

Les méthodes de tarification des options paniers

Nadia Ouertani¹

Février 2006

Résumé

Les options paniers sont des options portant sur un panier ou un portefeuille d'actifs sous-jacents. Dans cet article, nous proposons de présenter une revue critique de la littérature existante sur les méthodes de tarification des options sur actifs sous-jacents multiples. En effet, les options paniers sont beaucoup plus compliquées à tarifier que les options standards, puisque leur valeur dépend de la somme pondérée de plusieurs actifs sous-jacents corrélés. La raison théorique principale à l'origine de cette difficulté est que la somme pondérée de variables aléatoires lognormales corrélées ne suit pas une distribution lognormale. Par conséquent, il n'existe pas, dans la littérature, d'expression analytique de la fonction de densité du panier sous-jacent à l'option. Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour tarifier les options paniers. Nous les avons principalement regroupées en trois grandes catégories : les méthodes numériques, les méthodes de calcul des bornes inférieure et supérieure et les approximations analytiques.

Mots clés : Options paniers, simulations de Monte Carlo, quasi-Monte Carlo, approximations analytiques, bornes inférieure et supérieure.

Abstract

A basket option is an option on a collection or a basket of assets. In this paper we propose to present a critical survey of the existing literature on the different approaches used to price basket options. The pricing of basket options is more complicated than that of standard options because their payoff depends on the weighted sum of multiple correlated assets. The main theoretical reason for this difficulty is that the finite sum of lognormal variables is not lognormal. Consequently, there is no known closed-form solution to the density function of the underlying basket. Several approaches are proposed in the literature to price basket options. We can regroup these methods in three categories: numerical methods, upper and lower bounds and analytical approximations.

Keywords: Basket options, Monte Carlo simulations, quasi-Monte Carlo, analytical approximations, upper and lower bounds.

¹ *Nadia Ouertani, IESEG School of Management, Lille. Cet article est tiré d'un des chapitres de ma thèse de doctorat à HEC Montréal. Je tiens à remercier mes codirecteurs Georges Dionne et Geneviève Gauthier pour leurs précieux commentaires et recommandations. Mes remerciements s'adressent également aux professeurs qui ont évalué ma thèse : Phelim Boyle, Michel Denault et Pascal François.*

1 Introduction

Avec la croissance des marchés financiers, des produits de plus en plus sophistiqués et complexes sont maintenant offerts. La complexité de ces instruments ne cesse de croître pour répondre aux besoins pressants des entreprises qui cherchent à se couvrir contre des risques de plus en plus nombreux. Ces innovations financières, connues sous le nom d'options exotiques, se caractérisent par des paiements beaucoup plus compliqués que les options standards. Parmi les options exotiques les plus connues nous distinguons les options sur actifs multiples. Contrairement aux options standards, la valeur d'une option sur actifs multiples est déterminée par le comportement de deux ou plusieurs actifs sous-jacents et par les corrélations entre ces actifs. Les options sur actifs multiples peuvent être regroupées en trois catégories :¹ les options arc-en-ciel, ou encore en terminologie anglo-saxonne, "*rainbow options*", les options quantos et les options paniers. Dans cet article nous allons nous intéresser particulièrement à la littérature sur les méthodes de tarification des options paniers.

Les options paniers sont des options dont le paiement à l'échéance est lié à un portefeuille ou un panier d'actifs sous-jacents. Celles-ci présentent les mêmes caractéristiques qu'une option standard à la différence que l'actif sous-jacent servant de référence est, en fait, un panier de plusieurs actifs. Par conséquent, le prix d'exercice est basé sur la valeur pondérée des actifs composant le portefeuille. Le panier sous-jacent peut être une somme pondérée de n'importe quels actifs, dans la mesure où tous les poids sont positifs. Ainsi, nous trouvons des options paniers sur devises, sur denrées, sur actions ou encore sur taux d'intérêt. Toutefois, les options paniers les plus connues sont les options sur paniers de devises. Les options paniers sont généralement réglées en espèces. Ces dernières sont transigées sur le marché hors bourse, elles sont faites sur mesure pour répondre aux besoins spécifiques des investisseurs.

Les options paniers ont été développées dans le but de fournir un instrument de couverture qui coûterait moins cher que la couverture standard à l'aide de plusieurs options sur chacun des actifs composant le panier. En effet, la prime liée à l'option panier est habituellement plus faible que la somme pondérée des primes des options individuelles. Cet avantage comparatif au niveau des coûts de couverture est d'autant plus important que les corrélations entre les différentes composantes du panier sont faibles. Ainsi, le détenteur de l'option panier peut voir la baisse d'un actif compenser, en tout ou partie, la hausse d'un autre.

Toutefois, la tarification des options paniers n'est pas une tâche triviale puisqu'il n'existe pas dans la littérature de solution fermée connue pour la fonction de densité de la somme pondérée de variables aléatoires lognormales corrélées. En effet, les options paniers s'inscrivent dans la classe des droits contingents multidimensionnels impliquant que les flux monétaires futurs sont conditionnels à plusieurs sources d'incertitude. Comme la somme finie de variables aléatoires lognormales corrélées n'est pas lognormale, nous ne pouvons appliquer le modèle de tarification standard de Black et Scholes (1973), que nous citerons B&S ci après. Diverses approches de tarification ont été

¹Cette classification est basée sur l'article de Smithon, C. 1997.

développées à cet égard, dans la littérature. Nous pouvons les regrouper principalement en trois catégories :

1. Les méthodes numériques incluant les méthodes par treillis, les simulations de Monte Carlo et les méthodes quasi-Monte Carlo,
2. Les méthodes de détermination des bornes inférieure et supérieure ou encore appelées les approches de probabilités appliquées,
3. Les approximations analytiques ou les approches de statistiques appliquées.

Le but de cet article est de faire une revue critique des différentes méthodes utilisées dans la littérature pour tarifier les options sur actifs sous-jacents multiples (les options paniers plus particulièrement) et de présenter leurs avantages et inconvénients. L'article est structuré comme suit : nous commencerons par présenter les méthodes numériques. La section 3 exposera la méthode de calcul des bornes inférieure et supérieure. Nous discuterons des méthodes des approximations analytiques à la section 4. Nous concluons cet exposé de la littérature à la section 5.

2 Les méthodes numériques

Ces méthodes incluent les arbres multinomiaux, les équations différentielles partielles, les simulations de Monte Carlo et les méthodes quasi-Monte Carlo. Bien que ces méthodes soient assez flexibles, s'adaptent à la tarification des options de type américain et permettent de calculer des bornes d'erreur, elles sont très longues à implanter.

2.1 Les méthodes des arbres multinomiaux

Rubinstein (1994) se propose de tarifier la version européenne et américaine des "*Two-color rainbow options*". Celles-ci sont définies comme étant des options portant sur deux actifs sous-jacents et qui ne peuvent en aucun cas être évaluées comme des options sur un actif unique. Elles incluent les options sur le maximum et le minimum de deux actifs risqués, les options sur écarts et les options sur portefeuille. Les actifs sous-jacents sont supposés suivre une distribution lognormale jointe.

Pour la tarification des options européennes n'admettant pas de solution analytique, Rubinstein (1994) propose une approche qui consiste à approximer la densité normale bivariée continue par une densité binomiale bivariée discrète. Par contre, l'auteur suggère d'utiliser les pyramides binomiales pour tarifier la version américaine des options arc-en-ciel. Les pyramides binomiales sont équivalentes aux arbres binomiaux utilisés dans le cas de la tarification des options américaines portant sur un seul actif sous-jacent. La différence entre les deux méthodes résulte du fait que les pyramides binomiales tiennent compte des corrélations entre les différents actifs. En effet, le déplacement vers le haut ou vers le bas du deuxième actif dépend du déplacement effectué par le premier actif. Ainsi, si la pyramide nécessite n déplacements il en résultera à la fin $(n + 1)^2$ nœuds. Le prix de l'option est déterminé de façon récursive.

Malheureusement, nous pensons que cette technique d'évaluation proposée par Rubinstein (1994) n'est pas très efficace pour la tarification des options paniers de type européen ou américain puisque le nombre de nœuds croît de façon exponentielle avec le nombre d'actifs contenus dans le panier, ce qui complique énormément les calculs. En effet, si nous considérons un treillis avec 100 déplacements pour la tarification d'une option portant sur quatre actifs sous-jacents, le nombre de nœuds à la fin serait égal à $(100 + 1)^4$, ce qui est équivalent à 100 millions de nœuds. De tels calculs intensifs requièrent beaucoup de mémoire, ce qui rend l'utilisation des arbres multinomiaux dans la tarification des options paniers peu appropriée. De plus, les arbres multinomiaux présentent un autre inconvénient. Il est généralement difficile d'incorporer les changements de variance et les processus de retour vers la moyenne.

Plus récemment, Wan (2002) a essayé d'éviter cet inconvénient en utilisant les arbres binomiaux implicites pour tarifier les options paniers de type américain. L'idée de l'auteur est de récupérer l'arbre binomial de façon implicite au lieu de le calculer directement. Ceci évite que le nombre de nœuds dans l'arbre augmente de façon exponentielle avec le nombre d'actifs sous-jacents à l'option panier. En effet, Wan (2002) propose un algorithme numérique qui transforme la distribution multivariée du processus du portefeuille sous-jacent à l'option, en un processus stochastique univarié sous la forme d'un arbre binomial implicite. De façon plus explicite, la méthode proposée par Wan (2002) nécessite quatre étapes.

