HEC MONTRÉAL

Estimation de la probabilité de défaut corporative dans le cadre d'un modèle affine.

Par
Sébastien Viau

Sciences de la gestion
(Économie financière appliquée)

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maîtrise ès sciences
(M. Sc.)

Novembre 2011
©Sébastien Viau, 2011

Table des matières

Liste des figures et tables iv

Sommaire 1

Chapitre 1 - Introduction 2

1.1-Motivation 2

1.2-Façon d'aborder l'estimation de la probabilité de défaut 5

1.3-Aperçu des résultats de cette étude 8

1.4-Plan de l'ouvrage 9

Chapitre 2 - Revue de la littérature 10

2.1.1-Estimation of Physical Intensity Models for Default Risk, Denault *et al.* (2008) 10

2.1.2-Contribution de l'article à cette étude 13

2.2.1-A Reduced Form Model of Default *Spread*s with Markov Switching Macroeconomic Factors, Dionne *et al.* (2011). 14

2.2.2-Contribution de l'article à cette étude 19

2.3.1-Credit Risk, Duffie et Singleton (2003) 19

2.3.2-Contribution de l'article à cette étude 22

2.4.1-The 2001 recession and the Chicago Fed National Activity Index: Identifying Business Cycle Turning Points 23

2.4.2-Contribution de l'article à cette étude 25

Chapitre 3-Modèle affine 27

3.1-Méthodologie 30

3.1.1-Modèle théorique 30

3.1.2-Structures à termes des probabilités de survie empirique 34

3.1.3-Fonction de la somme des erreurs aux carrées 39

Chapitre 4 - Description des variables du modèle affine 43

4.1-Activités économiques –indicateurs individuels 43

4.1.1-Inflation 43

4.1.2-Consommation 44

4.1.3-PIB 44

4.2-Activités économiques –panier d'indicateurs individuels 44

4.2.1-CFNAI 44
4.2.2-CFNAI, partie consommation 45
4.2.3-Aruoba-Diebold-Scotti (ADS) 45
4.3-Marché du travail 46
4.3.1-Masse salariale 46
4.3.2-Demandes initiales d'assurance chômage 46
4.3.3-Heures de travail dans le secteur manufacturier 47
4.3.4-Nombre d'employés 47
4.4-Indicateurs financiers 47
4.4.1-Federal Funds Rate 47
4.4.2-Term *Spread* (10ans-FFR) 48
4.4.3-S&P500 48
Chapitre 5 - Résultats 50
5.1-AR(1) 50
5.2-Corrélation 52
5.3-Paramètres estimés de la probabilité de défaut conditionnelle 53
5.4-U de Theil 56
5.5-Inférence en méthode des moments généralisée apportée sur le modèle affine 58
5.5.1-Démarche 58
5.5.2-Résultats de l'inférence 60
5.6 -Graphiques des probabilités de défaut physiques et théoriques 62
5.7-Lien avec la fonction d'utilité 65
Chapitre 6 - Conclusion 67
7-Bibliographie 71
8-Annexes 75
8.1- Processus d'intensité : 75
8.2-Séries des variables indépendantes du modèle d'intensité (modèle(1)) 76
8.3- Statistiques descriptives des structures à termes 81
8.4- Résultats du test Dickey-Fuller 81
8.5- Résultats de l'inférence 82

Liste des figures et tables

		pages
Figure 1	Résultats de l'estimation des AR(1) pour la consommation (c) et l'inflation (π) dans Dionne *et al.* 2011……	17
Figure 2	Résultats de la calibration du modèle de probabilité de défaut Dionne *et al.* 2011…….....	17
Figure 3	Quelques résultats du *spread* de défaut Dionne *et al.*2011……	18
Figure 4	La série du CFNAI en fréquence mensuelle……	24
Figure 5	La corrélation entre le CFNAI et l'IPC ……..	26
Figure 6	Illustration du comportement de la distribution cumulative du processus homogène Poisson pour k = 1, ..., 10……..	28
Figure 7	L'estimation Taylor de la probabilité de survie……...	32
Figure 8	Description des variables explicatives……...	40
Figure 9	La structure à terme des probabilités de survie physique des cotes A, B et CCC pour les années 1970, 1980, 1990 et 2000……...	41
Figure 10	L'évolution de la moyenne de la structure à termes physiques par année des cotes A B et CCC ……	41
Figure 11	Résultats des AR(1) et test de Dickey-Fuller calculés sur nos treize variables.……...	51
Figure 12	Corrélations entre l'inflation et les quatre autres variables qui suivent un processus markovien……..	53
Figure 13	Paramètres estimés de la probabilité de défaut conditionnelle…….	54
Figure 14	Résultats du coefficient de Theil……...	57
Figure 15	Démarche pour l'instrumentalisation……	59
Figure 16	Les statistiques de t.……	60
Figure 17	Évolution de la probabilité de défaut estimée par l'inflation et la masse salariale.……..	62
Figure 18	Évolution de la probabilité de défaut estimée par l'inflation et le nombre d'employés.……..	64

Figure 19	Résultats des régressions linéaires simples sur consommation expliquée par le nombre d'employés et ensuite par la masse-salariale.	66
Figure 20	Séries des variables indépendantes du modèle d'intensité..……..	76-80
Figure 21	Statistiques descriptives des structures à termes…….…….	81
Figure 22	Résultats du test de Dickey-Fuller….…….	81
Figure 22	Résultats de l'inférence…..…….	82

Sommaire

Cette étude porte sur l'estimation de la probabilité de défaut sur des obligations corporatives. En d'autres termes, il est question de quantifier la probabilité qu'un emprunteur ou émetteur de dette ne repaye plus, à la date prédéterminée, l'intérêt ou le principal que doit recevoir le prêteur. En plus de cette délinquance au paiement tout juste mentionnée, toute autre activité[1] venant du prêteur qui cherche à alléger le fardeau de la dette que subit l'emprunteur est aussi considérée comme un défaut (Moody's, 2007).

En utilisant une forme affine qui estime la probabilité de défaut, nous tentons de répondre à trois questions principales. La première est de savoir comment se comporte la consommation dans l'estimation de la probabilité de défaut? Ensuite, quel est l'aspect dominant dans le contexte de l'inflation : est-ce qu'une hausse de l'inflation, qui freine l'économie, augmente la probabilité de défaut; ou est-ce qu'une hausse de l'inflation, qui diminue la valeur réelle de la dette, diminue la probabilité de défaut? Finalement, quels indicateurs dominent dans l'estimation de la probabilité de défaut?

De notre modèle, nous remarquons que la consommation n'estime pas adéquatement la probabilité de défaut. En effet, parmi tous les indicateurs de notre recherche qui répondent aux conditions d'un modèle exponentiel affine, la consommation crée le plus haut niveau d'erreurs dans l'estimation de la probabilité de défaut. De plus, nous constatons que dans le cadre de l'inflation, l'aspect de la dette réelle domine l'aspect du frein économique, donc en d'autres mots, le coefficient relié à l'inflation est de signe négatif. Finalement, nous trouvons que le secteur du marché du travail offre les indicateurs qui estiment le mieux la probabilité de défaut.

[1] Par exemple, ces activités peuvent être : au lieu de continuer à payer la dette, l'émetteur en difficulté peut remettre des actions privilégiées à la place. Ou encore, le prêteur peut accepter de baisser le taux coupon (Moody's, 2007).

Chapitre 1 - Introduction

1.1-Motivation

La crise de 2007 qui a été causée initialement en grande partie par une gestion des risques relativement limitée; qui a sous-estimé entre autres les risques venant des hypothèques *subprime* et les risques venant de la titrisation qui contenait ces hypothèques *subprime*, a su ébranler ce qui était cru intouchable. De ces désastres, y découle la faillite d'une institution ayant à ce moment environ 600$ milliards en actif : Lehman Brothers, qui est d'après *The Economist* «*America's largest and most complex corporate failure*» (The Economist, 2010). De plus, un imposant total de 25% d'actifs de l'ensemble des *hedge funds* aux États-Unis ont été détruits par les ravages de cette crise (The Economist, 2010).

En plus des effets notables ex post de la crise, telle que l'augmentation probable du taux de chômage naturel aux États-Unis d'au moins 1 point de pourcentage (The Economist, 2010), beaucoup de tension se crée de nouveau sur la scène mondiale de la finance. Afin de protéger l'intégrité de sa monnaie suivant la perte importante de confiance qu'ont manifesté les investisseurs auprès des obligations de la Grèce, de l'Irlande et de l'Espagne par exemple; l'Union européenne s'est vue obligée de créer un fonds de secours appelé « European Financial Stability Facility (EFSF)» pour empêcher les défauts sur les obligations de ses membres (European Financial Stability Facility, 2010). Pour ce faire, muni de sa cote triple A, l'EFSF peut émettre jusqu'à € 440 milliards d'obligations qui serviront de capital pour financer la dette hors contrôle et grimpante de ses membres en sévère difficulté. Par contre, malgré l'ampleur de cette intervention, cela ne suffit pas pour atténuer la crainte qu'éprouvent les investisseurs auprès des obligations venant des pays membres en situation précaire. En effet, en début du mois d'octobre 2010, les rendements à maturité des obligations de 10 ans de la Grèce, de l'Irlande et du Portugal étaient largement au-dessus du fameux T-Bond américain, respectivement leurs *spreads* étaient de 7.66%, 4.17% et 3.98% (Data Archive, 2010).

Du côté corporatif, l'image d'un monde financier instable ne change pas pour autant. De nouveau, comme cela s'est produit lors de la crise 2007, le secteur bancaire en général

échoue de nouveau dans l'instauration d'une gestion des risques adéquate. Par exemple, en Irlande on retrouve deux banques, Anglo Irish Bank et Northern Rock, qui ont perdu pied; car elles ont échoué dans l'évaluation des risques encourus dans le cadre d'une pratique qui est pourtant traditionnelle à la sphère bancaire –emprunter court terme et prêter long terme (The Economist, 2010). Autre exemple, en été 2010, les grandes banques espagnoles ont ressenti le besoin urgent d'emprunter pour diminuer leur délicat ratio « prêts sur dépôts » qui a atteint 135%! Or, même si ces grandes banques espagnoles ont pour collatéral des obligations gouvernementales, il était tout de même difficile et coûteux pour elles d'emprunter sur les marchés. Et ce, jusqu'à ce que ces banques se joignent à un *clearing house* : ce qui fait diminuer significativement la probabilité de défaut, qui donc attire un financement plus abordable (The Economist, 2010).

Comme suite à tous ces événements, il n'est donc pas surprenant de voir un besoin émergeant d'une gestion des risques plus approfondie. D'une part, l'accent est mis de nouveau sur l'importance du capital requis, comme le témoigne entre autres l'arrivée du EFSF et surtout comme en témoigne la mise en place d'une troisième version de l'Accord de Bâle. Le Comité de Bâle a pour but de réguler les institutions bancaires sur les risques qu'elles prennent, et par ce fait même, publie une liste de règlements à suivre. Bâle III a changé par rapport à Bâle II sur plusieurs règlements, mais il est à noter plus particulièrement que le ratio «*Tier 1*» [2] augmentera de 2 points de pourcentage, passant donc de 4 à 6% et dont 4.5% de ces 6% seront de l'équité (Basel III accord). Ceci implique donc que l'ensemble des risques de marché et de crédit sera couvert par du capital de secours qui sera de meilleure qualité –par exemple, il sera couvert par un nombre plus élevé d'actions ordinaires et un nombre plus faible de titres de dette subordonnée. Autre point important de Bâle III qui démontre clairement le besoin accru d'une gestion des risques plus approfondie : de nouveaux règlements sur l'instauration d'un *capital buffer* seront imposés (Basel III accord). Impliquant donc que le capital requis devra être augmenté permettant ainsi de réduire davantage les pertes en périodes de ralentissement économique. Le désir de minimiser les risques bancaires est à un point tel que même si des institutions telles que *The Institute of International Finance* et la Fédération française bancaire ont estimé respectivement, et ce, suite à l'imposition de Bâle III, une réduction de 3 et de 6% de la croissance anticipée du PIB des pays développés couvrant la période 2011 à 2015 ; l'Accord de Bâle III sera tout de même imposé mais avec des délais importants (The Economist, 2010).

[2] Ratio tier 1 est (i) la valeur totale de capital requis à **qualité supérieure** sur (ii) l'ensemble de la valeur des risques encourus, soit les risques de marché et les risques de crédit.

Cette nouvelle version de l'Accord de Bâle, obligera les institutions bancaires à non seulement (i) augmenter leur capital requis pour un risque donné, mais aussi de (ii) convertir en partie le capital requit en qualité supérieure. Ceci implique donc qu'il est d'autant plus nécessaire d'estimer correctement le risque total qui est encouru par une institution bancaire. Car, une banque sous l'Accord de Bâle III qui, par exemple, surestime son risque à 5m$ alors qu'en réalité il n'est que de 4.5m$, subira un coût d'opportunité encore plus sévère qu'en situation de Bâle II. Parce que pour la même surestimation du risque, sous l'accord de Bâle III elle consacrera non seulement plus de capital requis, mais aussi celui-ci sera de meilleure qualité. Donc, pour éviter une telle situation où l'institution se couvre plus que ce qu'elle ne le désire, la pratique d'estimation du risque total devrait occuper dorénavant un rôle grandissant dans la gestion des risques.

