0025

Tableau 31 : Fonction de perte des modèles non rejetés au niveau de confiance 99.9% pour le S&P TSX Venture Composite

Annexe 6 : Test de Sarma et al(2003)

S&P TSX 60		
modèle	*h*	*p-value*
Cornish-Fisher déterministe VS Student EGARCH	1	8.7943e-61
Cornish-Fisher déterministe VS Cornish-Fisher GARCH	1	8.7644e-04
Cornish-Fisher déterministe VS Cornish-Fisher EGARCH	1	1.1324e-21

Tableau 32 : Test de Sarma et al (2003) pour le S&P TSX 60

S&P TSX Venture Composite		
modèle	*h*	*p-value*
Cornish-Fisher déterministe VS Student GARCH	1	9.7395e-21
Cornish-Fisher déterministe VS Student EGARCH	1	3.2865e-21
Cornish-Fisher déterministe VS Cornish-Fisher GARCH	1	4.6736e-55
Cornish-Fisher déterministe VS Cornish-Fisher EGARCH	1	3.0435e-31

Tableau 33 : Test de Sarma et al (2003) pour le S&P TSX Venture Composite

.

Références bibliographiques

Alexander C. (2001), Market Models: A Guide to Financial Data Analysis, Chichester, John Wiley & Sons.

Alexander C, Value at Risk Models, John Wiley & Sons Ltd, 2008.

Angelidis, T., A. Benos, and S. Degiannakis (2004). The use of GARCH models in VaR estimation. Statistical Methodology 1(12), 105–128.

ARTZNER, P., F. DELBAEN, J-M EBER and D. HEATH. (1997). «Thinking coherently», Risk 10, p. 33-49, p. 68-71

ARTZNER, P., F. DELBAEN, J-M EBER and D. HEATH. (1999). «Coherent measures of risk», Mathematical Finance 9, p. 203-228

Basel Committee on Banking Supervision (1996) "Amendment to Capital Accord to Incorporate Market Risks", Basel Committee on Banking Supervision, Basel: Bank for International Settlements.

Basel Committee on Banking Supervision (1996) "Supervisory Framework for the Use of Backtesting in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirement", Basel: Bank for International Settlements.

Beder, T. (1995) VAR: Seductive but Dangerous, Financial Analysts Journal, September / October 1995.

BOLLERSLEV, T. (1986). «Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity», Journal of Econometrics, 31, p. 307-327

C. Acerbi. and D. Tasche (2002), “On the Coherence of Expected Shortfall”, Journal of Banking and Finance Vol.26, No.7 pp.1487-1503.

C. Acerbi. and Tasche, D. (2002) Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value at Risk. *Economic Notes* 31(2), 379-388.

C. Acerbi and B. Szekely , MSCI Inc., Workshop on systemic risk and regulatory market risk measures ,Pullach, Germany, June 2014.

C.Acerbi and B.Szekely, Backtesting Expected Shortfall , MSCI Inc..January 21, 2015.

Campbell, S. (2005), A Review of Backtesting and Backtesting Procedure, Finance and Economics Discussion Series, Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs, Federal Reserve Board, Washington D.C.

Christoffersen, P.F. (1998) “Evaluating interval forecasts” International Economic Review Vol.39, pp. 841-862.

Cont, R. (2001) “Empirical Properties of Asset returns: Stylized Facts and Statistical Issues” Quantitative Finance Vol.1 pp.223-236.

D. Ardia, "Bayesian Estimation of the GARCH(1,1) Model with Student-t Innovations," 2011.

Dowd, K. (1998) Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management, Chichester, John Wiley & Sons.

Dowd, K. (2002) Measuring Market Risk, Chichester, John Wiley & Sons.

Dowd, K. (2006), Retrospective Assessment of Value-at-Risk. Risk Management: A Modern Perspective, p. 183-202, San Diego, Elsevier.

ENGLE, R. (1982) “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates of the Variance of U.K. Inflation”, Econometrica Vol.50 pp.987-1008.

ENGLE, R., NG V. (1993). «Measuring and testing the impact of news on volatility», Journal of Finance, 48, p. 1749-1778.

Kupiec, P (1995) “Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models”, Journal of Derivatives Vol.3 pp.73-84.

Lopez, J. (1998), Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates, Economic Policy Review, October 1998, 119-64

Lopez, J. (1999). Methods for evaluating value-at-risk estimates. Federal Reserve Bank of San Francisco Review (2), 3–17.

Lopez, J. (1999), Regulatory Evaluation of Value-at-Risk Models, Journal of Risk 1, 37-64.

MSCI Demonstrates That Backtesting Expected Shortfall is Possible and Could Potentially Replace Value at Risk (VaR) in the Calculation of Regulatory Capital Requirements, Press release, New York – October 22, 2014

P. Petra, "Properties and Estimation of GARCH(1,1) Model," Metodoloˇski zvezki, vol. 2, no. 2, pp. 243-257, 2005.

Sadorsky, P. (2005). Stochastic volatility forecasting and risk management. Applied Financial Economics 15(2), 121–135.

Sarma, M., S. Thomas, and A. Shah (2003). Selection of Value-at-Risk models. Journal of Forecasting 22(4), 337–358.

YAMAI, Y. et T. YOSHIBA. (2002). «On the validity of value-at-risk: comparative analyses with expected shortfall», Monetary and Economic Studies, January 2002