Tout d'abord, l'auteur utilise les simulations de Monte Carlo afin de tarifier les options paniers de type européen pour différents prix d'exercice. L'objectif d'utiliser les simulations de Monte Carlo est de profiter de leur flexibilité pour incorporer des processus aléatoires plus réalistes, tels que les taux d'intérêt stochastiques, la volatilité stochastique, les sauts, etc. À partir des simulations de Monte Carlo, la deuxième étape consiste à inférer les probabilités neutres au risque du processus univarié du panier sous-jacent à l'option. En effet, les probabilités neutres au risque peuvent être calculées à partir des prix des options européennes obtenus par simulations, de la valeur du panier sous-jacent à la date d'échéance de l'option et du prix de l'obligation sans risque.

La troisième étape de la procédure consiste à récupérer le processus stochastique implicite du panier sous forme d'un arbre binomial implicite. L'idée est de reconnaître que les prix des options paniers de type européen obtenus par simulations de Monte Carlo, incorporent de l'information sur le panier sous-jacent. Ainsi, s'il existe un processus de diffusion qui permet de calculer la valeur d'une option européenne, l'option américaine devrait suivre le même processus de diffusion. Finalement, à l'aide de l'arbre implicite, l'auteur est capable de tarifier, de façon récursive, les options paniers américaines et de calculer leurs ratios de couverture. Wan (2002) montre que sa méthode produit des résultats qui convergent vers les arbres binomiaux multidimensionnels proposés par Rubinstein (1994). L'avantage de la technique présentée est qu'elle permet de tarifier correctement les options paniers de type européen et américain sans que le nombre de nœuds explose avec le nombre d'actifs sous-jacents à l'option. Cependant, cette technique est très lente puisqu'elle fait appel aux simulations de Monte Carlo pour inférer les probabilités neutres au risque du processus du panier sous-jacent à l'option. Ainsi, dès que le nombre d'actifs sous-jacents à l'option panier augmente

ou qu'on utilise des processus sous-jacents compliqués, l'utilisation des simulations de Monte Carlo comme étape intermédiaire pour l'application de l'arbre implicite, devient un handicap.

2.2 Les simulations de Monte Carlo

Plusieurs auteurs suggèrent d'utiliser les simulations de Monte Carlo qui sont généralement très efficaces pour tarifier les droits contingents multidimensionnels de type européen. À cet égard, Barraquand (1995) présente une technique numérique basée sur les simulations de Monte Carlo pour résoudre le problème de la tarification des options paniers. La contribution principale de l'auteur consiste à introduire une nouvelle technique puissante de réduction de l'erreur qui améliore considérablement la précision des simulations de Monte Carlo, appelée la méthode du rééchantillonnage quadratique ou encore l'appariement des deux premiers moments. L'avantage de cette technique est qu'elle peut être combinée efficacement avec les méthodes classiques de réduction de la variance telles que, les variables antithétiques, les variables de contrôle, l'échantillonnage stratégique ou encore l'échantillonnage stratifié. En plus, cette technique peut s'adapter à tout problème d'intégration multidimensionnelle.

La méthode d'appariement des deux premiers moments nécessite au préalable le calcul de l'espérance et de la variance théorique du vecteur de variables aléatoires sous la mesure de probabilité neutre au risque. Par la suite, il faut transformer l'échantillon de variables aléatoires gaussiennes simulées, par une nouvelle séquence aléatoire. Le nouvel échantillon ainsi constitué, dépend de l'ancien échantillon et de ses espérances et variances théoriques et échantillonnales. Les deux premiers moments empiriques de l'échantillon transformé seront égaux à leurs contreparties théoriques.

Les expériences numériques ont montré que cette méthode est pratique pour tarifier les produits dérivés qui dépendent de plus de cent actifs sous-jacents. Pour le même temps de calcul, la méthode proposée par Barraquand (1995) fournit un degré de précision beaucoup plus élevé que les techniques classiques de réduction de la variance. Le problème avec cette technique est qu'il n'est pas toujours évident de calculer les espérances et les variances théoriques du panier sous-jacent à l'option. De plus, cette technique entraîne la perte de l'indépendance des trajectoires ce qui pourra poser un problème lors des inférences statistiques.

Pellizzari (2001) propose également d'utiliser les simulations de Monte Carlo pour tarifier les options sur actifs sous-jacents multiples. Mais contrairement à Barraquand (1995), qui suggère une nouvelle procédure d'échantillonnage, Pellizzari (2001) définit une méthode pour améliorer l'échantillonnage existant. En effet, l'auteur décrit une nouvelle technique de réduction de la variance basée sur les variables de contrôle. L'idée clé consiste à exploiter les solutions fermées souvent connues dans le cas univarié, pour réduire la variance des paiements multivariés simulés. Il s'agit de remplacer tous les arguments à part un seul par leurs moyennes non conditionnelles. La nouvelle variable aléatoire ainsi obtenue sera corrélée avec le prix de l'option et sa moyenne peut être calculée facilement. En effet, le remplacement des prix des actifs sous-jacents par leurs espérances non conditionnelles, produit une fonction de paiement d'une option européenne standard qui peut être tarifée par le modèle de B&S. Cette méthode est appelée Monte Carlo moyen ou en terminologie anglo-saxonne, "*Mean*

Monte Carlo", MMC ci-après. Il est possible d'utiliser autant de variables de contrôle que d'actifs sous-jacents à l'option. C'est pour cette raison que l'auteur propose une méthode d'optimisation qui permet de déterminer le nombre optimal de variables de contrôle à utiliser, qui minimise la variance du prix de l'option.

Afin d'analyser la performance de sa méthode, Pellizzari (2001) compare la MMC à différentes méthodes de référence. Tout d'abord, il évalue une option asiatique qui admet une solution fermée et compare le prix analytique au prix obtenu par simulation. Les résultats montrent que la MMC produit des erreurs 4 à 5 fois plus petites que les simulations standards de Monte Carlo, les simulations de Monte Carlo avec variables antithétiques et les méthodes quasi-Monte Carlo. Par la suite, l'auteur compare la MMC aux simulations proposées par Barraquand (1995) et montre que sa technique est plus précise puisqu'elle produit un écart type plus faible que dans le cas de l'appariement des deux premiers moments. Finalement, la méthode proposée par Pellizzari (2001) admet un écart-type plus faible et est de 9 à 200 fois plus rapide, pour le même degré de précision, que les simulations simples de Monte Carlo pour la tarification des options paniers.

En se basant sur le choix aléatoire des paramètres proposé par Broadie et Detemple (1996), Pellizzari (2001) effectue trois études de simulations sur différents types d'options, portant sur plusieurs actifs sous-jacents allant de 2 à 40 et compare ses résultats aux prix obtenus par Monte Carlo simple, Monte Carlo avec variables antithétiques et quasi-Monte Carlo. Les résultats montrent que la MMC performe relativement bien dans la tarification des options à volatilité élevée et pour les options en jeu. Aussi, la méthode produit de très bons résultats pour les options à dimension faible et moyenne, alors que sa performance se détériore lorsque la dimensionnalité de l'option augmente ; et devient donc similaire aux simulations de MC avec variables antithétiques.

Le problème de la méthode proposée par Pellizzari (2001) est qu'elle suppose implicitement que nous sommes capables de tarifier facilement le nouveau paiement à la date d'échéance de l'option obtenu en incorporant les variables de contrôle, à l'aide des méthodes classiques de tarification d'options. Toutefois, ceci n'est pas toujours possible surtout lorsque les actifs sous jacents à l'option présentent une volatilité stochastique, ou admettent un processus de saut ou encore lorsque nous travaillons avec des taux d'intérêt stochastiques. Dans tous ces cas, il n'existe pas de solution fermée à l'option même dans le cas univarié. Par conséquent, les variables de contrôle seront difficiles à utiliser.

Nous concluons que les simulations de Monte Carlo sont assez simples et faciles à implanter et à modifier, elles sont assez flexibles et peuvent s'appliquer à des cas très divers où il est difficile de résoudre des équations différentielles partielles ou lorsque la méthode de treillis s'avère non appropriée. Les simulations produisent le degré de précision souhaité et sont efficaces pour tarifier des options portant sur un nombre important d'actifs sous-jacents, puisque les coûts n'augmentent que linéairement avec le nombre de variables impliquées dans le calcul et le taux de convergence est indépendant de la dimension du problème. Toutefois, l'inconvénient majeur des simulations de Monte Carlo est leur coût excessif en termes de temps de calcul. En effet, pour réduire la précision des estimés de moitié, il faut simuler quatre fois plus de trajectoires, ce qui nécessite quatre fois plus de temps de calcul. De plus, lorsque la distribution de probabilité est assez compliquée à implanter,

elle requiert un très grand nombre de simulations pour obtenir la précision désirée, ce qui peut être très coûteux et assez lourd du point de vue temps de calcul. Ces calculs lents et fastidieux peuvent également retarder la prise de décision surtout lors du calcul de la valeur à risque d'un portefeuille contenant plusieurs positions ou encore lors de la détermination des deltas.