De nouveau, la valeur estimée du risque total, par exemple 4.5m$, détermine la valeur du capital requis qu'une institution mobilisera, par exemple 750,000$. Cette valeur de risque total, 4.5m$, si elle est calculée d'une approche interne, elle découle en fait de la *value at risk* (VaR) pour le risque de marché et de CreditMetrics par exemple pour le risque de crédit (Dionne G. , 2010). Ensuite, pour que la VaR de marché paramétrique soit calculée, la variabilité des rendements des titres doit être estimée avec le MEDAF, par exemple, et en présence de produits dérivés dans le portefeuille, les paramètres grecs[3] doivent aussi être estimés à l'aide du modèle Black-Scholes (Dionne G. , 2010). Maintenant, pour ce qui est de l'estimation de la valeur du risque de crédit encouru par la firme, les paramètres tels que le *loss given default*[4], *exposure at default*[5], la *probabilité de migration de crédit*[6] et ainsi que *la probabilité de défaut*[7] sont clés dans l'estimation de la valeur du risque de crédit (Dionne G. , 2010). Dans le cadre de cette étude, il est question d'aborder la partie de la probabilité de défaut qui est fondamentale à l'évaluation du risque de crédit (Duffie & Singleton, 2003) et donc qui est fondamentale à l'évaluation du risque total que subit une firme. Mal estimer la probabilité de défaut pourrait donc non seulement fausser notablement l'ensemble de la valeur du risque total, mais aussi, de ce fait même, pourrait fausser le capital requis

[3] Les paramètres grecs sont : le delta – mesure la sensibilité du prix de l'option au changement du prix du sous-jacent; le thêta –mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport à la maturité; le rhô – mesure la sensibilité du prix de l'option au changement des taux d'intérêt; véga – mesure la sensibilité du prix de l'option au changement de la volatilité du prix du sous-jacent; gamma –mesure la sensibilité du prix de l'option au changement du delta.
[4] Taux de recouvrement au moment du défaut : qui est la fraction de l'actif récupérée au moment du défaut (Dionne G. , 2010).
[5] Exposition au risque de crédit au moment du défaut : qui est la valeur de l'actif exposé au défaut au moment du défaut (Dionne G. , 2010).
[6] Qui est la probabilité de changer de cote de crédit.
[7] Qui est la probabilité que l'emprunteur ne respecte pas son engagement (Dionne G. , 2010).

nécessaire en cas de pertes extrêmes. Si ce capital requis est sous-estimé, la firme absorbera dangereusement les pertes extrêmes et s'il est surestimé, d'après la nouvelle réglementation, le coût d'opportunité sera plus élevé qu'en situation de Bâle II en allouant une somme plus importante en capital requis et le tout sera de meilleure qualité.

1.2-Façon d'aborder l'estimation de la probabilité de défaut

Étant donné son rôle crucial au sein de l'évaluation du risque de crédit, la probabilité de défaut est non seulement étudiée intensivement, mais elle est aussi étudiée sous différentes approches. Denault *et al.* (2007) mentionne justement quatre classes dans la pratique de l'estimation de la probabilité de défaut.

L'une des classes porte sur l'estimation de la probabilité de défaut en utilisant l'évolution de la fréquence de défaut dans une cohorte prédéterminée. Ou, en d'autres termes, il suffit de compter tout simplement le nombre de défauts dans la cohorte prédéterminée pour tous les intervalles temporels, soit un an par exemple, à l'intérieur de la période d'étude, soit quarante ans par exemple. Ensuite, de cette série de défauts on peut estimer la probabilité de défaut en t+1 pour cette cohorte en utilisant par exemple la moyenne de cette série (Dionne *et al.*, 2011). Cette première classe a pour avantage d'être simple et utilise des données mondialement accessibles[8] (Denault *et al.*, 2008). De plus, comme le mentionnent Dionne et al. (2010), cette classe ne requiert que très peu de structure ajoutée sur l'ensemble des données. Par contre, cette classe perd beaucoup en attrait statistique et modélisation, car souvent on ne retrouve aucun défaut dans les intervalles donnés, et ceci s'accentue au niveau des obligations à qualité supérieure. Ce qui implique donc qu'il devient très difficile d'obtenir des écarts-types adéquats aux fins de tests d'hypothèses (Dionne *et al.*, 2011).

Une autre classe se base sur des modèles statistiques et sur des données venant de rapports financiers ou sur des données de marchés (Denault *et al.*, 2008). Denault *et al.* (2008) expliquent que dans cette classe se trouvent des modèles d'analyse discriminante et de réponse qualitative comme l'appliquent Altman (1968) and Lo (1986), et des modèles de durée où essentiellement la variable de l'âge du titre à revenu fixe devient une variable explicative principale à l'explication de la probabilité de défaut (Duffie & Singleton, 2003).

[8] Sur Moody's et sur Standard and Poor's par exemple.

Ensuite, la prochaine classe de modèles qui estiment la probabilité de défaut est celle qui est constituée de modèles à forme structurelle. Dans cette sphère de modèles, on met plutôt l'accent sur l'évolution de la valeur de la firme et estime une limite critique à cette valeur: si cette limite est franchie, la firme devrait faire défaut (Figlewski, Frydman, & Liang, 2006). Cette approche est utilisée entre autres par CreditMetrics créée par J.P. Morgan. En effet, CreditMetrics utilise une version adaptée du modèle de Merton où essentiellement la valeur de la firme, exprimée par la somme des actifs, influence non seulement le défaut d'une de ses obligations, comme prétend le modèle de Merton; mais aussi dans cette version adaptée de CreditMetrics, la valeur de la firme détermine également la migration de crédit de son obligation (J.P. Morgan, 1997). En détail, la valeur de la firme est juxtaposée à des seuils correspondants aux différentes cotes de crédit. Dès lors, si la valeur de la firme franchit un seuil quelconque, il y a dans ce cas une migration de crédit. Ensuite, ces seuils peuvent être en fonction des probabilités de migration comme c'est démontré au chapitre 8 de CreditMetrics. Mais, ce qui compte particulièrement dans ce contexte, c'est que CreditMetrics nous permet entre autres d'avoir une estimation de la valeur critique, qui sert à estimer les défauts. Tel est le cas dans les modèles structurels.

Par contre, ces modèles structurels sont tout de moins pénalisés par d'importantes hypothèses. Comme le mentionne Denault *et al.* (2008), on impose à ces modèles une dynamique sur les actifs et une mécanique au défaut : qui ensemble peuvent notablement fausser les seuils de défaut. En reprenant l'exemple de CreditMetrics, au chapitre 8, on impose une dynamique sur les actifs en supposant entre autres que les rendements des actifs suivent une loi normale. Ce qui importe dans ce cas, ce n'est pas vraiment que CreditMetrics utilise la loi normale, mais c'est que l'on doit imposer une distribution sur les rendements d'actifs. Or, se tromper sur la distribution réelle des rendements d'actifs fausse directement les seuils de migration de crédit qui incluent d'ailleurs le seuil de défaut. Par exemple, en suivant l'approche de CreditMetrics, si la probabilité est 1.06% qu'une obligation cotée B fasse défaut à t+1 et en plus, supposons que la moyenne des rendements d'actifs soit 4% avec 2% d'écart-type, le seuil qui déclenchera le défaut sera donc -0.6%[9] de rendement sur les actifs. Mais, si en réalité les queues de la distribution sont beaucoup plus épaisses comme le démontre la distribution de Student, le seuil de défaut sera donc plus faible que -0.6%. En suivant les données de l'exemple précédent, et en fixant le degré de liberté à 20, le seuil de

[9] Ce seuil est obtenu de cette manière : la probabilité de défaut est de 1.06%, qui donne un z de 2.30 dans la loi normale. Ensuite il ne suffit que d'isoler X dans la formule de standardisation :

$$-2.30 = \frac{X - 0.04}{0.02} => X = -0.006$$

défaut diminue à -1.26%. Donc, si on anticipe que la firme subira un rendement sur ses actifs de -1% par exemple, dans le cas de la distribution gaussienne, on estimerait que la firme fera défaut; alors que dans le cas de la Student, on n'anticiperait pas de défaut.

Finalement, les modèles structurels imposent aussi une mécanique sur l'événement de défaut (Denault, Gauthier, & Simonato, 2008). Le simple fait de définir le seuil critique de défaut peut être une chose assez complexe et donc sujette à erreur. Dans le contexte de CreditMetrics et du modèle de Merton, on suppose que la valeur de la firme, la somme totale de ses actifs, définie à elle seule la capacité à payer ses dettes : plus elle a de la valeur plus c'est facile pour elle de payer sa dette. Donc, dans ce cas, les actifs uniquement guident le mécanisme de défaut. Or, le mécanisme de défaut peut être influencé par d'autres variables que les actifs uniquement. Par exemple, si la firme a une valeur bien supérieure au seuil de défaut, mais que ses actifs sont extrêmement illiquides, sous forme par exemple d'immobilier, cette firme pourrait être quand même en situation de défaut au moment de l'échéance de certains passifs. En plus, la durée[10] des actifs et des passifs devrait être aussi considérées dans ces analyses, car, peu importe la valeur de la firme, si la durée des actifs est plus élevée que celles des passifs, la firme est dans ce cas en situation délicate, car elle devra financer cet écart; et cet écart sera d'autant plus difficile à combler si ses actifs sont de nouveau très illiquides. Autre point potentiel à ajouter au mécanisme de défaut, parce que les actifs ne sont pas uniquement financés que par le passif, ils le sont aussi par des actions et des actions privilégiées (CFA , 2008), il est donc important de connaître la structure de capital de l'entreprise pour ainsi évaluer l'ampleur de la dette. Une bonne estimation de la structure de capital aide donc à mieux cibler un seuil de défaut. Mais, comme le mentionne Figlewski *et al.* (2006), estimer la structure de capital devient très difficile et surtout se complexifie avec l'étalement de la firme. Enfin, quel mécanisme se rapproche le plus de la réalité et comment l'estimer correctement? Ce sont des questions qui ne doivent pas être ignorées lorsqu'on utilise un modèle à forme structurelle. Puisqu'une mauvaise définition du mécanisme ou encore une bonne définition du mécanisme mais qui est mal estimée, donnera des seuils de défaut faussés et donc inutiles.

Ensuite, comme dernière classe qui estime la probabilité de défaut, celle-ci utilise principalement des modèles à forme réduite. C'est dans ces modèles que la probabilité de défaut devient une variable directement expliquée par différents éléments (Denault *et al.*,

[10] La durée peut être définie de plusieurs façons, dans ce contexte, la *durée des passifs* est l'échéance moyenne des *paiements*; alors que la *durée des actifs* est l'échéance moyenne des *revenus*.

2008). Comme le mentionnent Figlewski *et al.* (2006), dans le contexte d'un modèle à forme réduite, la probabilité de défaut est considérée comme un événement aléatoire, de ce fait, on permet entre autres que la probabilité de défaut puisse varier dans le temps (Denault, Gauthier, & Simonato, 2008). Étant donné ces caractéristiques attrayantes, il n'est donc pas surprenant, comme le mentionnent Figlewski *et al.* (2006), que ces modèles occupent une place dominante dans l'étude de la gestion du risque de crédit tant au point de vue académique que pratique.

Dans ces modèles à forme réduite, l'intensité ou encore la probabilité de défaut conditionnelle joue le rôle de variable expliquée. Ensuite l'intensité, ou la probabilité de défaut conditionnelle, peut être expliquée par une série d'éléments, telle que des *sauts* et des *retours à la moyenne* par exemple (Duffie & Singleton, 2003). De ces caractéristiques de la dynamique de l'intensité, on peut y ajouter aussi des variables latentes (Denault, Gauthier, & Simonato, 2008), ou encore des variables observées pour expliquer l'intensité, comme ce sera dans le cadre de cette étude. Finalement, cette intensité doit suivre une distribution, qui dans la plupart des cas en probabilité de défaut est une distribution de *Poisson arrival* (Duffie & Singleton, 2003). Ce qui implique entre autres que l'intensité en t-1 n'influence pas l'intensité en t. Ensuite, de cette distribution, le temps d'attente entre événements (ou encore la probabilité de survie) est exponentiellement distribué (Duffie & Singleton, 2003). Plus de détails suivront dans la partie Méthodologie.

1.3-Aperçu des résultats de cette étude

En employant dans cette recherche un modèle à forme réduite qui a en input des variables macroéconomiques et en output une estimation de la probabilité de défaut; nous trouvons qu'en comparant avec le reste de nos indicateurs, ceux qui dominent dans l'estimation de la probabilité de défaut viennent du secteur du marché du travail. Par exemple, en comparant avec notre variable de la consommation, notre variable « nombre d'employés » à respectivement 33%, 40% et 30% moins d'erreurs dans l'estimation de la probabilité de défaut pour les cotes Aa, A et Baa. De plus, dans le contexte du in-sample, ces variables du marché du travail offrent au modèle à forme réduite une qualité supérieure dans l'anticipation des récessions à venir. En effet, nous remarquons que pour chacune des six récessions couvertes par l'étude, la probabilité de défaut estimée augmente normalement quelques mois avant même que la récession n'ait officiellement débuté. Finalement, sans surprise, parce que les probabilités de défaut physiques ne varient presque pas pour les cotes

Aa et A, nous remarquons que notre modèle capte beaucoup mieux les probabilités de défaut des cotes inférieures.