2.3 Les méthodes quasi-Monte Carlo

Dans le but d'améliorer la vitesse de convergence des estimés de Monte Carlo, certains auteurs proposent d'utiliser les méthodes quasi-Monte Carlo pour tarifier les options sur actifs sous-jacents multiples. Ces méthodes sont supposées être plus efficaces et produire des estimés beaucoup moins oscillants que ceux obtenus par les simulations standards de Monte Carlo. En effet, pour améliorer la précision des estimés, l'approche quasi-Monte Carlo utilise une suite de nombres quasi-aléatoires choisie judicieusement. Ces séquences sont utilisées de façon à générer des échantillons représentatifs des distributions de probabilités que nous tentons de simuler.

Ainsi, Dahl (2000) propose l'utilisation de la méthode quasi-Monte Carlo en appliquant la divergence faible des séquences de Sobol, pour tarifier les actifs contingents multidimensionnels. Il s'agit de remplacer l'intégrale définie sur le domaine \mathbb{R}^N par une nouvelle intégrale, basée sur une séquence de Sobol, définie sur le domaine $[0, 1]^N$, où N représente le nombre d'actifs contenus dans le panier sous-jacent à l'option. La motivation pour l'utilisation de la méthode quasi-Monte Carlo, est d'augmenter le ratio de convergence des simulations classiques de Monte Carlo qui est de l'ordre de $1/\sqrt{N}$. L'erreur d'intégration de la méthode quasi-Monte Carlo est proportionnelle à la divergence, qui mesure la non uniformité, de la séquence utilisée. La séquence de Sobol est une séquence à faible divergence, facile à implanter et performe assez bien même pour les problèmes à dimension élevée.

Les résultats de Dahl (2000) montrent que la méthode quasi-Monte Carlo converge beaucoup plus rapidement que les simulations conventionnelles de Monte Carlo. Toutefois, cette différence dans la vitesse de convergence diminue lorsque le nombre d'actifs contenus dans le panier augmente. Afin d'étudier la différence entre les prix donnés par le modèle de B&S et les prix calculés à l'aide des simulations quasi-Monte Carlo, étant donnée la structure de corrélation, Dahl (2000) construit un portefeuille contenant de 2 à 12 des compagnies les plus importantes transigées sur la bourse d'Oslo et calcule le prix de l'option sur ce portefeuille pour différents prix d'exercice. Les résultats montrent que la différence de prix augmente quand les options deviennent hors jeu. Toutefois, cette différence n'est pas affectée par le nombre de compagnies formant le panier. Ceci démontre que les résultats sont stables et indépendants du nombre d'actifs sous-jacents à l'option panier.

Dahl et Benth (2001), quant à eux, proposent d'améliorer la précision des résultats de Dahl (2000) en combinant la méthode quasi-Monte Carlo avec la technique de décomposition en valeur unique. Ils utilisent leur méthode pour tarifier les options paniers asiatiques. Les auteurs démontrent que cette approche mène à une amélioration considérable des propriétés de convergence de la méthode conventionnelle de quasi-Monte Carlo. La différence de prix entre la technique de décomposition en valeur unique et celle de quasi-Monte Carlo classique demeure constante quand le nombre d'actifs sous-jacents augmente.

Bien que les méthodes quasi-Monte Carlo produisent d'excellents résultats et convergent assez rapidement pour la tarification des options paniers, ils présentent un inconvénient majeur lié à la difficulté d'implanter des tests statistiques. De plus, la précision des méthodes quasi-Monte Carlo classiques, pour certaines séquences utilisées, peut se détériorer significativement quand le nombre d'actifs sous-jacents à l'option croît. Ceci rend l'utilisation de cette approche non appropriée pour la tarification des options paniers portant sur plusieurs actifs sous-jacents.

3 Les bornes supérieure et inférieure au prix de l'option panier

Avec l'impossibilité d'obtenir un prix unique à l'option panier lorsqu'on travaille dans un marché incomplet, plusieurs chercheurs ont eu recours au calcul des bornes inférieure et supérieure afin de déterminer un intervalle de prix exact incluant le prix de l'option panier. À cet égard, Curran (1994) propose une méthode, basée sur la moyenne géométrique des prix, afin de tarifier des options paniers et asiatiques. En effet, l'auteur calcule le flux monétaire espéré de l'option conditionnel à la moyenne géométrique des prix des actifs sous-jacents, à la date d'échéance de l'option. Par la suite, il intègre par rapport à la distribution connue de la moyenne géométrique des prix. Ainsi, la valeur d'une option panier ou asiatique peut être exprimée comme la somme de deux termes.

Dans le premier terme la moyenne géométrique des prix des actifs est inférieure au prix d'exercice alors que dans le deuxième terme, elle est supérieure. L'auteur démontre que le deuxième terme est assez facile à calculer. Par contre, pour pouvoir déterminer le premier terme, Curran (1994) suppose que la somme de variables aléatoires lognormales corrélées, conditionnelle à la moyenne géométrique, peut être approximée par une distribution lognormale. La moyenne et la variance de la somme des variables lognormales seront constantes et égales à leurs valeurs dans le cas où la moyenne géométrique est identique au prix d'exercice. En imposant une certaine grille et en intégrant numériquement, Curran (1994) calcule ainsi un estimé du premier terme qu'il appelle "*l'approximation sophistiquée*". Il est à noter qu'il est aussi possible de trouver une estimation moins précise de ce premier terme, appelée "*l'approximation naïve*", obtenue en inversant la fonction espérance et la fonction maximum. L'auteur détermine ainsi une borne inférieure à ce premier terme.

Curran (1994) utilise "*l'approximation naïve*" pour comparer les prix des options asiatiques aux simulations de Monte Carlo et à l'approximation lognormale. Il trouve que son approximation donne d'excellents résultats. Pour les options paniers, l'auteur calcule "*l'approximation sophistiquée*" et la compare aux simulations de Monte Carlo et là encore, il trouve que sa méthode est très précise et assez rapide. La méthode proposée par Curran (1994) peut s'étendre à la tarification des options sur écarts ainsi qu'à la tarification des options sur obligations zéro-coupon dont les taux à terme suivent des processus gaussiens.

Plus récemment, Carmona et Durrleman (2003) ont dérivé des bornes inférieure et supérieure nécessaires à la tarification des options sur actifs multiples de type européen. Les auteurs supposent que les différents actifs sous-jacents suivent une dynamique de mouvements browniens géométriques multidimensionnels avec volatilités constantes. La dérivation des bornes est basée sur un problème d'optimisation linéaire. Carmona et Durrleman (2003) aboutissent à une forme analytique des bornes

très proche de celle de B&S dans le cas unidimensionnel. Les auteurs dérivent également les ratios de couverture reliés aux bornes inférieure et supérieure. Il est à noter que la méthode proposée par Carmona et Durrleman (2003) peut facilement s'appliquer aux problèmes de tarification des options paniers, des options asiatiques avec une moyenne arithmétique discrète et des options paniers barrières.

Pour les options paniers, Carmona et Durrleman (2003) comparent leurs résultats obtenus à l'aide des bornes à ceux des simulations Monte Carlo avec 100 000 trajectoires. Ils trouvent que la borne supérieure n'est pas aussi précise que la borne inférieure. De plus, l'écart entre les bornes tend à diminuer quand la corrélation augmente ; et à augmenter avec l'augmentation de la volatilité. En ce qui concerne la tarification des options asiatiques, les auteurs montrent que leur borne inférieure est beaucoup plus précise que celle obtenue en remplaçant la moyenne arithmétique par sa contrepartie géométrique.

Par ailleurs, Laurence et Wang (2004) de leur côté, ont dérivé des bornes inférieure et supérieure, valables aussi bien en marché complet qu'incomplet, pour la tarification des options paniers sur une seule période. Ces bornes sont les plus précises possibles, dans le sens où elles ne peuvent être améliorées sans obtenir des informations supplémentaires sur les processus stochastiques décrivant l'évolution des actifs sous-jacents, ou sur les prix additionnels d'options avec différents prix d'exercice ou différentes échéances. La particularité des bornes proposées, est qu'elles sont indépendantes des distributions de probabilité des actifs sous-jacents à l'option. Les bornes sont obtenues en résolvant un problème d'optimisation d'une famille de mesures neutres au risque conditionnelle à un certain nombre de contraintes. En effet, la fonction objectif correspond au prix de l'option panier, la première contrainte suppose qu'on connaît les prix des options individuelles portant sur chacun des actifs sous-jacents au panier. La deuxième et dernière contrainte assure la neutralité au risque et correspond à la cohérence des prix à terme des actifs sous-jacents.

Laurence et Wang (2004) dérivent une borne supérieure pour le cas général d'une option portant sur N actifs. Par contre, ils arrivent à développer une solution fermée pour la borne inférieure seulement dans le cas d'une option portant sur deux actifs. Lorsque le nombre d'actifs sous-jacents dépasse deux, les auteurs démontrent que la valeur d'un contrat à terme sur un panier d'actifs, dont le prix de livraison est égal au prix d'exercice, constitue une borne inférieure au prix de l'option panier. Laurence et Wang (2004) dérivent également les ratios de couverture optimaux. Étant donné que le marché est incomplet, il n'existe pas de couverture parfaite, toutefois, les auteurs réussissent à développer la stratégie de couverture la moins coûteuse qui réplique l'option panier. Cette stratégie nécessite un portefeuille d'actifs individuels, des options standards et de l'argent comptant.

Laurence et Wang (2004) ont mené des simulations de Monte Carlo afin de tester les bornes supérieure et inférieure dérivées dans le cas où le nombre d'actifs sous-jacents est égal à deux, pour trois familles de distributions : la distribution lognormale multivariée, la distribution de Student avec trois degrés de liberté et la distribution normale. Les auteurs ont également testé la borne supérieure pour les options portant sur N actifs avec une distribution lognormale. Les résultats montrent que pour une forte corrélation positive entre les actifs, la borne supérieure est pratiquement atteinte,

par contre lorsque la corrélation est fortement négative, la borne inférieure est presque atteinte et ce pour les options de longue maturité. Les résultats montrent également, que la borne inférieure est atteinte pour les options de longue maturité, lorsque les deux prix d'exercice sont égaux et que la corrélation s'élève à -0.95 pour les distributions de Student et normale et à -0.80 pour la distribution lognormale.

Aussi, les tests empiriques montrent que l'écart entre la borne inférieure et supérieure est assez grand. Ceci est dû principalement à deux raisons :

1. La famille des distributions neutres au risque compatibles avec les contraintes imposées par les auteurs est très riche,
2. Le problème d'optimisation traité n'exploite pas toute l'information du marché.

Ainsi, le fait d'inclure d'autres options avec différents prix d'exercice et différentes échéances comme intrants, réduira significativement l'écart entre les bornes et améliorera leur précision. Le problème avec la méthode proposée par Laurence et Wang (2004) est que les bornes sont assez précises uniquement dans le cas où le nombre d'actifs sous-jacents ne dépasse pas 2. Lorsque ce nombre augmente et que la corrélation entre les actifs est moyenne les résultats sont beaucoup moins précis. La méthode proposée s'avère donc non appropriée pour tarifier des options paniers dont le nombre d'actifs sous-jacents est très élevé.

Deelstra, Liinev et Vanmaele (2004) traitent également le problème de la tarification des options paniers européennes dans un environnement B&S, en supposant que tous les actifs sous-jacents suivent des mouvements browniens géométriques corrélés. Les auteurs décomposent ainsi le prix d'une option panier en une partie exacte et une partie approximative. Deelstra et al. (2004) utilisent différentes techniques pour évaluer la partie approximative du prix de l'option. Tout d'abord, ils utilisent des variables aléatoires conditionnelles, telles que proposées par Curran (1994) et Rogers et Shi (1995) pour dériver les bornes inférieure et supérieure au prix de l'option. Par la suite, ils développent des bornes inférieure et supérieure de la somme de variables aléatoires dépendantes, basées sur le principe de la comonotonie des risques. Finalement, ils proposent des approximations analytiques basées sur la technique d'appariement des moments.

Un vecteur aléatoire X est dit comonotone, s'il admet la propriété suivante :

$$\text{si } X_i(\omega) < X_i(\omega'), \text{ alors } X_j(\omega) \leq X_j(\omega'), \text{ aussi, pour tout } j \neq i.$$

Ainsi, un vecteur X est comonotone si chaque deux réalisations possibles de X sont ordonnées composante par composante. Ce principe peut être utilisé en finance, puisque dans plusieurs cas nous connaissons les distributions univariées des variables aléatoires composant un vecteur ou une somme, mais nous ignorons la fonction de distribution multivariée. Il est souvent nécessaire de déterminer cette distribution multivariée à partir de ses distributions marginales. De ce fait, étant donné un vecteur comonotone de variables aléatoires dépendantes dont nous connaissons les distributions, la somme de ses composantes est bornée des deux côtés par une somme de variables comonotones. Ainsi, ce principe permet de dériver des bornes inférieure et supérieure au prix des options paniers.

En effet, lorsque la seule information disponible concernant la fonction de distribution d'un vecteur de variables aléatoires, est donnée par les fonctions de distributions marginales des composantes du vecteur, la distribution de la somme de variables comonotones constitue la meilleure borne supérieure pour approcher la distribution inconnue de la somme.

La borne inférieure est par ailleurs déterminée en conditionnant sur une variable distribuée selon une loi normale. Le choix de cette variable peut être effectué grâce à une procédure d'optimisation. Deelstra et al. (2004) conditionnent par rapport à trois variables basées sur les sommes arithmétique et géométrique des variables aléatoires. Concernant les approximations, les auteurs supposent que la somme de variables aléatoires lognormales corrélées peut être approximée par une distribution lognormale, dont les deux premiers moments sont identiques à ceux de la vraie distribution.

Les calculs numériques sont effectués en prenant un panier composé de deux actifs sous-jacents. Les résultats montrent que les prix d'options calculés à l'aide des simulations de Monte Carlo sont plus proches de la borne inférieure que de la borne supérieure et que la différence entre les bornes est faible lorsque la corrélation entre les actifs est élevée. Ceci rejoint les résultats de Laurence et Wang (2004).

Lorsque les actifs composant le panier sont équipondérés, admettent les mêmes prix et les mêmes volatilités, la borne inférieure est la même quelle que soit la variable par rapport à laquelle on conditionne. Par contre, lorsque les volatilités sont égales, alors que les poids et les prix des actifs sous-jacents diffèrent, la précision de la borne inférieure dépend des variables aléatoires conditionnelles utilisées. En ce qui a trait aux approximations, lorsque les volatilités sont égales, les approximations sont plus précises pour les options à courte maturité, qu'elles soient en jeu ou hors jeu. Les prix générés par les approximations sont toujours à l'intérieur des bornes. Les résultats présentés par les auteurs sont valables pour une option panier portant uniquement sur deux actifs sous-jacents et pour un choix de volatilités, et de poids bien déterminé. Par conséquent, nous ne savons pas si les bornes qu'ils ont développées resteront aussi précises si le nombre d'actifs sous-jacents augmente ou si nous faisons varier les volatilités des actifs.

Vanmaele, Deelstra et Liinev (2004) généralisent le travail de Deelstra et al. (2004), qui considèrent que le prix d'une option est composé d'une partie exacte et d'une partie approximative. Mais contrairement à Deelstra et al. (2004), les auteurs dérivent les bornes supérieure et inférieure comonotones en conditionnant sur plusieurs variables. Ils démontrent que le fait de conditionner sur plusieurs variables n'implique pas des intégrations supplémentaires tant que la distribution conditionnelle est connue. De plus, les auteurs adaptent la méthodologie proposée par Vyncke, Goovaerts et Dhaene (2003), qui consiste à combiner de façon convexe la borne inférieure et supérieure pour dériver une approximation analytique, au problème de tarification des options paniers. Vanmaele et al. (2004) proposent également une amélioration de la borne supérieure dérivée par Vyncke et al. (2003). Il est à noter que Vyncke et al. (2003) ont emprunté un principe bien connu en actuariat, qui consiste à calculer les "*stop-loss premiums*" de la somme de variables aléatoires dépendantes, pour tarifier les options asiatiques basées sur la moyenne arithmétique. Ces derniers ont proposé de déterminer les bornes inférieure et supérieure au prix de l'option asiatique en se basant sur le principe de comonotonie des risques. Les auteurs suggèrent également, une nouvelle approximation

analytique en combinant de façon convexe les bornes inférieure et supérieure déjà calculées.

Vanmaele et al. (2004) analysent leurs résultats numériques en considérant deux types d'options paniers. La première option porte sur deux actifs sous-jacents et est basée sur les données de Brigo et al. (2004). La deuxième option porte sur une combinaison de sept actifs sous-jacents en utilisant les données de Milevsky et Posner (1998b). Les auteurs conditionnent par rapport à trois variables. Les résultats montrent que la borne inférieure obtenue en conditionnant sur deux variables améliore significativement les résultats de Deelstra et al. (2004) et est très proche des simulations de Monte Carlo.

Ainsi, les résultats montrent que les bornes inférieures basées sur plusieurs variables produisent des résultats très précis aussi bien pour les options asiatiques que pour les options paniers portant sur un grand nombre d'actifs. Même pour des corrélations négatives entre les actifs sous-jacents au panier, la borne inférieure conditionnelle à plusieurs variables reste très précise et fiable. Les résultats montrent également que l'approximation analytique basée sur la combinaison convexe des bornes pour la tarification des options paniers améliore significativement la méthodologie de Vyncke et al. (2003).