1.4-Plan de l'ouvrage

La continuation de cette recherche se divise en cinq autres chapitres. Tout d'abord, le chapitre 2 couvre la revue de la littérature dans laquelle se trouvent quatre articles qui sont fondamentaux à cette recherche, et ce, tant au niveau quantitatif que qualitatif. Ensuite, le troisième chapitre présente notre modèle affine qui estime la probabilité de défaut et la manière dont on s'y prend pour l'utiliser. Pour ce qui est du quatrième, ce chapitre énumère nos variables explicatives du modèle affine. Par la suite, le chapitre 5 fournit nos résultats sur entre autres l'estimation de la probabilité de défaut, la valeur des paramètres estimés et l'inférence appliquée aux paramètres de notre modèle affine. Finalement, le dernier chapitre résume la recherche.

Chapitre 2 - Revue de la littérature

2.1.1-Estimation of Physical Intensity Models for Default Risk, Denault *et al.* (2008)

Dans cet article, les auteurs étudient et comparent deux approches qui sont régulièrement utilisées pour l'estimation des processus d'intensité de la probabilité de défaut. Ces deux approches communément utilisées sont les spécifications d'Ornstein-Uhlenbeck (O-U) et de racine carrée. En comparant les probabilités théoriques correspondant à chacun des deux modèles aux probabilités physiques, les auteurs sont en mesure de cibler le modèle qui semble être le plus adéquat à prédire la probabilité de défaut conditionnelle.

Leur méthodologie est la suivante. Tout d'abord la première étape est d'obtenir une fonction de structure à termes de probabilités de survie théoriques pour chaque période et pour chaque cote. Pour ce faire, ils instaurent soit le processus d'intensité O-U ou racine carrée dans une fonction exponentielle affine en but d'obtenir les structures à termes en question. De cette manière, si l'on donne des valeurs aux paramètres des processus d'intensité, l'on obtient une structure à termes de probabilités de survie pour chaque année et pour chaque cote. Mathématiquement, avec le processus d'intensité qui suit :

$$d\lambda_t = \kappa(\theta - \lambda_t)d_t + \sigma\lambda_t^{\delta} dW_t, \qquad (0.1)$$

où δ = 0 dans le cas d'O-U et δ = ½ dans le cas de la racine carrée. Dans cette fonction, κ est la vitesse du retour à la moyenne, θ est la moyenne à long terme et σ est le paramètre de diffusion. Ensuite, de façon récursive et en incluant l'une des deux versions du processus d'intensité dans la fonction exponentielle-affine, la fonction exponentielle affine devient :

$$Pr_t[\tau > T] = S_t(T - t, \lambda_t) = A(\psi, T - t)\exp(-B(\psi, T - t)\lambda_t) \qquad (0.2)$$

Donc, cette équation qui est sous forme analytique (0.2) donne en output les structures à terme de probabilités de survie. Finalement, de cette fonction analytique (0.2), les paramètres A et B sont définis ainsi dans le cadre du modèle O-U:

$$A(\psi, u) = e^{[\gamma(B(\psi,u)-u)-\sigma^2 B^2(\psi,u)/4\kappa]} \tag{0.3}$$

$$B(\psi, u) = \frac{1}{\kappa}[1 - e^{-\kappa u}] \tag{0.4}$$

où $\gamma = \theta - (\sigma^2/2\kappa^2)$ et $\psi = [\kappa, \theta, \sigma]$. Ils sont définis aussi par la méthode de la racine carrée :

$$A(\psi, u) = \left[\frac{2\gamma e^{[(\kappa+\gamma)u]/2}}{(\kappa+\gamma)(e^{\gamma u}-1)+2\gamma}\right]^{2\kappa\theta/\sigma^2} \tag{0.5}$$

$$B(\psi, u) = \frac{2(e^{\gamma u}-1)}{(\kappa+\gamma)(e^{\gamma u}-1)+2\gamma}, \tag{0.6}$$

où $\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}$.

Ensuite, en fonction de ψ, il est question de minimiser la différence entre les structures théoriques aux structures physiques. Les structures physiques, de leurs parts, sont obtenues à partir des données de *Moody's Corporate Bond Default Database* qui ensuite sont transformées par un générateur markovien donnant ainsi une matrice de migration en temps continu. Cette approche qui est proposée par Lando et Skodeberg (2002) considère donc la possibilité qu'un titre puisse migrer plus d'une fois dans le courant de la période. Enfin, une fois que la différence est minimisée entre les structures à termes physiques et théoriques, ils obtiennent un ψ optimisé. Dès lors, avec ces paramètres optimisés, il leur est possible de calculer la probabilité de défaut conditionnelle théorique à partir de la fonction du processus d'intensité appropriée.

Dans la littérature, il n'est pas clair sur laquelle des deux spécifications estime le mieux la probabilité de défaut. D'une part, en comparant avec la spécification de la racine carrée, des auteurs comme Berndt (2007) ont trouvé que la spécification O-U offre la meilleure approche à l'estimation de la probabilité de défaut conditionnelle. Pour en aboutir à cette conclusion, tout d'abord, au lieu d'utiliser le *Corporate Bond Default Database,* Berndt (2007) a utilisé de Moody's *the expected default frequency* (EDF). L'EDF offre une approximation de probabilités de défaut physiques et son utilisation est adéquate dans l'unique cas d'une estimation des paramètres spécifiques à une firme. De plus, dans cet

article de Berndt (2007), les erreurs liées à la mauvaise spécification du modèle sont tout simplement ignorées. Or, dans le cas de Denault *et al.* (2008) il est plutôt question tout d'abord d'estimer les paramètres d'une firme typique représentative de chaque cote de crédit donc, le *Corporate Bond Default Database* est utilisé à la place de l'EDF. Ensuite, Denault *et al.* (2008) considèrent dans leur modèle l'erreur de mauvaise spécification. Bref, Denault *et al.* (2008), et ce contrairement à Berndt (2007), trouvent plutôt que la spécification en racine carrée est celle qui estime plus adéquatement la probabilité de défaut conditionnelle.

En commençant par les résultats qu'a fourni la spécification d'O-U, Denault *et al.* (2008) ont trouvé que pour chacune des classes de crédit, le paramètre de retour à la moyenne est relativement faible et avec un degré de confiance de 99%, il n'est pas statistiquement différent de zéro. De plus, le paramètre d'écart-type est pour sa part statistiquement différent de zéro pour toutes les classes à part Aaa et il augmente avec la diminution en qualité de crédit. Pour le dernier paramètre, la moyenne à long-terme augmente avec la diminution de la qualité de crédit : ce qui respecte de nouveau l'intuition économique. Ensuite, pour ce qui est des résultats de la spécification en racine carrée, qualitativement, l'ensemble est similaire à la spécification O-U : les paramètres ont tendance à augmenter avec la diminution de la qualité de crédit. Pour la moyenne à long-terme, avec un degré de confiance de 99%, elle n'est pas statistiquement différente de zéro pour les classes Aaa, Aa, B et Caa. De plus, pour ces mêmes cotes, le paramètre du retour à la moyenne n'est pas significatif. Enfin, comme c'est le cas avec O-U, le paramètre de volatilité est différent de zéro pour toutes les classes, sauf qu'il est généralement plus élevé en situation de racine carrée.

Les auteurs ont utilisé un test de Lagrange où l'hypothèse nulle est que les paramètres sont égaux à zéro lorsqu'on ajoute des paramètres supplémentaires, ce qui permet donc ainsi d'évaluer la validité du modèle. Dans le cas d'O-U, avec un degré de confiance de 99%, l'hypothèse nulle n'a pas été rejetée dans deux classes, Aaa et Ba. Pour ce qui est de la spécification racine carrée, l'hypothèse nulle n'a pas été rejetée pour Aa, Baa, B et Caa, qui est au total deux cotes de plus que dans le cas d'O-U. Bref, ce test supporte la spécification en racine carrée.

Avec ces paramètres estimés, Denault *et al.* (2008) obtiennent leurs structures à termes des probabilités de défaut. Étant donné les plus hautes valeurs du paramètre « retour à la moyenne » et de plus petites valeurs associées à la volatilité dans le cadre de la spécification O-U : les probabilités de défaut *forward*s moyennes obtenues de la spécification O-U sont légèrement différents de celles obtenues par la spécification en racine carrée. En

effet, du côté de la spécification O-U, les auteurs obtiennent des structures à termes de probabilité de défaut plutôt plates pour les cotes Aaa, Aa, A, Baa, Ba. Pour les deux autres cotes, B et Caa, les structures à termes sont par contre décroissantes, signalant ainsi que ces firmes, représentant B et Caa, sont sensées d'accroître leur qualité de crédit, car la probabilité de défaut conditionnelle s'affaiblit sur un horizon grandissant. Ensuite, du côté de la spécification racine carrée cette fois, seules les cotes supérieures (Aaa, Aa) affichent une structure à terme moyenne relativement plate. Annonçant ainsi que la qualité du crédit reste intacte, et ce, peu importe l'horizon. Pour le reste des cotes, les structures ont une pente négative. Ce comportement est encore plus prononcé avec les cotes inférieures (Ba, B, Caa), démontrant de nouveau que sous condition de survie, ces firmes sont sensées d'accroître leurs qualités de crédit avec le temps.

2.1.2-Contribution de l'article à cette étude

L'article de Denault *et al.* (2008) soutien considérablement notre étude. Plus particulièrement, l'approche statistique de notre étude repose beaucoup sur certains aspects de leur article, dont la spécification d'O-U, l'obtention des probabilités physiques et les hypothèses qui y sont reliées.

Dans le cadre de notre étude, l'intensité ou encore la probabilité de défaut conditionnelle est estimée en fonction de plusieurs paramètres. Dont certains d'entre eux seront déjà estimés grâce à la spécification d'O-U. En détail, parce que dans cette étude nous nous intéressons à l'impact de facteurs observables sur l'intensité, alors que dans l'article de Denault *et al.* (2008) ils s'intéressent plutôt à l'intensité sous l'influence de facteurs non-observables, notre approche est quelque peu différente. En effet, pour chaque variable indépendante de l'intensité, nous estimons les paramètres de la spécification O-U associés à cette variable. En d'autres mots, parce qu'une spécification O-U est l'équivalent d'un AR(1)[11], pour chaque variable explicative de la probabilité de défaut, on estimera avec un AR(1) sa constante, sa pente et les résidus. Ce qui donnera les *paramètres connus* pour l'estimation des structures à termes des probabilités de survie. Donc, de notre étude, la spécification O-U sera utilisée en but d'obtenir des paramètres connus pour l'estimation de l'intensité. Tandis que dans l'article de Denault *et al.* (2008), la spécification d'O-U est plutôt le processus qui explique directement la probabilité de défaut conditionnelle. Plus de détails sont fournis à la section méthodologie.

[11] Pour plus de détails, vous référer à l'annexe

Finalement, de Denault *et al.* (2008), on utilise dans notre étude la même méthodologie qu'ils emploient pour obtenir les probabilités de survie physiques. C'est à dire qu'on utilise un générateur markovien sur les données du *Corporate Bond Default Database* pour ainsi obtenir des estimations de structures à termes des probabilités de survie physiques. Ces probabilités de survie physiques, estimées par le générateur markovien, sont utilisées comme approximation des vraies probabilités de survie. De cette manière, les probabilités physiques permettent d'éviter d'élaborer des hypothèses sur les taxes, le taux de recouvrement et la liquidité. De plus, ces probabilités physiques considèrent les migrations successives à l'intérieur d'une période, ce qui ajoute de nouveau un rapprochement à la réalité. Bref, ces probabilités physiques estimées par un générateur markovien sont ce qui semble être d'après Denault *et al.* (2008) le meilleur proxy aux vraies probabilités de survie. De nouveau plus de détails sont fournis à la section méthodologie.

2.2.1-A Reduced Form Model of Default *Spread*s with Markov Switching Macroeconomic Factors, Dionne *et al.* (2011).

Le but de cet article est d'estimer la part du risque de défaut dans le *spread* corporatif. Pour ce faire, leur modèle à forme réduite considère à la fois : des facteurs observables macroéconomiques, l'aversion au risque des investisseurs et les changements structuraux couvrant la période étudiée –1987-2009.

Parce que le but de cet article est d'estimer uniquement la part du risque de défaut dans le *spread* corporatif, les auteurs choisissent de ne pas calibrer les paramètres du modèle à partir des données de *spread*. La raison est que les variations du *spread* ne sont pas uniquement expliquées par les variations du risque de défaut, elles sont aussi expliquées par les variations de liquidité et des taxes par exemple. Alors, si ce modèle, qui tente d'estimer uniquement la part du risque de défaut, est calibré en fonction des données de *spread*, ses paramètres estimés seront biaisés, car le modèle souffrira d'une mauvaise spécification en omettant le reste des facteurs qui expliquent le *spread*. Pour remédier à ce problème de calibration de paramètres, les auteurs utilisent plutôt une approche indirecte. Cette approche indirecte repose sur les données de la croissance de la consommation, de l'inflation, des structures à termes du taux sans risque et des défauts historiques.