La plupart des articles cités plus haut ont montré que les bornes peuvent être très précises et faciles à calculer pour tarifier des options paniers standards dans un environnement B&S. Toutefois, il n'est pas évident que ces bornes soient aussi simples à calculer dans le cas de tarification des options paniers en présence de taux d'intérêt stochastiques ou encore en incluant des volatilités stochastiques. D'un autre côté, la tarification des options paniers à l'aide de la détermination des bornes inférieure et supérieure peut être très utile lorsque nous nous plaçons dans un marché incomplet, puisqu'elle nous permet d'obtenir un intervalle exact de prix d'options. Toutefois, en présence d'un marché complet, l'utilisation des bornes devient moins appropriée. En effet, celles-ci ne permettent pas d'obtenir un prix exact pour l'option panier.

Ainsi, lorsqu'on travaille dans un marché complet, il serait plus judicieux de recourir aux approximations analytiques pour tarifier les options paniers puisque celles-ci peuvent être très précises et produire des prix d'options très proches de leurs valeurs réelles. Dans ce cas, les bornes inférieure et supérieure serviraient à tester si le prix fourni grâce à l'approximation appartient bien à l'intervalle de prix calculé.

4 Les approximations analytiques

L'idée clé des approximations analytiques consiste à remplacer la distribution inconnue du panier sous-jacent à l'option par une distribution connue dans la littérature et qui présente des caractéristiques attrayantes et ce en appariant les moments des deux distributions.

Gentle (1993) fut le premier à proposer une approximation analytique pour tarifier les options paniers. Il offre une nouvelle méthode basée sur la technique de Vorst (1992), utilisée pour la tarification des options asiatiques, "*average rate option*". L'idée est que puisque la somme pondérée de

variables aléatoires lognormales est inconnue, Gentle (1993) approxime cette somme arithmétique des actifs contenus dans le panier, par leur somme géométrique. Celle-ci suit une distribution lognormale et peut donc être facilement intégrable pour calculer le prix de l'option. La précision de la méthode proposée est améliorée grâce à la normalisation des prix comptants des actifs sous-jacents par leurs prix à terme.

Gentle (1993) démontre que le prix de l'option panier ainsi que son delta, donnés par l'approximation analytique, sont très proches du prix calculé selon la méthode de l'arbre binomial bivarié. Le principal inconvénient de la technique proposée par Gentle (1993) est qu'elle nécessite l'ajustement du prix d'exercice pour tenir compte de l'écart entre les moyennes arithmétique et géométrique. Dans plusieurs cas cet ajustement n'est pas très clair.

L'auteur démontre également que l'option panier coûte moins chère qu'un portefeuille d'options individuelles, aussi bien pour les options en jeu, à parité ou hors jeu. Cette différence de prix est d'autant plus importante que la corrélation entre les actifs sous-jacents est faible. Ceci est expliqué par le fait que lorsque la corrélation entre les actifs est faible, la volatilité de l'option panier diminue ce qui réduit la prime relative à l'option.

Huynh (1994) a développé la méthodologie de Gentle (1993) en proposant d'adapter la technique développée par Jarrow et Rudd (1982), à la tarification des options paniers. En effet, Huynh (1994) approxime le prix de l'option panier par un développement en série de Edgeworth autour de la distribution lognormale. Le développement en série de Edgeworth est similaire au développement de Taylor pour une fonction analytique. Plus précisément, dans le développement de Taylor la fonction est approximée autour d'un point spécifique, alors que pour le développement en série de Edgeworth, la fonction de distribution d'une variable aléatoire est approximée autour d'une fonction de distribution donnée. Le développement en série de Edgeworth est souvent utilisé pour les problèmes de tarification d'options où la distribution de l'actif sous-jacent est inconnue mais qui peut être approximée par une distribution lognormale ou une autre distribution approximative dont on connaît les caractéristiques. Le prix approximatif de l'option panier ainsi obtenu, sera égal au prix de B&S auquel s'ajoutent trois ajustements qui dépendent des différences entre la variance, le coefficient d'asymétrie et le coefficient d'aplatissement entre la vraie distribution du panier d'actifs sous-jacent à l'option et la distribution lognormale approximative. Par construction les deux premiers moments de la vraie distribution et de la distribution approximative lognormale sont égaux.

Le problème avec le développement en série de Edgeworth autour de la distribution lognormale est qu'il montre une bonne performance uniquement pour les options à courtes maturités. Pour les longues maturités, l'approximation devient moins précise. De plus, étant donné que le prix de l'option panier est basé sur un développement en série de Edgeworth tronqué après le quatrième terme, le résultat obtenu est approximatif et il s'avère impossible de borner analytiquement l'erreur d'approximation.

Plus tard, voyant que l'utilisation de la distribution lognormale pour approximer la somme pondérée de variables aléatoires lognormales ne fournit pas des résultats très satisfaisants, Milevsky et

Posner (1998b) suggèrent d'utiliser la distribution gamma inverse pour approximer la fonction de densité inconnue du panier sous-jacent à l'option. Ainsi, en appliquant la technique d'appariement des moments, les auteurs obtiennent une solution analytique au prix de l'option panier qui ressemble à celle de B&S, sauf que la fonction de distribution cumulative de la loi normale est remplacée par la fonction de distribution cumulative de la fonction gamma.

Le choix de la distribution gamma inverse pour approximer la somme de variables lognormales est justifié par le fait que Milevsky et Posner (1998a) ont montré que, dans le contexte des options asiatiques, la somme de variables aléatoires lognormales corrélées, converge à la limite vers une distribution gamma inverse. Étant donné qu'il existe une certaine similarité entre les options asiatiques et les options paniers, les auteurs se permettent d'appliquer la même technique aux options paniers. Toutefois, il est important de souligner que bien qu'ils soient très similaires, ces deux types d'options, panier et asiatique, diffèrent par leur structure de corrélation. Ceci signifie que si les options paniers présentent une structure de corrélation différente de celle des asiatiques, il n'existera aucune justification théorique quant à l'utilisation de la distribution gamma inverse pour approximer la somme de distributions lognormales.

Afin de développer leur approximation, Milevsky et Posner (1998b) considèrent une option portant sur N actifs sous-jacents, chacun suivant un mouvement brownien géométrique et ce en supposant des taux d'intérêt constants. Les auteurs se proposent de calculer les deux premiers moments théoriques du panier sous-jacent à l'option sous la mesure neutre au risque. Par la suite, ces moments sont ajustés à ceux des distributions lognormale et gamma inverse afin de comparer la performance des deux méthodes. Les paramètres alpha et bêta de la distribution gamma sont déterminés en ajustant les deux premiers moments de la distribution gamma approximative aux deux premiers moments de la vraie distribution inconnue du panier. Afin de simplifier les calculs, les auteurs ont considéré les prix des actifs sous-jacents normalisés par les prix à terme. Grâce à cette simplification, le premier moment sera égal à 1.

Milevsky et Posner (1998b) comparent numériquement la performance des approximations lognormale et gamma inverse en utilisant un panier formé des sept indices boursiers du Canada, de la France, de l'Allemagne, de l'Italie, du Japon, de l'Angleterre et des Etats-Unis. Les résultats montrent que l'approximation par la distribution gamma inverse est légèrement plus précise que la distribution lognormale. De plus, comparée aux simulations de Monte Carlo avec 100,000 trajectoires, la distribution gamma inverse est très précise. Le graphique des fonctions de densités cumulatives montre que la gamma inverse est plus proche de la vraie distribution comparée à la lognormale. Les résultats montrent également que l'approximation lognormale surestime les options hors jeu alors que la gamma inverse les sous-estime.

Toutefois, les résultats trouvés par Milevsky et Posner (1998b) sont relatifs au panier spécifique d'indices boursiers qu'ils ont choisi ainsi qu'au niveau de volatilité des actifs et à la matrice de corrélation qu'ils ont fixée. Il s'agit d'une analyse locale, leurs résultats peuvent très bien changer en faisant varier le contenu du panier ou la valeur des paramètres. Les auteurs auraient dû effectuer une analyse de sensibilité par rapport à la volatilité du panier (étant donné l'importance de ce paramètre dans le prix de l'option panier) pour tester la précision de l'approximation par la distribution

gamma inverse. Il aurait été également intéressant d'étudier la performance de l'approximation proposée comparée à la distribution lognormale pour différentes combinaisons de paramètres. De plus, nous pensons que les résultats trouvés par les auteurs peuvent changer en intégrant des taux d'intérêt stochastiques.

Posner et Milevsky (1999) sont allés plus loin dans le but d'améliorer la précision des approximations lognormale et gamma inverse en proposant une nouvelle méthode de tarification des options exotiques basée sur la technique d'appariement des quatre premiers moments. Il s'agit d'approximer la vraie fonction de densité inconnue de l'actif sous-jacent à l'option exotique par une fonction de densité appartenant à la famille des fonctions de Johnson (1949). L'avantage d'utiliser les fonctions de Johnson est qu'elles permettent d'obtenir une solution analytique au problème de tarification des options exotiques. De plus, les fonctions de Johnson admettent quatre degrés de liberté, ce qui permet de calibrer leurs paramètres de telle façon que, les quatre premiers moments de la densité de Johnson soient identiques aux quatre premiers moments de la vraie distribution de l'actif sous-jacent. La méthode proposée par Posner et Milevsky (1999) peut s'appliquer à la tarification des options asiatiques, des options paniers, des options sur écarts entre deux ou plusieurs variables ; et de façon générale à n'importe quelle option portant sur un actif dont la distribution ne permet pas l'obtention d'une solution analytique au problème de tarification.

La famille de densités de Johnson englobe plusieurs distributions statistiques qui sont généralement définies par quatre paramètres et qui peuvent être représentées comme une transformation d'une distribution normale standard. La spécification de la transformation peut être assez générale, toutefois, les auteurs ont choisi des transformations de type lognormal et sinus hyperbolique inverse étant donné leurs liens avec la distribution de la somme de lognormales.

Afin de tarifier les options exotiques, Posner et Milevsky (1999) suggèrent de suivre la procédure suivante : tout d'abord, il faut calculer les quatre premiers moments non centrés de l'actif sous-jacent à l'option exotique, sous la mesure neutre au risque. Par la suite, il faut déterminer quelle distribution particulière, lognormale ou sinus hyperbolique, à utiliser dans l'approximation. Finalement, il faut déterminer la valeur des quatre paramètres de la fonction Johnson grâce à l'algorithme d'appariement des moments développé par Hill, Hill et Holder (1976).

Les auteurs testent la performance de leur approximation, en l'appliquant à la tarification des options asiatiques et paniers et en la comparant aux méthodes existantes dans la littérature telles que les simulations de Monte Carlo, les approximations de Levy (1992), Turnbull et Wakeman (1991), Rogers et Shi (1995), Curran (1994) et Milevsky et Posner (1998a et 1998b). Les résultats numériques montrent que la fonction de Johnson est très précise et extrêmement robuste comparée aux simulations de Monte Carlo et aux autres approximations analytiques. Malheureusement, la précision de la distribution de Johnson se détériore pour les options paniers et asiatiques de longue maturité.

Le contexte d'utilisation des fonctions de densité de Johnson est similaire à celui du développement en série de Edgeworth généralisé. Toutefois, les fonctions de Johnson présentent un avantage par

rapport au développement en série de Edgeworth, puisqu'elles permettent d'obtenir des fonctions qui correspondent à la définition d'une fonction de densité.

Le succès de cette approche est expliqué par le fait qu'elle tienne compte des quatre premiers moments, ce qui permet de capter plus les caractéristiques de la vraie distribution. En effet, plus les deux fonctions de densité réelle et approximative ont des moments en commun, plus la tarification sera précise. Toutefois, cette méthode devient non appropriée lorsque les moments d'ordre supérieur des actifs sous-jacents à l'option sont difficile à déterminer.

Sachant que la grande majorité des auteurs, cités précédemment, ayant travaillé sur la tarification des options paniers, considèrent que tous les actifs sous-jacents à l'option suivent des mouvements browniens géométriques ; Flamouris et Giamouridis (2001) ont généralisé les approximations proposées en stipulant un processus différent pour les actifs sous-jacents. En effet, les auteurs dérivent une expression analytique pour la tarification des options paniers portant sur N actifs sous-jacents, en supposant que ces derniers suivent un processus de diffusion avec saut. Les auteurs supposent également que le saut suit une distribution de Bernoulli. Dans le but d'obtenir des résultats plus précis, ils généralisent leur méthodologie en utilisant un développement en série de Edgeworth.

Afin de simplifier la dérivation du prix de l'option panier, Flamouris et Giamouridis (2004) posent deux hypothèses :

1. Les mouvements browniens des différents actifs composant le panier sont corrélés entre eux.
2. Les composantes Bernoulli sont indépendantes entre elles et indépendantes des mouvements browniens respectifs.

De plus, au lieu de travailler directement avec le prix de l'actif sous-jacent, les auteurs utilisent plutôt, le prix de l'actif sous-jacent conditionnel à l'événement de Bernoulli. En effet, en conditionnant par rapport au fait que le saut se produise ou non, Flamouris et Giamouridis (2004) transforment l'équation différentielle stochastique de chaque actif sous-jacent en un processus lognormal. Ainsi, les auteurs se trouvent face à un problème classique, à savoir la tarification d'une option portant sur N variables aléatoires lognormales corrélées. Pour résoudre ce problème, les auteurs supposent que la distribution de la somme de variables lognormales est aussi lognormale et dérivent ainsi une solution analytique au prix de l'option panier.

Comparée aux simulations de Monte Carlo, l'approximation proposée produit de très bons résultats. La différence entre le prix de l'option obtenu par simulation et le prix obtenu par approximation, pour les diverses valeurs de prix d'exercice, de volatilités et de taille de saut, est inférieure à 0.04%.

Dans le but de généraliser leurs résultats, Flamouris et Giamouridis (2004) utilisent un développement en série de Edgeworth autour de la distribution lognormale pour tarifier les options paniers. Ils supposent que les deux premiers moments de la vraie distribution et de la distribution approximative sont identiques. Leurs résultats numériques montrent que les séries Edgeworth n'améliorent pas significativement les prix, comparativement aux simulations de Monte Carlo.

Les auteurs dérivent également les expressions analytiques des ratios de couverture, le delta et le gamma. L'idée de prendre un processus de saut pour les actifs sous-jacents à l'option est très intéressante. Toutefois, le fait de considérer le prix de l'actif sous-jacent conditionnel au saut, transforme le processus du sous-jacent en un processus lognormal. Ceci réduit le problème initial à la tarification d'une option portant sur la somme de variables aléatoires lognormales corrélées qui a été longuement traitée dans la littérature. Il aurait été intéressant d'essayer de trouver une approximation au prix de l'option sans conditionner par rapport au saut.

En se basant sur l'idée que la somme pondérée de variables aléatoires lognormales peut être approximée correctement par une distribution lognormale dont les deux premiers moments sont identiques à ceux de la vraie distribution, Ju (2002) développe une approximation plus précise en utilisant le développement de Taylor. En effet, l'auteur considère un développement en série de Taylor du ratio de la fonction caractéristique de la somme inconnue de variables aléatoires lognormales, par rapport à la fonction caractéristique de la variable aléatoire approximative lognormale, autour d'une volatilité égale à zéro. Étant donné que les actifs sous-jacents au panier admettent généralement des volatilités différentes de zéro, afin de développer sa série de Taylor autour d'une volatilité nulle, Ju (2002) suppose un marché fictif où toutes les volatilités sont multipliées par un même paramètre Z . Lorsque $Z = 1$, l'auteur récupère le processus initial de l'actif sous-jacent. Ainsi, le développement de Taylor autour d'une volatilité nulle signifie que le développement est effectué autour de $Z = 0$, jusqu'à (Z^6) .² Ceci suppose que le modèle proposé converge autour des petites valeurs de Z . Ju (2002) montre que sa formule analytique s'applique aussi bien à la tarification des options paniers que des options asiatiques.

Afin d'étudier la performance numérique de l'approximation développée, Ju (2002) utilise comme prix de référence les prix d'options calculés à partir des simulations de Monte Carlo en utilisant deux techniques de réduction de la variance : les variables antithétiques et la moyenne géométrique de Curran (1994) comme variable de contrôle. Pour les options asiatiques et paniers, Ju (2002) compare son approximation à l'approximation lognormale, à l'approximation gamma inverse et à l'approximation de Johnson développées précédemment.

Pour les options asiatiques, l'approximation par les séries de Taylor s'avère être très précise aussi bien pour les options de courte maturité (1 an) que pour les options de longue maturité (3 ans). Pour les faibles maturités, l'approximation proposée est aussi précise que celle de Johnson. Toutefois, la racine de la moyenne des erreurs au carré (RMEC) et l'erreur maximale absolue (EMA) de l'approximation de Ju (2002) sont 20 fois plus petites que toutes les autres approximations. Pour les longues maturités, l'approximation de Ju (2002) reste aussi fiable, alors que toutes les autres approximations se détériorent. La RMEC et la EMA sont 4 fois plus petites que l'approximation de Johnson mais 40 fois plus petites que toutes les autres approximations. La méthode produit également une bonne approximation des ratios de couverture. Concernant les options paniers, les résultats sont similaires aux options asiatiques. Toutefois, la performance de l'approximation de Johnson se détériore considérablement pour les options de longues maturités.

²Comme Z est un paramètre multipliant la volatilité, Z^6 est équivalent à σ^6 .

Ju (2002) a développé son approximation en supposant que tous les actifs sous-jacents composant le panier suivent des mouvements browniens géométriques, que le taux de dividende est nul et que les taux d'intérêt sont constants. Cette spécification particulière de son modèle a fait qu'il était possible de développer une approximation assez précise allant jusqu'à σ^6 . De plus, l'auteur n'a donné aucune précision concernant le temps de calcul nécessaire pour obtenir son prix d'option panier. Il est possible donc que l'approximation développée par Ju (2002) impliquerait des calculs fastidieux et nécessiterait un temps de calcul assez important si nous utilisons une nouvelle spécification du modèle incluant des taux d'intérêt stochastiques, ou encore en supposant des processus de denrée (à la place des processus pour actions) avec des taux de rendement de détention stochastiques. En effet, le taux de rendement de détention jouerait le rôle du dividende qui est supposé constant dans le travail de Ju (2002). Ces modifications changeraient probablement les résultats avancés par l'auteur.