En détail, cette approche indirecte pour estimer les paramètres de leur modèle suit trois étapes. La première étape est d'estimer les paramètres des changements structuraux

markoviens en fonction des variables de consommation et d'inflation. On apprend de leurs résultats que les probabilités de transition d'un état à un autre pour l'une des deux variables sont les suivantes : la probabilité que la consommation soit dans le régime 1 en période t, alors qu'il était dans le régime 1 à la période précédente (prob(1|1)) donne 96.4%. Ensuite, toujours pour la consommation, la prob(2|2)=86.1%. Pour l'inflation, prob(1|1)=96.7% et prob(2|2)=96.2%, où l'état 1 pour la consommation correspond au meilleur des états avec une combinaison de haut niveau de consommation et une faible variance. L'état 1 pour l'inflation est également représentatif d'un état favorable où la volatilité de l'inflation est relativement faible. Les états 2 des variables sont justement le contraire des états 1 et représente une situation plutôt précaire pour l'activité économique. De ces probabilités de transition, et avec l'algorithme développé par Kim (1994), les auteurs estiment les probabilités lissées.

Ces probabilités lissées, qui sont clés à l'étude, permettent de déterminer laquelle des quatre combinaisons d'états[12] domine pour chacune des périodes de l'étude, et ce, conditionnel à l'information cumulée des périodes précédentes. Brièvement, les résultats de ces probabilités lissées indiquent que $s_t = (2,2)$ domine significativement lors de deux récessions sur trois – ces deux récessions sont celles de 1990-91 et 2007-2009. En d'autres mots, durant ces périodes de ralentissement économique, l'état dominant estimé par la procédure est : faible niveau avec grande volatilité de la consommation et haute volatilité de l'inflation; ce qui est intuitif. Par contre, pour ce qui est de la récession de 2001, le régime dominant qui est estimé par la procédure n'est pas $s_t = (2,2)$, mais bien $s_t = (1,1)$! Annonçant donc que la récession de 2001 est accompagnée d'un bon état de consommation et d'inflation qui est digne en fait d'une expansion économique et non d'une récession.

Les auteurs expliquent que si leur modèle ne capte pas la récession de 2001, c'est en fait dû à la nature même de la récession qui est plutôt caractérisée par une diminution significative de l'investissement et non pas par une diminution rapide de la consommation. Alors, puisque la consommation est restée relativement solide en début de cette récession de 2001, et que les auteurs utilisent la consommation comme indicateur de l'activité économique, il est donc normal que les résultats d'estimation pour cette récession soient faussés.

---

[12] Les quatre combinaisons sont basées sur cette notation $s_t = (\textit{État de la consommation}, \textit{État de l'inflation})$. Alors, les quatre états sont : $s_t = (1,1)$, $s_t = (1,2)$, $s_t = (2,1)$, $s_t = (2,2)$.

Ensuite, après avoir estimé les paramètres des changements structuraux markoviens, la deuxième étape pour estimer les paramètres du modèle de *spread* de défaut, est l'extraction des paramètres d'utilité de la structure à termes du taux sans risque. Enfin, comme troisième étape, il est question de calibrer les paramètres du modèle théorique des probabilités de défaut, et ce, à l'aide des paramètres connus qui sont estimés dans les deux premières étapes.

Dans la troisième étape, cette procédure fournit des probabilités de défaut théoriques similaire à celle de Denault *et al.* (2008) qui est déjà présentée. En effet, elle est similaire dans le sens où l'on cherche à minimiser l'erreur entre les probabilités de survie théoriques et physiques. Et une fois que l'erreur est minimisée et que les paramètres sont optimisés, il s'en suit que la probabilité de défaut conditionnelle théorique peut être calculée avec ces paramètres optimisés. Mais, la procédure de Dionne et al. (2011) diffère de celle de Denault *et al.* (2008) au niveau de la définition de la probabilité de défaut. Dans le cas de Dionne et al. (2011), la probabilité de défaut conditionnelle est expliquée par des facteurs observables : la consommation et l'inflation. Or, dans le cas de Denault *et al.* (2008), la probabilité de défaut conditionnelle est sujette à des facteurs non observables. Alors, au lieu d'avoir tout simplement une fonction d'intensité qui est sujette à des facteurs latents, comme c'est le cas dans Denault *et al.* (2008); on a dans le cas de Dionne et al. (2011) une fonction d'intensité qui est plutôt expliquée par des variables observées – consommation et inflation — sous l'influence chacune d'un AR(1). Par la suite, comme dans le cas de Denault *et al.* (2008), l'intensité est mise dans une fonction exponentielle affine pour obtenir les probabilités de survie. Mais dans le cas de Dionne et al. (2011), ces probabilités de survie théoriques sont maintenant en fonction des variables de la consommation et de l'inflation, en plus d'être en fonction des paramètres obtenus par les AR(1). Plus de détails sont fournis à la section méthodologie.

Voici tout d'abord leurs résultats de l'estimation des AR(1) pour la consommation (c) et l'inflation (π).

Figure 1

	a_1^c	a_2^c	b_1^c	b_2^c	σ_1^c	σ_2^c
coefficient	0.00377	0.00068	0.38479	0.09514	0.00349	0.00549
p-value (%)	0.00	**58.02**	0.00	**61.51**	0.00	0.00

	a_1^π	a_2^π	b_1^π	b_2^π	σ_1^π	σ_2^π
coefficient	0.00246	0.00366	0.63932	0.71340	0.00235	0.00524
p-value (%)	0.01	0.26	0.00	0.00	0.00	0.00

Les résultats du AR(1) pour la consommation (exposant c) dans le régime haut niveau et faible volatilité (indice 1), montrent que la constante (a), la pente (b) et l'écart-type des résidus (σ) sont très significatifs. Par contre, ni la constante et ni la pente sont significatives dans le régime «faible niveau et haute volatilité». Du côté de l'inflation, tous les coefficients sont significatifs dans les deux régimes.

Alors, avec ces estimations des AR(1) et des paramètres du changement de régime markovien, il est possible de calibrer les paramètres qui lient la consommation et l'inflation à la probabilité de défaut. Les résultats de cette calibration du modèle de probabilité de défaut sont les suivants pour les états $s_t = (1,1)$ et $s_t = (2,2)$ et pour la cote A:

Figure 2

	$s_t = (i = 1, j = 1)$	$s_t = (i = 2, j = 2)$
$\alpha_{i,j}$	0.001038	0.002705
$\alpha_{i,j}^c$	0.001018	-0.067490
$\alpha_{i,j}^\pi$	-0.063422	-0.162663

Sachant que ce modèle de probabilité de défaut est défini ainsi : $h_{t+1} = \alpha_{i,j} + \alpha_{i,j}^c c_{t+1} + \alpha_{i,j}^\pi \pi_{t+1}$, où h_{t+1} est la probabilité de défaut conditionnelle, on voit que d'après les données, lorsque les variables sont dans un état représentatif d'une expansion économique, s_t=(i=1,j=1), la probabilité de défaut conditionnelle est positivement influencée par la

consommation — augmente lorsque la consommation augmente — et l'est négativement avec l'inflation. De nouveau, la consommation apporte des résultats qui sont contre-intuitifs. Pour ce qui est de l'inflation, son impact sur la probabilité de défaut est théoriquement ambigu (Figlewski, Frydman, & Liang, 2006). En effet, d'un côté, une hausse d'inflation agit comme un frein à l'économie – coefficient positif. Par contre, les firmes dont la dette est en terme nominal verront leur dette en terme réel diminuer avec l'augmentation de l'inflation : diminuant donc la possibilité de défaut – coefficient négatif (Figlewski, Frydman, & Liang, 2006). Donc, avec le spécimen de résultats ci-dessus, tout porte à croire que peu importe le régime dans la catégorie A, l'inflation démontre que l'aspect de la dette réelle domine l'aspect macroéconomique puisque l'augmentation de l'inflation diminue la probabilité de défaut conditionnelle. Pour ce qui est de la consommation dans l'état représentatif d'un ralentissement économique, le résultat d'un coefficient négatif est, cette fois-ci, économiquement raisonnable.

Finalement, avec les résultats du modèle de probabilité de défaut (3e étape), les auteurs ont estimé à partir de leur modèle de *spread* de défaut, la proportion du risque de défaut dans le *spread* corporatif. Voici quelques résultats

Figure 3

	$s_t = (1,1)$	$s_t = (2,2)$
	Aa	
Proportion du risque de défaut dans le *spread* corporatif (%)	9	5
	A	
Proportion du risque de défaut dans le *spread* corporatif (%)	16	8
	Baa	
Proportion du risque de défaut dans le *spread* corporatif (%)	38	28

Les données indiquent qu'avec une cote donnée, dans l'état économique précaire, s_t=(2,2), le risque de défaut influence moins le *spread* que dans l'état où l'économie est en expansion. En

d'autres mots, en période difficile le créancier corporatif est moins compensé pour le risque de défaut. Mais, l'est plus relativement pour d'autres risques qui expliquent le *spread*, telle que la liquidité probablement. Ensuite, on voit qu'avec un état donné, plus la cote de crédit se détériore plus le créancier et compensé pour le risque de défaut.

2.2.2-Contribution de l'article à cette étude

La contribution de cet article est très importante pour notre étude. D'une part, étant donné que cette étude porte sur l'estimation de la probabilité de défaut à l'aide de facteurs observables, Dionne et al. (2011) fournit la pièce manquante à la méthodologie que Denault *et al.* (2008) n'a su donner. Bref, cette étude utilisera la même procédure statistique que celle qui est commune aux deux articles – méthode d'extraction des probabilités physiques, utilisation d'une équation exponentielle affine pour en aboutir à des structures à termes théoriques, optimisation en moindres carrés non linéaire —, mais notre étude définira l'intensité – la probabilité de défaut conditionnelle — exactement comme le fait Dionne et al. (2011); où l'intensité est expliquée par deux facteurs macroéconomiques dans une relation linéaire.

Enfin, l'article de Dionne et al. (2011) permet aussi de comprendre que la consommation ne semble pas être un bon indicateur de l'activité économique. C'est ce qui a probablement causé autant de résultats contre-intuitifs dans le cadre des probabilités lissées avec la récession de 2001, les paramètres non-significatifs des AR(1) dans le régime faible niveau et haute volatilité et des coefficients positifs dans l'équation de la probabilité de défaut. Alors, de cette contribution, cette étude cherchera donc à substituer la variable consommation à une autre variable d'activité économique.

2.3.1-Credit Risk, Duffie et Singleton (2003)

L'ouvrage de Duffie et Singleton (2003) aide grandement à comprendre l'aspect statistique de Denault *et al.* (2008) et de Dionne et al. (2011). Plus spécifiquement, Duffie et Singleton (2003) expliquent en profondeur les processus affines, qui sont justement utilisés dans ces deux articles pour l'estimation des structures à termes des probabilités de survie théoriques.

D'après les deux auteurs, un processus affine peut être décrit brièvement par un processus de sauts dans lequel le vecteur de *drift*, la matrice instantanée variance-covariance

et les sauts d'intensité apportent une influence linéaire sur une variable temporelle quelconque. Ces processus affines, d'après les auteurs, sont particulièrement efficaces à l'estimation des structures à termes avec les spécifications Ornstein-Uhlenbeck et de racine carrée. Sur quoi, justement, Denault *et al.* (2008) ont travaillé. Aussi, ces processus affines prouvent être adéquats dans l'estimation des valeurs intrinsèques d'options avec entre autres la classe générale d'intensité de volatilité stochastique – qui contient les spécifications Ornstein-Uhlenbeck et de racine carrée.

Ce qui suit porte sur les trois conditions à la structure d'un processus affine. De plus, avec l'énumération de ces trois conditions il sera possible de montrer en détail les différences entre l'approche statistique de Denault *et al.* (2008) et celle de Dionne et al. (2011). Ensuite, parce qu'avec l'utilisation de facteurs observables notre étude se rapproche grandement à celle de Dionne et al. (2011), ce sera également l'occasion d'annoncer brièvement une partie de notre méthodologie.

La première condition à la structure d'un processus affine est que le vecteur X doit être un processus markovien. Mathématiquement, un processus markovien peut être écrit de cette manière :

$$E_t[g(X_{t+1})] = f(X_t), \tag{0.7}$$

où E_t veut dire l'espérance conditionnelle à l'ensemble de l'information cumulée à la période t. Alors, le processus markovien implique que la distribution conditionnelle de X_{t+1} à la période t ne dépend que de l'état de X_t. Ensuite pour que X soit effectivement un processus markovien, X doit fournir des paramètres significatifs dans l'équation de la volatilité stochastique qui suit :

$$\mathrm{dX_t} = \mu(\mathrm{X_t})\mathrm{dt} + \sigma(\mathrm{X_t})\mathrm{dB_t}, \tag{0.8}$$

où B est un mouvement standard brownien, et, μ et σ sont des paramètres sujets à des conditions techniques. Cette équation (0.8) de volatilité stochastique se retrouve sous deux spécifications dans l'article de Denault *et al.* (2008). En effet, dans le cas de Denault *et al.* (2008), cette équation est sous forme d'Ornstein-Uhlenbeck et de racine carrée. Ensuite, parce que dans l'étude de Denault *et al.* (2008) la probabilité de défaut conditionnelle n'est pas explicitement influencée par des facteurs observés, la probabilité de défaut est expliquée directement par ces deux versions de l'équation de la volatilité stochastique – d'Ornstein-Uhlenbeck et de racine carrée. Alors, X des équations (0.7) et (0.8) représente la probabilité

de défaut conditionnelle dans le cas de Denault et *al.* (2008). Du côté par contre de Dionne et al. (2011), l'équation de la volatilité stochastique est sous l'unique forme d'Ornstein-Uhlenbeck et n'explique pas directement la probabilité de défaut conditionnelle comme c'est le cas avec Denault *et al.* (2008). À la place, l'équation de la volatilité stochastique, sous forme d'Ornstein-Uhlenbeck, explique plutôt les variables explicatives de la probabilité de défaut conditionnelle – la consommation et l'inflation. Alors, dans le cas de Dionne et al. (2011), X représente soit la consommation ou l'inflation. Ensuite, Duffie et Singletton (2003) nous annoncent en fait que si les paramètres des AR(1), qui sont l'équivalent de la forme d'Ornstein-Uhlenbeck, ne sont pas significatifs, le processus n'est pas markovien. Donc, si le processus n'est pas markovien et, que de ce fait, la première condition n'est pas respectée : les résultats du processus affine seront faussés. D'où vient l'importance de changer la variable de consommation dans l'article de Dionne et al. (2011) qui annonce des paramètres non significatifs dans le AR(1).

Ensuite, la deuxième condition à la structure d'un processus affine est que la variable d'étude doit être sous forme affine ou en d'autres mots, doit être expliquée linéairement; dans le cas présent, cette variable est la probabilité de défaut conditionnelle. Dans l'article de Denault *et al.* (2008), de nouveau, la probabilité de défaut conditionnelle est effectivement linéairement expliquée par l'équation de la volatilité stochastique sous la forme d'Ornstein-Uhlenbeck ou de racine carrée. Du côté de Dionne et al. (2011), comme c'est déjà démontré plus haut, la probabilité de défaut conditionnelle est aussi linéairement expliquée par des facteurs observés : la consommation et l'inflation[13].

Finalement, la troisième condition est que la fonction de *payoff* doit être sous forme exponentielle-affine, comme ceci par exemple $\mathrm{g}(x) = e^{a+bx_T}$. En d'autres termes, cette troisième condition implique que le premier taux *forward* de la structure à termes doit être lié exponentiellement au dernier taux *forward* de cette structure à terme, donnant ainsi une allure exponentielle à la structure à terme. Duffie et Singleton (2003) indiquent que pour estimer la probabilité de <u>défaut</u> il nous faut, avant tout, estimer les structures à termes des probabilités de <u>survie</u>, car c'est avec les probabilités de survie que nous obtenons une fonction de *payoff* exponentielle. Utilisant donc les structures à termes des probabilités de *survie*, comme le font Denault et *al.* (2008) et Dionne et al. (2011) et en supposant que l'événement « défaut » suit

[13] En guise de rappel, la probabilité de défaut conditionnelle de Dionne et al. (2011) est sous cette forme linéaire (affine) : $h_{t+1} = \alpha_{i,j} + \alpha_{i,j}^{c} c_{t+1} + \alpha_{i,j}^{\pi} \pi_{t+1}$

un processus *Poisson arrival*[14] et que λ varie par période; la structure à terme qui respecte la troisième condition prend cette forme :

$$prob\ de\ survie(t,s) = e^{\int_t^s -\lambda(u)du} \qquad (0.9)$$

En détail, sachant que la structure à termes des probabilités de défaut n'est pas exponentielle comme le démontre Denault et *al.* (2008) et Duffie et Singleton (2003); utiliser directement la probabilité de défaut, $\lambda(u)$, pour obtenir une structure à termes, ne donnera donc pas une fonction de *payoff* exponentiel – le premier taux *forward* ne sera pas lié exponentiellement au dernier taux *forward*. Alors, pour remédier au problème, dans l'équation (0.9) la fonction de probabilité de défaut, $\lambda(u)$, est multipliée par -1. Ce qui implique que tous les coefficients qui expliquent la probabilité de défaut sont renversés et expliquent tout à fait le contraire. Donc, avec des coefficients renversés, $-\lambda(u)$ représente en fait la probabilité de survie. Et sachant que la structure à termes des probabilités de survie est exponentielle, on s'assure donc que la fonction de *payoff* sera aussi exponentielle. Donc, on respectera la troisième condition.

De nouveau, parce que dans Denault et *al.* (2008) et ainsi que dans Dionne et al. (2011) on suppose que l'événement « défaut » suit un processus *Poisson arrival* et que λ varie par période donnée, la troisième condition est respectée, car ils utilisent l'équation (0.9) pour obtenir leurs structures à termes des probabilités de survie.

2.3.2-Contribution de l'article à cette étude

Concernant le processus affine, l'approche de Dionne et al. (2011) respecte en général les trois conditions. Tout d'abord, leurs structures à termes sont obtenues par l'équation (0.3) et la probabilité de défaut est sous forme affine. Par contre, parce que la variable de consommation n'est pas caractérisée par un processus markovien[15] qui est pourtant l'une des trois conditions au processus affine, Duffie et Singleton (2003) viennent accentuer l'importance de changer la variable consommation par une autre variable d'activité économique.

---

[14] C'est-à-dire que la série de défauts est aléatoirement répartie dans le temps et que λ est la moyenne des événements par période donnée

[15] Leur variable «consommation » affiche des coefficients non significatifs du AR(1) dans l'état « situation précaire», et donc la distribution conditionnelle de consommation$_{t+1}$ à la période t *ne* dépend *pas* de X_t. Alors, la consommation n'est pas un processus markovien.

2.4.1-The 2001 recession and the Chicago Fed National Activity Index: Identifying Business Cycle Turning Points

Trouver un indicateur capable d'annoncer presque instantanément le début et la fin d'une récession est chose difficile, mais tout de même importante pour le bon maintient des politiques fiscales et monétaires. Le comité NBER pour sa part, se base entres autres sur quatre indicateurs d'activité économique principaux[16] pour annoncer officiellement l'arrivé et le départ d'une récession (Evans, Liu, & Pham-Kanter, 2002). Or, d'après Evans *et al.* (2002), étant donné l'utilisation de ces quatre indicateurs, le comité NBER tarde régulièrement à annoncer l'arrivé et le départ d'une récession. Alors, dans le but d'avoir une politique monétaire qui répond le plus rapidement possible aux changements de cycle économique, et donc, dans le but d'avoir une politique monétaire encore plus efficace; la Fed de Chicago se base depuis quelques années sur son propre indicateur, le *Chicago Fed National Index* (CFNAI).

Evans *et al.* (2002) nous expliquent entre autres comment cet indice, le CFNAI, est construit. Le CFNAI est en fait une moyenne pondérée de 85 indicateurs économiques qui sont représentatifs de 5 classes de l'activité économique : (i) revenu et production, (ii) marché du travail, (iii) la consommation personnelle et l'immobilier, (iv) secteur manufacturier, (v) les inventaires.

Ces 85 indicateurs sont ajustés à l'inflation et désaisonnalisés au besoin. De plus, pour s'assurer d'une stationnarité au sein des indicateurs, les variables atteintes de non-stationnarité sont transformées en taux de croissance et les *outliers* sont exclus. Enfin, ces indicateurs subissent une dernière transformation : en les normalisant, on leur donne donc une moyenne de 0 et un écart-type de 1.

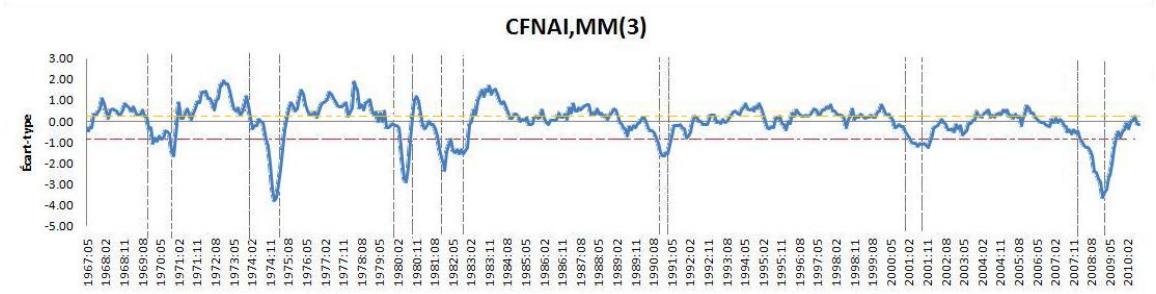
Ensuite, le poids de chacun de ces 85 indicateurs est représentatif de l'importance de l'indicateur à l'activité économique, et ces 85 poids sont ajustés aussi de sorte à fournir dans l'ensemble un CFNAI qui a une moyenne de 0 et un écart-type de 1 pour la période *in-sample*.

Le CFNAI devient donc par construction, un indexe qui lorsqu'il est différent de zéro annonce une croissance économique différente de sa moyenne. Alors, si le CFNAI est plus

[16] Masse salariale, Production industrielle, Consommation personnelle réelle nette, Ventes de manufacture et au détail.

grand que 0, la croissance de ce moment est plus grande que la croissance moyenne (potentielle), et l'inverse s'applique pour le cas où le CFNAI est inférieur à 0 : la croissance de ce moment est inférieure à la croissance moyenne (potentielle). Voici maintenant la série du CFNAI en fréquence mensuelle et sous la transformation moyenne mobile de trois mois :

Figure 4



Entre 1967 et 2010, alors qu'il était précédemment à 0, le CFNAI a franchi 8 fois le seuil de -0.70. De ces 8 fois, on retrouve les 7 récessions de cette période qui sont indiquées par les encadrés sur le graphique. Les auteurs expliquent cette seule fausse alarme, qui est en date de juillet 1989, par une politique monétaire des plus restrictives où le *federal fund's rate* était de 9.75% (Evans, Liu, & Pham-Kanter, 2002)! De plus, avec ce seuil de -0.70, l'annonce des récessions par le CFNAI s'est fait régulièrement entre 1 et 3 mois après le début de la récession. Montrant donc sa rapidité à annoncer les changements de la conjoncture. Ensuite, pour ce qui est des reprises économiques et en utilisant le seuil que proposent les auteurs qui est de +0.20, on constate que sur les 7 récessions, le CFNAI a su prédire à 5 reprises la fin d'une récession dans un délai de quelques mois après la fin de la récession. Les deux autres récessions pour lesquelles le CFNAI a tardé significativement à annoncer la reprise économique sont celles de 90-91, où le CFNAI à croisé +0.20, 32 mois après la reprise. Et 2001 où le CFNAI a croisé le seuil 24 mois plus tard. Les auteurs expliquent le retard de l'annonce de la fin de la récession 90-91 par la reprise particulièrement lente de l'économie suite à l'endettement corporatif notablement élevé (Evans, Liu, & Pham-Kanter, 2002). En fait, le retard de l'annonce de la récession de 2001 peut probablement être expliqué par la nature de cette récession, où initialement l'investissement et non la consommation, fut la cause de celle-ci.

Principalement, cet article répond à deux questions : (i) en termes de rapidité d'annonce, est-ce que le CFNAI domine significativement les indicateurs pris individuellement? (ii) Ensuite, quelle est la capacité du CFNAI à détecter le début et la fin

d'une récession avec les seuils de -0.70 et de +0.20? Puisqu'au moment de la parution de l'article il y avait eu trop peu de récessions, les auteurs proposent donc une simulation de Monte Carlos pour répondre à ces deux questions.

La simulation a été essentiellement bâtie de la sorte, tout d'abord ils ont instauré un comportement de cycle économique qui est simulé par un processus non-linéaire de *Markov-Switching*. Ce qui permet, entres autres, d'avoir des taux de croissance qui sont exogènes au modèle. De plus, ce comportement simulé respecte la moyenne des durées des récessions historiques. Ensuite, parce que le CFNAI contient 85 indicateurs, dont la consommation personnelle des biens durables par exemple, pour les simuler ils ont utilisé l'approche du «*unobserved component model*» proposé par Stock et Watson (1989). Ce modèle, dans ce contexte, propose des équations qui sont à la fois influencées par le cycle économique et ont aussi une composante idiosyncrasique qui n'est pas influencée par le cycle économique. Enfin, la simulation couvre une période de 2000 ans dans laquelle se trouvent 404 récessions.

Les résultats sont que lorsqu'on compare le CFNAI contre la production industrielle standardisée et contre la consommation personnelle standardisée; le CFNAI domine à tous les niveaux de seuils pour ce qui est de la détection des récessions. Par exemple, lorsque le CFNAI franchit le seuil de -0.70, *la probabilité qu'il y ait effectivement une récession* est de 0.72 tandis qu'avec la production industrielle standardisée et la consommation standardisée la probabilité est respectivement 0.51 et 0.35. Mais, si l'on s'intéresse par contre à *la probabilité que l'indicateur n'annonce pas la récession alors qu'il y en a une*, le CFNAI est dominé par la production industrielle pour les seuils de -0.70 à -1.0. En effet si l'on impose un seuil de -0.70, le CFNAI a 29% de probabilité de manquer une récession, alors que la production industrielle et la consommation ont respectivement 23% et 26%.