Plus tard, en 2003, Castellacci et Siclari ont généralisé les approximations de Gentle (1993) et Huynh (1994) à la tarification des options paniers asiatiques et des options paniers asiatiques sur écart. En effet, les auteurs proposent un cadre théorique pour la tarification des options sur actifs multiples en supposant que les actifs sous-jacents suivent un mouvement brownien géométrique multivarié. Ils introduisent le concept de moyenne arithmétique générale. Les options exotiques de type paniers et asiatiques sont considérées comme des options dont les flux monétaires à l'échéance dépendent d'une telle moyenne. L'approche proposée consiste à réduire la moyenne arithmétique générale à une variable lognormale pour pouvoir appliquer par la suite, les modèles connus de tarification d'options dont les flux monétaires dépendent de variables lognormales.

Pour se faire, Castellacci et Siclari (2003) proposent deux approximations. La première approximation généralise le modèle de Vorst (1992) et consiste à remplacer la moyenne arithmétique par sa contrepartie géométrique. La deuxième approximation est basée sur la technique d'appariement des moments et consiste à remplacer la somme inconnue de variables lognormales corrélées par une distribution lognormale. Cette approximation est plus flexible. Les auteurs généralisent ces deux approximations à la tarification des options paniers asiatiques et des options paniers asiatiques sur écart.

Castellacci et Siclari (2003) proposent également deux modèles hybrides pour tarifier les options paniers asiatiques et ce en combinant différentes approximations analytiques. Ces modèles hybrides sont basés sur la combinaison de l'approximation de Vorst (1992) avec la lognormale pour la caractéristique asiatique et la combinaison de l'approximation de Gentle (1993) avec la lognormale pour la caractéristique panier de l'option.

Afin de déterminer la précision numérique des différentes approximations proposées, les auteurs comparent les prix des options paniers asiatiques obtenus à l'aide des modèles proposés, aux simulations de Monte Carlo avec 250,000 trajectoires. Les comparaisons sont faites dans le cas où le nombre de périodes nécessaires au calcul de la moyenne (pour la caractéristique asiatique) est fixe ou variable. Les résultats montrent que dans les deux cas, les valeurs calculées à l'aide des modèles sont raisonnables et assez proches des valeurs réelles. Le modèle hybride combinant l'approximation

de Vorst (1992) avec la lognormale donne la meilleure précision. Toutefois, la précision des trois modèles se détériore au fur et à mesure que les options deviennent hors jeu.

La performance des approximations pour la tarification des options paniers asiatiques sur écart est similaire au cas précédent. En effet, la différence entre les deux types d'options réside dans le fait que les options sur écarts peuvent avoir des poids négatifs. Là encore, les résultats montrent que les trois modèles donnent des résultats assez précis et que cette précision décroît pour les options hors jeu. Le modèle lognormal classique produit l'erreur la plus faible.

Dans le même esprit de tarification des options paniers asiatiques, Datey, Gauthier et Simonato (2003) comparent la performance de trois approximations analytiques, proposées dans la littérature, à savoir, la distribution lognormale, la distribution gamma inverse et la distribution de Johnson, pour tarifier les options paniers quanto-asiatiques. Ces types d'options regroupent à la fois les caractéristiques des options asiatiques, des options paniers et des options quantos. Elles permettent aux gestionnaires de risque de participer au rendement d'un secteur d'industrie ayant une exposition internationale, sans être affectés par les fluctuations du taux de change. Le problème avec la tarification de ce type d'options est que le paiement à la date d'échéance dépend de la somme pondérée de variables aléatoires lognormales.

Afin de résoudre ce problème, Datey et al. (2003) développent et comparent trois approximations. La première est basée sur un développement en série de Edgeworth autour de la distribution lognormale dont les deux premiers moments sont identiques. La deuxième approximation ressemble à la première, en remplaçant la distribution approximative lognormale par une distribution gamma inverse. La dernière approximation est basée sur les travaux de Posner et Milevsky (1999) et consiste à utiliser la distribution de Johnson en ajustant les quatre premiers moments, pour approximer la somme de variables lognormales corrélées.

Afin d'évaluer la performance analytique des approximations proposées, Datey et al. (2003) mènent deux types de simulations. Dans la première expérience, les auteurs comparent le prix de l'option obtenu par les différentes approximations et le prix obtenu à l'aide des simulations de Monte Carlo avec 1,000,000 de trajectoires. Dans cette étude, Datey et al. (2003) gardent tous les paramètres constants et font varier, dans une première étape, la volatilité du panier et la date d'échéance et, dans une deuxième étape, ils changent le prix d'exercice et le temps restant jusqu'à échéance. Les résultats montrent que la précision de la distribution lognormale se détériore avec l'augmentation de la volatilité ou du temps restant jusqu'à l'échéance. Par contre, les distributions gamma inverse et Johnson donnent de très bons résultats pour toutes les situations.

La deuxième simulation effectuée, étudie la précision des approximations de façon plus générale. En effet, elle consiste à choisir aléatoirement les paramètres d'options à l'intérieur d'un intervalle de valeurs réalistes puis calculer les prix d'options à l'aide des différentes approximations et les comparer aux simulations de Monte Carlo. La précision des approximations est évaluée à l'aide de la racine de la moyenne des écarts relatifs au carré et l'erreur relative maximale. Les auteurs comparent également les deltas d'options. Les résultats montrent que la distribution de Johnson est

la plus précise, suivie de la distribution gamma inverse et finalement de la distribution lognormale.

La méthodologie proposée par les auteurs est très intéressante car leur analyse de sensibilité n'est pas biaisée par le choix des paramètres qui pourrait favoriser une approximation analytique par rapport à une autre. En effet, en choisissant aléatoirement tous les paramètres intervenant dans le calcul des prix d'options, les auteurs peuvent tester la précision globale des différentes approximations.

Plus récemment, Brigo, Mercurio, Rapisarda et Scotti (2004) suggèrent de tarifer des options paniers à l'aide de deux approximations analytiques basées sur la technique d'appariement des moments. Les auteurs supposent que les différents actifs composant le panier suivent des mouvements browniens géométriques et se proposent donc d'évaluer la somme pondérée de variables aléatoires lognormales corrélées. La première approximation est basée sur l'appariement des deux premiers moments de la vraie distribution à une distribution lognormale. Alors que la deuxième approximation consiste à ajuster les trois premiers moments de la distribution réelle à une distribution lognormale modifiée par un paramètre déterministe. Ce nouveau paramètre représente un nouveau degré de liberté qui permet d'ajuster le troisième moment sans perdre l'avantage analytique de l'approximation.

La deuxième partie du papier étudie les distributions de probabilité en calculant une mesure synthétique de la déviation de la distribution approximative du panier de sa vraie distribution. Afin de caractériser rigoureusement l'écart entre les deux distributions, les auteurs introduisent l'information de Kullback Leibler et la distance de Hellinger. Cette comparaison des distributions est plus informative que la comparaison des prix.

Brigo et al. (2004) testent la performance des approximations proposées en comparant le prix obtenu par les différentes approximations et le prix obtenu par simulations de Monte Carlo, d'une option panier portant sur deux actifs transigés sur le marché italien, Fiat et Generali. Les prix sont calculés pour une maturité de 5 ans, pour différentes valeurs de volatilités et de corrélations. Pour des volatilités égales et une corrélation élevée, les deux approximations donnent des prix identiques. Lorsque la corrélation est positive, les deux approximations produisent un degré de précision satisfaisant. Par contre, dans le cas de volatilités asymétriques et/ou de corrélations négatives, l'appariement des trois premiers moments donne les meilleurs résultats.

L'étude des distributions réelle et approximatives montre que l'approximation en ajustant les deux premiers moments performe assez bien dans le cas des volatilités symétriques et pour les corrélations non négatives. L'approximation par l'appariement des trois premiers moments produit d'excellents résultats quand les volatilités sont asymétriques. Pour les corrélations négatives la qualité des deux approximations se détériore, toutefois, la lognormale modifiée reste meilleure que la lognormale. Les auteurs auraient pu généraliser leur travail en augmentant le nombre d'actifs sous-jacents à l'option panier et voir l'effet sur la précision des approximations. Ils auraient pu également étudier la performance de leurs approximations sur un choix plus large de paramètres relatifs à l'option panier.

Plus récemment, Dionne, Gauthier, Ouertani et Tahani (2006) ont généralisé trois approximations

analytiques, proposées dans la littérature, aux options paniers hétérogènes combinant à la fois des commodités, des devises étrangères et des obligations zéro-coupon domestiques et étrangères en présence de taux d'intérêt stochastiques. Les auteurs ont utilisé la fonction de densité gamma inverse, le développement en série d'Edgeworth autour de la distribution lognormale et les fonctions de Johnson.