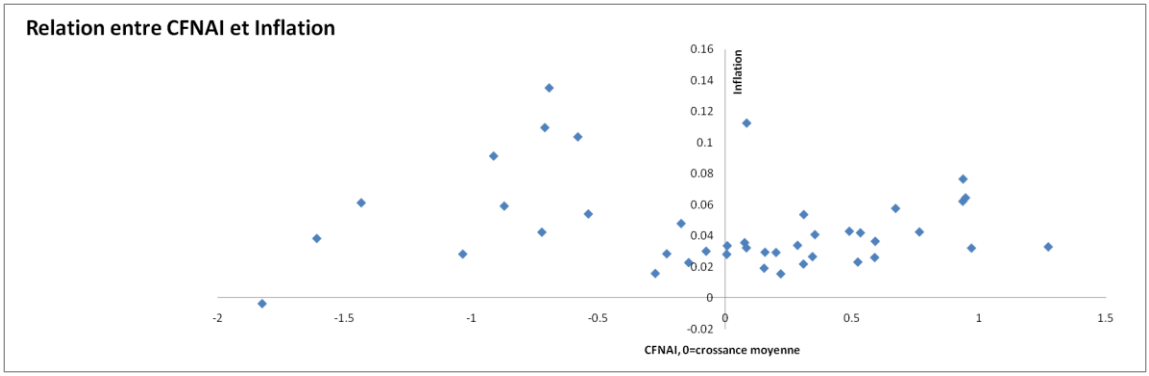
2.4.2-Contribution de l'article à cette étude

Le CFNAI représente une variable importante à notre étude, et ce, pour deux raisons. Tout d'abord, de par sa nature qui élimine les bruits spécifiques reliés aux indicateurs individuels, le CFNAI réussit en *in-sample* à détecter les récessions aussi efficacement que les principaux indicateurs de NBER; et en simulation, il performe encore mieux que ces principaux indicateurs de NBER.

En plus, étant donné le pouvoir explicatif de l'inflation sur la probabilité de défaut (Dionne *et al.*, 2011), l'inflation est une variable présélectionnée dans le cadre de notre

modèle d'estimation de probabilité de défaut. Pour sa part, le CFNAI est une variable qui non seulement ne contient pas d'indicateur d'inflation, mais aussi n'est pas corrélée à l'inflation sous une fréquence annuelle. En effet, comme en témoigne le graphique suivant, la corrélation entre le CFNAI et l'IPC sous une fréquence annuelle est de –0.124.

Figure 5



Alors, parce qu'il offre une qualité particulière dans sa détection de récessions et parce qu'il n'est pas corrélé avec l'inflation, le CFNAI est un candidat intéressant au modèle de probabilité de défaut pour représenter l'activité économique. Remplaçant donc la consommation qui n'a su détecter la récession 2001.

Chapitre 3-Modèle affine

Afin d'estimer l'impact de nos variables macroéconomiques sur la probabilité de défaut, nous utilisons ce modèle :

$$h_{t+1} = \alpha + \alpha^i i_{t+1} + \alpha^j j_{t+1} \qquad (1)$$

où «h_{t+1}» est la probabilité de défaut conditionnelle au temps t+1, «α^i» est le coefficient de la variable « i » qui est l'inflation, et «α^j» est le coefficient de la variable « j » qui pourrait être le CFNAI par exemple.

Le modèle (1) est un processus d'intensité. Un processus d'intensité est un modèle qui fournit en output une intensité ou bien un taux d'occurrence instantanée pour un intervalle donné qui est dans notre cas un taux de défaut par année (h_{t+1}), conditionnel à son information. Dans le cas de notre modèle, l'information vient des alphas et des variables explicatives (Bauwens & Hautsch, 2006). De plus, en se fiant aux intensités de défaut observées, on sait que cette intensité théorique (h_{t+1}) suit une distribution discrète, particulièrement cette intensité suit un processus de Poisson (Denault, Gauthier, & Simonato, 2008). En plus, dans notre cas, parce que nous analysons le taux de défaut conditionnel par année, nous étudions en fait le taux de défaut dans une série d'intervalles homogènes. Donc, l'intensité suit particulièrement un « processus Poisson homogène » (Bauwens & Hautsch, 2006). Ainsi, on suppose que le nombre espéré de défauts est égal à sa variance qui est égale à λt :

$$E[Défauts] = V[Défauts] = \lambda t$$

où « t » est l'intervalle homogène qui est dans cette étude un an. De plus, dans le cas du processus homogène Poisson, le calcul de la probabilité ne change que très peu du cas de la distribution Poisson. En effet, en instaurant l'aspect temporel, ce calcul devient (Martinez & Martinez, 2008):

$$Prob\{N(t+s) - N(s) = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

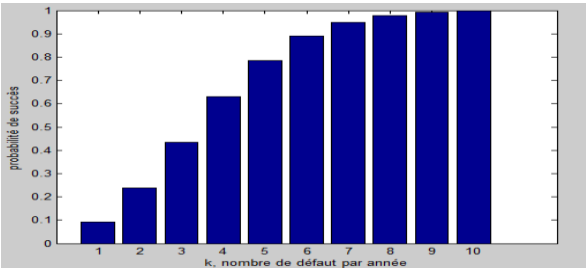
où on s'intéresse à la probabilité que la différence entre le (i) nombre de défauts à une date donnée, s, plus un intervalle donné, t, moins le (ii) nombre de défauts à la date initiale s, puisse égaler à (iii) k qui peut varier de 0 à l'infinie (dans le cas des défauts qui est un

événement plutôt rare, avec un k moindrement élevé, cela mènera à une probabilité marginale qui tendra rapidement vers zéro). Cette probabilité est égale au nombre exponentiel à la puissance de la moyenne multiplié par -1, qui donne $-\lambda t$. Ensuite cet élément est multiplié par la moyenne à la puissance k sur k factoriel. À titre d'exemple, supposons qu'il y a, en moyenne, 4 défauts ($\lambda = 4$) par année (t = 1) dans la classe Baa. Et nous nous demandons quelle est la probabilité qu'il y ait au plus 5 défauts au courant de l'année prochaine dans la classe Baa. Dans ce cas, le calcul est ceci :

$$P\{N(1) \leq 5\} = e^{-4} + e^{-4} * \frac{4^1}{1!} + e^{-4} * \frac{4^2}{2!} + \ldots + e^{-4} * \frac{4^5}{5!} = 78.51\%$$

Ce qui suit, est une illustration du comportement de la distribution cumulative du processus homogène Poisson pour k = 1, ..., 10. Ce qui répond donc à la question : qu'elle est la probabilité qu'il y ait au plus k défauts pour l'année prochaine dans la catégorie Baa alors que la moyenne est de 4 défauts?

<u>Figure 6</u>



De plus, il est à noter que le processus homogène Poisson implique aussi que le nombre de défauts dans un intervalle donné n'a aucun impact sur le nombre de défauts de l'intervalle suivant (Martinez & Martinez, 2008).

Maintenant que le comportement de la probabilité de défaut conditionnelle (h_{t+l}) a été présentée, l'attention tourne donc au côté droit de l'équation (1). Du côté explicatif de l'intensité, on suppose que les variables indépendantes sont caractérisées par des autorégressifs d'ordre 1 (AR(1)), comme suit :

$$i_t = a^i + b^i i_{t-1} + \varepsilon_t^i$$

et

$$j_t = a^j + b^j j_{t-1} + \varepsilon_t^j,$$

où ε_t^i et ε_t^j sont i.i.d et ont une espérance de 0 avec écart-type de σ^i et σ^j et covariance de $\rho\sigma^i\sigma^j$. Alors, à ce moment, il sera question de tester la stationnarité sur l'ensemble de nos variables indépendantes à l'aide du test de Dickey-Fuller. Toute variable qui démontre de la non-stationnarité sera exclue de l'étude. Ce choix sur l'imposition d'un processus AR(1) sur nos variables explicatives n'est pas aléatoire. En effet, imposer un AR(1) sur nos variables qui expliquent linéairement une intensité, nous permet en fait d'exploiter un modèle très connu dans la littérature des processus d'intensité. Cette intensité qui est fonction linéaire de processus AR(1), est en d'autres mots, une intensité qui est linéairement expliquée par un processus Ornstein–Uhlenbeck (O-U) (Denault, Gauthie, & Simonato, 2008). En d'autres termes, dans le cadre d'un processus d'intensité linéaire, les AR(1) sont synonymes à « processus O-U ». Nous avons choisi un processus O-U parce que nous estimons nos structures de probabilités de survie à l'aide d'un modèle exponentiel affine qui doit incorporer un processus de volatilité stochastique qui dans notre cas est représenté par un O-U (Duffie & Singleton, 2003). En détail, un modèle exponentiel affine est un modèle qui fournit un output quelconque d'un input sous forme de fonction exponentielle linéaire de l'intensité. Dans notre cas notre modèle exponentiel affine est sous cette forme $Prob(suvie) = e^{-h_u}$. Plus de détails suivront. Jusqu'à maintenant dans ce passage, il a été question de la justification des processus AR(1) ou O-U sur les variables explicatives du modèle d'intensité, pour ce qui est de la représentation mathématique et de l'utilisation du modèle exponentiel affine, elles seront par contre présentées dans la section méthodologie.

En rappelant le modèle d'intensité ou de probabilité de défaut conditionnelle que voici :

$$h_{t+1} = \alpha + \alpha^i i_{t+1} + \alpha^j j_{t+1} \qquad (1)$$

nos inconnues sont les coefficients α, α^i et α^j et h_{t+1}. De façon brève, ils seront estimés de cette manière : avec le modèle exponentiel affine, qui en input contiendra h_t et donc indirectement α, α^i et α^j; et en output, on obtiendra une fonction de structure à termes *théorique* des probabilités de survie pour chaque année[17]. Avec la structure à termes des probabilités de survie *physiques*, il suffira de minimiser l'erreur entre les structures à termes des probabilités de survie *théoriques* et *physiques* en manipulant α, α^i et α^j pour ainsi obtenir α^*, $\alpha^{i,*}$, $\alpha^{j,*}$ et h_{t+1}^* (Dionne *et al*., 2011). Les détails suivent à la prochaine section.

[17] Donc, si on couvre 30 ans dans notre étude et obtient à chaque année une nouvelle structure à termes de un an à 20 ans, on a donc 30*20 probabilités de survie par cote de crédit.

3.1-Méthodologie

L'ensemble de la méthodologie suivra une ligne directrice, qui est par rapport à l'estimation des paramètres « α » du processus d'intensité. En d'autres termes, la méthodologie portera sur l'estimation de l'impact des variables explicatives, comme le CFNAI et l'inflation, sur la probabilité de défaut. La méthodologie se divisera en trois parties : (i) la présentation de notre modèle *théorique* de structure à termes des probabilités de survie. Ensuite, (ii) il sera question de présenter notre façon de récolter la structure à termes de probabilités de survie *empiriques*. Finalement, (iii) en but d'obtenir les α^*, nous présenterons l'équation de la minimisation de l'erreur entre la structure à termes empirique et théorique qui conclura cette section Méthodologie.

3.1.1-Modèle théorique

Notre mission, dans la construction du modèle théorique, est d'avoir une formule analytique qui aura comme paramètres inconnus les α et en output la structure à termes des probabilités de survie. Mais, pour obtenir cette formule analytique, nous avons besoin de formuler un modèle exponentiel affine qui aura également les α en input et la structure à terme en output (Denault, Gauthier, & Simonato, 2008). Alors, pour l'instant il est question d'imbriquer tout simplement le processus d'intensité (1) dans une définition de structure à termes des probabilités de survie, qui deviendra graduellement, avec des manipulations mathématiques, un modèle exponentiel affine qui sera donc en mesure d'estimer les « α ». Voici tout d'abord la définition mathématique de la structure à termes des probabilités de survie en fonction de h_{t+1} (Dionne G. , Gauthier, Hammami, Maurice, & Simonato, Mai 2011):

$$Prob[\tau > t + n \mid \tau > t] = E_t\left[\prod_{u=t+1}^{t+n}(1 - h_u)\right] \qquad (2)$$

Cette définition de structure à termes des probabilités de survie[18] veut donc dire que le titre n'a pas fait défaut à la période initiale (qui est représenté par : $\tau > t$ où « τ » est la date du

[18] Structure à termes des probabilités de survie : en gardant une date fixe, par exemple 1987, on obtient, d'un titre quelconque, les probabilités de survie anticipées de 1988, 1989, 1990,…, n.

défaut et « t » est la date du début). La probabilité que le titre survive encore pour « n » années (qui est représenté par : $\tau > t$ + n) est égale à la partie droite de la définition. Cette partie droite nous dit que la probabilité de survie pour « n » années de plus que « t », équivaut à l'espérance conditionnelle de la multiplication des probabilités de survie ($1 - h_u$) correspondante à chacune des années entre « t » et « n ». Par exemple, si on s'intéresse à la probabilité de survie d'un titre donné en fin 2013, alors qu'on est actuellement en fin 2010, notre n = 3, on s'intéresse à :

$$Prob[\tau > 2010 + 3 \mid \tau > 2010] = E_{2010}\left[\prod_{u=2010+1}^{2010+3} (1 - h_u)\right]$$

$$<=> Prob[\tau > 2010 + 3 \mid \tau > 2010] = E_{2010}[(1 - h_{2011}) * (1 - h_{2012}) * (1 - h_{2013})]$$

qui est en fait, l'espérance conditionnelle de la probabilité de survie de 2011 sachant qu'il n'y a pas eu de défaut en 2010 multipliée par la probabilité de survie de 2012 sachant qu'il n'y a pas eu de défaut en 2011 et multipliée par la probabilité de survie de 2013 sachant qu'il n'y a pas eu de défaut en 2012.