Dionne et al. (2006) ont comparé la performance des approximations proposées par rapport à un prix de référence calculé à l'aide des simulations de Monte Carlo en utilisant l'appariement des deux premiers moments comme technique de réduction de la variance. La comparaison des méthodes est effectuée à l'aide de deux expériences de simulations. La première expérience est basée sur une analyse locale de la sensibilité. Elle consiste à comparer le prix de l'option panier calculé à partir des approximations, au prix obtenu par les simulations de Monte Carlo avec 1,000,000 trajectoires (répétées 40 fois). L'analyse est effectuée sur un ensemble identique de paramètres ou seul le paramètre analysé change, à savoir la volatilité, le prix d'exercice et l'échéance. Les résultats montrent que les approximations par les distributions de Johnson et lognormale donnent d'excellents résultats et sont beaucoup plus précises que la distribution gamma inverse.

Les auteurs ont effectué une deuxième expérience de simulation qui permet d'examiner de façon plus globale la performance de chacune des approximations proposées. Elle consiste à choisir aléatoirement, à l'intérieur d'un intervalle de valeurs réalistes, les paramètres nécessaires au calcul du prix de l'option. Dionne et al. (2006) ont comparé le prix de l'option calculé à partir des approximations et le prix déterminé à l'aide des simulations de Monte Carlo pour 5,000 choix aléatoires de paramètres. Les résultats obtenus sont similaires à ceux de l'analyse de sensibilité locale. Nous pensons que la distribution gamma inverse performe moins bien que les distributions lognormales et Johnson à cause de la structure de la matrice de corrélation proposée par les auteurs qui est non décroissante. Toutefois, Milevsky et Posner (1998a) ont montré que les propriétés asymptotiques de la gamma inverse sont vérifiées lorsque la structure de corrélation décroît assez rapidement. Il serait probablement intéressant d'essayer différentes structures de volatilité et voir leur effet sur la performance des approximations proposées dans l'article de Dionne et al. (2006).

Certes les approximations analytiques s'avèrent moins précises que les simulations de Monte Carlo, toutefois, elles présentent le grand avantage de la rapidité puisqu'elles permettent d'obtenir instantanément une solution analytique au prix de l'option panier. Parfois, les gestionnaires de risques dans une entreprise doivent prendre des décisions immédiates et ont besoin de tarifier rapidement des options portant sur un nombre très important d'actifs sous-jacents. Malheureusement, ces gestionnaires manquent souvent de temps pour obtenir un prix exact en recourant aux simulations de Monte Carlo et préfèrent de loin utiliser les approximations analytiques surtout lors du calcul de la valeur à risque.

5 Conclusion

L'analyse critique de la littérature sur la tarification des options paniers a révélé l'existence de trois catégories de méthodes : les méthodes numériques incluant les arbres multinomiaux, les simu-

lations de Monte Carlo et les méthodes quasi-Monte Carlo, la détermination des bornes inférieure et supérieure au prix de l'option et les approximations analytiques.

Tout dépend du contexte dans lequel on travaille et des besoins spécifiques des investisseurs, des gestionnaires de portefeuille ou encore des académiciens toutes les méthodes proposées peuvent être plus ou moins appropriées pour la tarification des options paniers. Chacune des techniques a ses avantages et ses inconvénients.

Le calcul des bornes inférieure et supérieure est adapté au contexte de marché incomplet ou il est impossible d'obtenir un prix unique pour l'option panier. Ces bornes permettent de déterminer un intervalle de prix d'option. Les méthodes numériques donnent des résultats aussi précis que possible, toutefois, dès que le nombre d'actifs sous-jacents augmente, ces méthodes deviennent coûteuses, lentes à converger et fastidieuses à utiliser. Enfin, les approximations analytiques permettent d'obtenir des résultats légèrement moins précis que ceux obtenus grâce aux simulations de Monte Carlo mais présente l'avantage de la rapidité en dérivant des solutions analytiques aux prix de l'option panier.

Références

- [1] Barraquand, J. : Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate European Securities. *Management Science* **41**, 1882-1891 (1995)
- [2] Black, F., Scholes, M. : The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* **81**, 637-659 (1973)
- [3] Brigo, D., Mercurio, F., Rapisarda, F., Scotti, R. : Approximated Moment-Matching for Basket-options Pricing. *Quantitative Finance* **4**, 1-16 (2004)
- [4] Broadie, M., Detemple, J. : American Option Valuation : New Bounds, Approximations and a Comparison of Existing Methods. *Review of Financial Studies* **9**, 1211-1250 (1996)
- [5] Carmona, R., Durrleman, V. : Pricing and Hedging Multivariate Contingent Claims. Working paper, Princeton University (2003)
- [6] Castellacci, G., Siclari, M.J. : Asian Basket Spreads and Other Exotic Averaging Options. *Energy Power Risk Management*. (2003)
- [7] Curran, M. : Valuing Asian and Portfolio Options by Conditioning on the Geometric Mean Price. *Management Science* **40**, 1705-1711 (1994)
- [8] Dahl, L.O. : Valuation of European Call Options on Multiple Underlying Assets by Using a Quasi-Monte Carlo Method. A Case with Baskets from Oslo Stock Exchange. In *Proceedings AFIR* **10**, 239-248 (2000)
- [9] Dahl, L.O., Benth, F.E. : Valuation of Asian Basket Options with Quasi-Monte Carlo Techniques and Singular Value Decomposition. *Pure Mathematics* **5**, 1-21 (2001)

- [10] Datey, J.Y., Gauthier, G., Simonato, J.G. : The Performance of Analytical Approximations for the Computation of Asian-Quanto-Basket Option Prices. *Multinational Finance Journal* **7**, 55-82 (2003)
- [11] Deelstra, G., Liinev, J., Vanmaele, M. : Pricing of Arithmetic Basket Options by Conditioning. *Insurance : Mathematics and Economics* **34**, 1-23 (2004)
- [12] Dionne, G., Gauthier, G., Ouertani, N., Tahani, N. : Heterogeneous Basket Options Pricing Using Analytical Approximations. Working Paper, CREF (06-01), HEC Montréal (2006)
- [13] Flamouris, D., Giamouridis, D. : Valuing Exotic Derivatives with Jump Diffusions : The Case of Basket Options. Working Paper, Athens University of Economics and Business (2004)
- [14] Gentle, D. : Basket Weaving. *Risk* **6**, 51-52 (1993)
- [15] Hill, I., Hill, R., Holder, R. : Fitting Johnson Curves by Moments. *Applied Statistics* **25**, 180-192 (1976)
- [16] Huynh, C.B. : Back to Baskets. *Risk* **5**, 59-61 (1994)
- [17] Jarrow, R., Rudd, A. : Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics* **10**, 347-369 (1982)
- [18] Johnson, N.L. : Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation. *Biometrika* **36**, 149-176 (1949)
- [19] Ju, N. : Pricing Asian and Basket Options via Taylor Expansion. *Journal of Computational Finance* **5**, 79-103 (2002)
- [20] Laurence, P., Wang, T.H. : What's a Basket Worth?. *Risk* **17**, 73-77 (2004)
- [21] Levy, E. : Pricing European Average Rate Currency Options. *Journal of International Money and Finance* **11**, 474-491 (1992)
- [22] Milevsky, M.A., Posner, S.E. : Asian Options, the Sum of Lognormals and the Reciprocal Gamma Distribution. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **33**, 409-422 (1998a)
- [23] Milevsky, M.A., Posner, S.E. : A Closed-Form Approximation for Valuing Basket Options. *Journal of Derivatives* **5**, 54-61 (1998b)
- [24] Milevsky, M.A., Posner, S.E. : Another Moment for the Average Option. *Derivatives Quarterly* **5**, 47-53 (1999)
- [25] Pellizzari, P. : Efficient Monte Carlo Pricing of European Options Using Mean Value Control Variates. *Decisions in Economics and Finance* **24**, 107-126 (2001)
- [26] Posner, S.E., Milevsky, M.A. : Valuing Exotic Options by Approximating the SPD with Higher Moments. *Journal of Financial Engineering* **7**, 109-125 (1999)
- [27] Pellizzari, P. : Efficient Monte Carlo Pricing of European Options Using Mean Value Control Variates. *Decisions in Economics and Finance* **24**, 107-126 (2001)
- [28] Rogers, L.C.G., Shi, Z. : The Value of an Asian Option. *Journal of Applied Probability* **32**, 1077-1088 (1995)
- [29] Rubinstein, M. : Return to Oz. *Risk* **7**, 67-71 (1994)

- [30] Smithon, C. : Multifactor Options. *Risk* **10**, 43-45 (1997)
- [31] Turnbull, S., Wakeman, L. : A Quick Algorithm for Pricing European Average Options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **26**, 377-389 (1991)
- [32] Vanmaele, M., Deelstra, G., Liinev, J. : Approximation of Stop-Loss Premiums Involving Sums of Lognormals by Conditioning on Two Variables. *Insurance : Mathematics and Economics* **35**, 343-367 (2004)
- [33] Vorst, T. : Prices and Hedge Ratios of Average Exchange rate Options. *International Review of Financial Analysis* **1**, 179-194 (1992)
- [34] Vyncke, D., Goovaerts, M., Dhaene, J. : An Accurate Analytical Approximation for the Price of a European-Style Arithmetic Asian Option. Working paper, K.U. Leuven, Dept. of Applied Economics, Belgium (2003)
- [35] Wan, H. : Pricing American-Style Basket Options by Implied Binomial Tree. Working paper, Haas School of Business, University of California at Berkeley (2002)