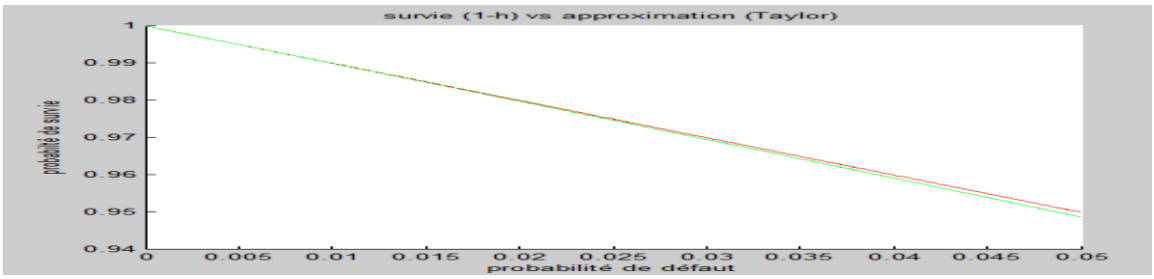
Jusqu'à maintenant, on a un modèle (2) où « h_u » et ses *« α »* influencent l'output de la structure à termes des probabilités de survie. Par contre, étant donné que ce modèle n'est pas sous forme exponentielle affine, et donc, nous empêche d'obtenir une formule analytique qui aidera à l'estimation des α^* du processus d'intensité, il est alors nécessaire de le manipuler de sorte à obtenir ce modèle sous la forme désirée.

La prochaine étape est donc de trouver une structure exponentielle qui estime ce modèle 2. Ceci est fait à partir d'une approximation de Taylor (Dionne G. , Gauthier, Hammami, Maurice, & Simonato, Mai 2011). En effet, ($1 - h_u$) peut être approximé par une série de Taylor pour de petits « h_u » (ce qui tombe bien, car la probabilité de défaut est historiquement faible) comme ceci :

$$(1 - h_u) \approx 1 + \frac{-h_u}{1!} + \frac{-{h_u}^2}{2!} + \frac{-{h_u}^3}{3!} + \cdots \qquad (3)$$

Pour nous en convaincre, voici un graphique démontrant l'évolution des deux séries en fonction d'une probabilité de défaut variante (h_u):

Figure7



On remarque en effet que l'estimation Taylor de la probabilité de survie (courbe du bas) colle très bien à la probabilité de survie (courbe du haut) lorsque la probabilité de défaut est maintenue dans une borne plutôt réaliste. De cela, on se rapproche du but qui est d'avoir une forme exponentielle. Car, sachant qu'une expansion Taylor est approximée par e^x où dans notre cas $x = -h_u$, qui est représenté comme ceci :

$$\boldsymbol{e^{-h_u}} \approx 1 + \frac{-(h_u)}{1!} + \frac{-({h_u}^2)}{2!} + \frac{-({h_u}^3)}{3!} + \cdots \qquad (4)$$

alors qu'on avait cette approximation :

$$(\mathbf{1} - \boldsymbol{h_u}) \approx 1 + \frac{-(h_u)}{1!} + \frac{-({h_u}^2)}{2!} + \frac{-({h_u}^3)}{3!} + \cdots \qquad (3)$$

On obtient donc une nouvelle approximation de $(1 - h_u)$ qui est e^{-h_u} et qui tout d'un coup devient grandement utile à la construction d'un modèle exponentiel affine.

Alors, en appliquant cette approximation $(1 - h_u) \approx e^{-h_u}$, on peut maintenant obtenir un modèle qui a une structure exponentielle où la probabilité de défaut (h_u) explique exponentiellement et linéairement (exponentiel-affine) l'output qui est la structure à termes des probabilités de survie. Mathématiquement (Dionne G. , Gauthier, Hammami, Maurice, & Simonato, 2011):

$$Prob[\tau > t + n \mid \tau > t] = E_t\left[\prod_{u=t+1}^{t+n} (1 - h_u)\right], \qquad (2)$$

avec $(1 - h_u) \approx e^{-h_u}$,

$$Prob[\tau > t + n \mid \tau > t] \approx E_t\left[e^{-\sum_{u=t+1}^{t+n}(h_u)}\right] \qquad (5)$$

En rappelant le processus d'intensité, formule (1), on obtient l'équivalent,

$$Prob[\tau > t + n \mid \tau > t] \approx E_t\left[\mathrm{e}^{\{-\sum_{u=t+1}^{t+n}(\alpha + \alpha^i i_u + \alpha^j j_u)\}}\right] \qquad (6)$$

Ce modèle exponentiel affine, qui fourni une structure à termes des probabilités de survie théoriques, permet d'obtenir une forme analytique sans opérateur d'espérance et qui devient donc partie intégrante à l'estimation des « α^*». En effet de façon récursive, (6) peut être transformée en forme analytique suivante. Pour la démarche, vous référez à Dionne *et al.* (2011).

$$q\left(t, n, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha^i}, \boldsymbol{\alpha^j}, a^i, a^j, b^i, b^j, \sigma^i, \sigma^j\right) = \exp\left(-A_n^q - B_n^{q,i} i_t - B_n^{q,j} j_t\right), \quad (7)$$

où, plus précisément, $q\left(t, n, \alpha, \alpha^i, \alpha^j, a^i, a^j, b^i, b^j, \sigma^i, \sigma^j\right)$ est la probabilité de survie *forward* d'une année à « n » années de l'année « t », et ce, en fonction des paramètres encore inconnus —les α— venant du modèle d'intensité; et des paramètres connus —les a, b, et σ— venant des modèles O-U ou AR(1). Par exemple, $q(1988, 4, \ldots)$ est la probabilité que le titre ne fasse pas défaut en 1992 alors qu'on est en 1988. Alors, de cette manière on peut obtenir une structure à termes des probabilités de survie pour 1988 en appliquant ceci : $q(1988, 0 \text{ à } N, \ldots)$ où N est la probabilité *forward* maximale qui nous intéresse. Ensuite, A_n^q est la constante et $B_n^{q,i}$ et $B_n^{q,j}$ représentent respectivement l'impact de la variation de la variable « i » et « j » sur la probabilité de survie *forward* à n années. De Dionne *et al.*(2011), on apprend que :

- $A_n^q = G_{n-1}^A$
- $B_n^{q,i} = b^i(\alpha^i + B_{n-1}^{q,i})$
- $B_n^{q,j} = b^j(\alpha^j + B_{n-1}^{q,j})$

où $G_{n-1}^A = A_{n-1}^q + \alpha + a^i\left(\alpha^i + B_{n-1}^{q,i}\right) + a^j\left(\alpha^j + B_{n-1}^{q,j}\right) - \frac{1}{2}\left(\alpha^i + B_{n-1}^{q,i}\right)^2\left(\sigma^i\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\alpha^j + B_{n-1}^{q,j}\right)^2\left(\sigma^j\right)^2 - (\alpha^i + B_{n-1}^{q,i})(\alpha^j + B_{n-1}^{q,j})\rho\sigma^i\sigma^j,$

et sachant que, $A_0^q = B_0^{q,i} = B_0^{q,j} = 0$

Maintenant, avec la formule analytique (7), nous avons un outil qui permettra d'estimer les « α^*». Cette estimation en détail sera de cette nature : après avoir associé des

valeurs aux paramètres a, b, et σ, et ce grâce aux AR(1), la valeur de $q(t, n, \alpha, \alpha^i, \alpha^j,\ a^i,\ a^j, b^i, b^j, \sigma^i, \sigma^j)$ ne dépendra à ce stade que des « α ». Alors, l'estimation des « α^* » serait faite en variant suffisamment « α » de sorte à minimiser l'erreur entre la structure à termes des probabilités de survie *théoriques* et *empiriques*, et ce, tout en respectant la contrainte $0 \leq h_{t+1}(\alpha, \alpha^i, \alpha^j) \leq 1$. Ensuite, parce que la probabilité de défaut conditionnelle d'une période est égale aussi à un moins la probabilité de survie *forward* d'un an, qui mathématiquement est représenté ainsi, $\mathrm{h}^*_{t+1} = 1 - q^*(t, 1, \alpha^*, \alpha^{i,*}, \alpha^{j,*}, \ldots)$, on sait que si « q » est optimisée par *« α^* »*, nécessairement « h » est aussi optimisé. Intuitivement, si la probabilité de survie (q) est sous-estimée ou sur estimée parce qu'on a associé de mauvaises valeurs aux « α », alors, nécessairement, la probabilité de défaut (h) sera respectivement sur estimée et sous-estimée. Par contre, si la probabilité de survie est bien estimée grâce à de bonnes valeurs associées aux « α », la probabilité de défaut doit être bien estimée aussi. Donc, c'est pour cela que les *« α^* »* seront directement placés dans le processus d'intensité (modèle 1), car sachant que les *« α^* »* minimisent l'erreur entre les probabilités de survie théoriques et empiriques, c'est de dire aussi que les *« α^* »* minimisent l'erreur entre la probabilité de défaut théorique (h_{t+1}) et empirique. Donc, avec les variables indépendantes « i » et « j », les *« α^* »* sont les meilleurs estimateurs pour h_{t+1} (Dionne G. , Gauthier, Hammami, Maurice, & Simonato, 2011).

3.1.2-Structures à termes des probabilités de survie empirique

Pour rendre la minimisation possible, il nous faut maintenant obtenir des structures à termes de probabilités de survie empiriques ou physiques.

Pour s'y prendre, on pourrait simplement se contenter des structures à termes des probabilités de survie trouvées sur les sites d'agences de notation telle que Moody's. Ensuite, en fonction des α, on aurait qu'à minimiser l'erreur de nos structures à termes théoriques aux structures à termes de Moody's. Or, bien que ces structures à termes empiriques soient simples à obtenir et libres de toutes structures imposées (Dionne *et al*., 2010), ces structures à termes empiriques sont caractérisées par d'importantes lacunes (Lando & Skødeberg, 2002). De cette méthode, on forme une cohorte à une date précise et on compte simplement le nombre de défauts à l'intérieur d'un intervalle donné. L'ensemble des lacunes est énuméré par Lando & Skødeberg (2002). Sans toutes les mentionner, une parmi celles-ci doit être particulièrement abordée dans cette étude.

En employant la méthode cohorte pour extraire les probabilités de migration de crédit[19], qui se calculent ainsi (Lando & Skødeberg, 2002):

$$p_{ij} = \frac{N_{ij}}{Ni} \qquad (8)$$

où N_{ij} $est\ le\ nombre\ de\ titres\ qui\ a\ migrés\ de\ i$ à j à $la\ fin\ de\ l'intervalle\ donn$é

N_i $est\ le\ nombre\ de\ titres\ cottés\ i\ au\ début\ de\ l'intervalle$

comme le fait Moody's par exemple, on impose de cette manière un temps discret aux données. C'est-à-dire qu'on suppose que les migrations arrivent toutes en même temps et, puisqu'on se limite à un point dans le temps –la fin de l'année par exemple– lorsqu'un titre migre, aucune autre possibilité de migration ne lui est associée durant le reste de l'année (Lando & Skødeberg, 2002). Cette approche en temps discret peut s'avérer particulièrement grave dans l'estimation des événements rares comme c'est dans le cas de l'estimation des probabilités de migration (Lando & Skødeberg, 2002). Car, la méthode discrète ou cohorte échoue à transmettre une estimation de probabilité aux événements particulièrement rares comme par exemple la migration d'une Aaa à défaut, qui se traduit par un zéro. Ce zéro, ne veut pas dire « zéro de probabilité », mais bien une simple fréquence ou une absence d'estimation (Dionne G. , Gauthier, Hammami, Maurice, & Simonato, 2010). Par exemple, supposons qu'en 1999 il n'y a eu aucune migration de la cote Aaa à Défaut. Mais, il y a eu 1 titre Aaa qui a migré en juillet à Ba. En plus, au mois de mai, 2 titres Ba ont migré à Défaut. Ce que la méthode en temps discret ou cohorte va annoncer comme estimation de la probabilité de migration est (i) une probabilité plus grande que zéro pour une migration de Aaa à Ba ($p_{Aaa,\ Ba}$) et (ii) une probabilité plus grande que zéro pour la migration de Ba à Défaut ($p_{Ba,\ Défaut}$). Mais, elle placera un zéro pour la migration de Aaa à Défaut ($p_{Aaa,\ Défaut}$), car, elle ne considère pas les migrations successives des mêmes titres, donc elle omet la possibilité que la Aaa qui a migré à Ba puisse continuer à migrer dans le courant de l'année vers Défaut. En plus d'être inefficace dans le calcul des événements particulièrement rares, les zéros qui découlent de cette approche agrandissent artificiellement les écarts-types du comportement de la migration (Christen, Hansen, & Lando, 2004).

[19]Probabilités de migration de crédit : nous donne les probabilités qu'un titre d'une cote de crédit i migre à une autre cote de crédit différente de i (qui inclut la cote «défaut» et donc indirectement la probabilité de survie).

Pour répondre à ces problèmes de la méthode cohorte, nous utiliserons la méthode en temps continu. Cette fois-ci, cette méthode en temps continu ne se limite pas à un point dans le temps, mais se base plutôt sur l'ensemble de l'intervalle pour estimer les probabilités de migration. Permettant donc de considérer les migrations successives d'un titre par exemple. Donc, à partir de cette méthode, et en se référant à l'exemple du paragraphe précédent, la probabilité qu'une Aaa fasse défaut ($p_{Aaa,\ Défaut}$) existe et est plus grande que zéro. La raison est qu'avec cette approche en temps continu, nous considérons la possibilité qu'une fois que le titre Aaa a migré à Ba, que ce titre puisse encore migrer dans la même année et même migrer jusqu'à Défaut, car il est possible pour un titre Ba de migrer à Défaut.

La procédure pour obtenir la structure à termes des probabilités de migrations en temps continu est la suivante. Parce que nous sommes dans le cadre d'intervalles homogènes, et ce, étant donné notre étude sur la structure à termes de la probabilité de survie, le calcul de la matrice de transition en temps continue est égale à (Lando & Skødeberg, 2002):

$$P(t) = e^{\Lambda * t} \ , \qquad (9)$$

où $P(t)$ est la matrice de transition en temps continu *forward* pour t années. Par exemple, étant en 1994, $P(2)$ est la matrice de transition en temps continue qui couvrira 1995. Ensuite, étant donné que $P(t)$ inclut aussi la probabilité de migrer à Défaut pour toutes les cotes, on peut donc trouver avec $P(2)$, la probabilité de survie *forward* de 1995 pour toutes les cotes (probabilité de survie= 1-probabilité de défaut). Donc, pour obtenir une structure à terme des probabilités de survie de 20 périodes, on a besoin de $P(t = 1, \dots, 20)$ qui donnera entre autres 20 probabilités de survie *forward* pour chaque année de l'étude. Pour ce qui est du côté droit de (9), on a l'exponentielle de la matrice de $\Lambda * t$. La matrice Λ qui est K x K, où K est l'ensemble des cotes de crédit, est associée aux matrices de transition fournissant donc des données de générateurs. Ses éléments sont calculés ainsi (Lando & Skødeberg, 2002):

$$\lambda_{ij} = \frac{N_{ij}(T)}{\int_o^t Y_i\,(s)ds} \quad et \quad \lambda_{ii} = -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}, \qquad (10)$$

où $N_{ij}(T)$ est le nombre total de transitions entre i et j dans l'intervalle donné et où $Y_i(s)$ est le nombre de titres cotés i au temps s. Ensuite, on a que chaque élément diagonal de la matrice Λ est égal à moins la somme de tous les autres éléments de la même ligne.

Maintenant, pour se familiariser avec ce concept de matrice de transition en temps continu ($P(t)$), et pour identifier sa puissance à estimer les événements particulièrement rares, Lando & Skødeberg (2002) fournissent un exemple relativement simple qui compare cette méthode en temps continu contre la méthode cohorte ou en temps discret.

Supposons qu'il y a seulement 3 cotes de crédit : A, B, D pour défaut. Durant l'année, il y avait 20 titres au total. Au mois de janvier 10 étaient cotés A et les 10 autres étaient cotés B. Un mois plus tard, un titre coté A a migré à B. Le mois suivant, un titre B a migré à A. Finalement, 4 mois plus tard, un titre coté B fait défaut. Bref, voici sous forme de tableau, l'évolution du nombre de titres par cote durant cette année :

	A	B	D
janvier	10	10	0
février	9	11	0
mars	10	10	0
avril	10	10	0
mai	10	10	0
juin	10	9	1
juillet	10	9	1
août	10	9	1
septembre	10	9	1
octobre	10	9	1
novembre	10	9	1
décembre	10	9	1

Alors, dans la construction de la matrice Λ à l'aide de la formule (10),

$$\lambda_{A,B} = \frac{N_{A,B}(1)}{\int_o^1 Y_A\,(s)ds} = \frac{1}{10 * {}^1/_{12} + 9 * {}^1/_{12} + 10 * {}^{10}/_{12}} = 0.10084$$

$$\lambda_{B,A} = \frac{N_{B,A}(1)}{\int_o^1 Y_B\,(s)ds} = \frac{1}{10 * {}^1/_{12} + 11 * {}^1/_{12} + 10 * {}^3/_{12} + 9 * {}^7/_{12}} = 0.1052$$

$$\lambda_{B,D} = \frac{N_{B,D}(1)}{\int_o^1 Y_B\,(s)ds} = \frac{1}{10 * {}^1/_{12} + 11 * {}^1/_{12} + 10 * {}^3/_{12} + 9 * {}^7/_{12}} = 0.1052$$

Ce qui donne :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} -0.10084 & 0.10084 & 0 \\ 0.1052 & -0.21052 & 0.1052 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, en utilisant $P(t) = e^{\Lambda * t}$ on obtient la matrice de transition en temps continu,

$$(1) = \begin{pmatrix} 0.9087 & 0.0865 & \mathbf{0.0048} \\ 0.0902 & 0.8146 & \mathbf{0.0950} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Parce que dans cette matrice de transition en temps continu les lignes sont les cotes initiales (A, B, D) et les colonnes sont les migrations possibles (A, B, D), on voit entre autres que même si aucune obligation A n'a pas fait défaut durant l'année, il y a tout de même une probabilité de migration vers le défaut (*0.0048*). En d'autres termes, la probabilité de survie après un an d'un titre coté A durant cette année n'est pas égale à 1, mais elle égale à 1-0.0048 = 0.9952. De nouveau, la raison est qu'en temps continu, nous considérons la possibilité de migrations successives et donc dans ce cas, nous considérons entres autres la possibilité que le titre A qui a migré à B, un titre beaucoup plus sujet à faire défaut, puisse migrer de nouveau, mais, cette fois-ci vers Défaut. Rapidement, si on se tourne à l'estimation cohorte de ce scénario, on obtiendrait la matrice de migration que voici :

$$P(1) = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.10 & \mathbf{0} \\ 0.10 & 0.80 & \mathbf{0.10} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

où les probabilités de défaut et donc les probabilités de survie sont notablement différentes qu'avec la méthode en temps continu.

Pour conclure cette section sur la structure à termes des probabilités de survie empiriques, nous choisissons la méthode en temps continu, car elle est efficace pour calculer les événements rares et avec cette absence de zéros, cela donne des estimations d'écarts-types raisonnables. Pour obtenir $P(t)$ en temps continu, nous utilisons les données de Moody's Corporate Bond Default Database qui donne les données pour calculer les λ_{ij}, pour ensuite obtenir la matrice Λ dans son ensemble pour une année donnée. Ensuite, on sera en mesure de calculer $P(t = 1, .., T) = e^{\Lambda * (t=1,\ldots,T)}$, nos T matrices de transition, qui nous donneront pour chaque cote de crédit : T probabilités de défaut et donc T probabilités de survie qui formeront la structure à terme pour une année comme 1997 par exemple. Donc, $P(t = 1, \ldots, T)$ sera calculé pour chacune des années de notre étude, 1970 à 2009. Puisqu'on s'intéresse à une structure à terme de 20 ans : on aura 20*(2009-1970+1) = 800 matrices de transition, $P(t)$. Finalement, de ces 800 P(t), on aura pour chaque cote de crédit, 800 probabilités de survie *empiriques* qu'on tentera de mimer avec nos 800 probabilités de survie *théoriques* de la même cote en minimisant l'erreur en fonction des α.

3.1.3-Fonction de la somme des erreurs aux carrées

Finalement, après avoir bâti le modèle théorique de la structure à termes des probabilités de survie et collecté les structures à termes des probabilités de survie empiriques, la dernière étape de la méthodologie est d'employer une fonction qui minimise les erreurs entre ces structures à termes empiriques et théoriques. Voici tout d'abord la fonction de la somme des erreurs au carré qui sera utilisée en ce but (Dionne G. , Gauthier, Hammami, Maurice, & Simonato, 2011).

$$\min R(\alpha) = \frac{1}{20}\sum_{n=1}^{40}\sum_{t=1}^{20}\left[q^{emp}(t,n) - q^{théo}(t,n,\alpha,\dots)\right]^2 \quad s.a.\, 0 \leq h_{t+1}(\alpha,\alpha^i,\alpha^j) \leq 1 \qquad (11)$$

Tout d'abord, sachant qu'à l'aide des AR(1) nous connaissons déjà les valeurs aux paramètres « a », « b » et « σ », cela fait qu'en associant des valeurs aux « α » nous obtenons la dernière pièce du puzzle pour en aboutir à une valeur pour $q^{théo}\left(t,n,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha^i},\boldsymbol{\alpha^j},\ a^i,\ a^j,b^i,b^j,\sigma^i,\sigma^j\right)$. Alors, en accordant des valeurs aux «α», de la formule (11), nous avons par cote, la différence entre les probabilités de survie empiriques *forward* à la t^{ième} période de l'année n, qui est ($q^{emp}(t,n)$) et théorique $q^{théo}(t,n,\hat{\alpha},\dots)$). Ensuite, cette différence est mise au carré pour pénaliser davantage les erreurs importantes et pour s'assurer à chaque fois d'une valeur positive.

Par exemple, avec des valeurs associées aux « α », on aura la différence au carré entre (i) la probabilité empirique de survie *forward* de 1 an de l'année 1982 ($q^{emp}(1,1982)$) et (ii) la probabilité théorique de survie *forward* de 1 an de l'année 1982 ($q^{théo}(1{,}1982,\hat{\alpha},\dots)$). Ensuite, en gardant l'année 1982 par exemple, en poursuit l'extraction des erreurs pour le reste des 19 autres années *forward*s de la structure à termes pour l'année 1982. De cela, on obtient 20 erreurs qui correspondent à chacune des 20 années forward de la structure à termes de 1982. Alors, en sommant la valeur de ces 20 erreurs on obtient une valeur totale des erreurs pour la structure à termes de 1982. Finalement, parce que nous couvrons 40 années (de 1970 à 2009), nous obtenons 40 sommes d'erreurs qui correspondent aux 40 structures à termes des probabilités de survie. Ensuite, nous additionnons ces 40

sommes d'erreurs pour ainsi obtenir en fin de compte une seule valeur qui exprime l'ensemble de l'erreur qui est $R(\alpha)$.

Donc, le but est de trouver les valeurs optimales des « α » qui minimiseront la somme totale des erreurs, donc qui minimiseront $R(\alpha)$ sujette à la contrainte $0 \leq h_{t+1}(\alpha, \alpha^i, \alpha^j) \leq 1$. De cette manière, les probabilités de survie théorique par cote mimeront le mieux possible les probabilités de survie observées, et donc inversement, toujours grâce aux α^*, les probabilités de défaut théorique minimiseront l'erreur contre les probabilités de défaut observées. Donc, ces α^* seront directement mis dans le modèle (1).

Pour terminer cette partie de la méthodologie, en annexe 2, se trouvent les séries des données que nous utiliserons comme variables indépendantes dans le modèle (1). Qui aussi seront étudiées dans un processus AR(1) qui estimera les paramètres « a », « b » et « σ » pour obtenir $q^{théo}\left(t, n, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha^i}, \boldsymbol{\alpha^j}, a^i, a^j, b^i, b^j, \sigma^i, \sigma^j\right)$. En plus dans le tableau qui suit, vous-y trouverez les moyennes et écart-types de ces variables :

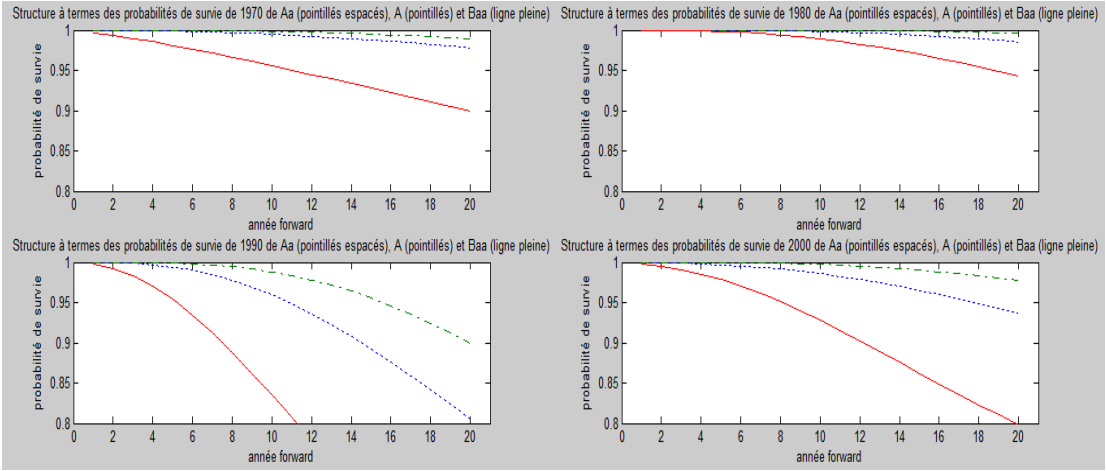
Figure 8

Variables indépendantes du processus d'intensité (modèle 1)		
	Moyenne	Écart-type
Federal Fund Effective Rate -- tx de croissance	0,0069	0,4165
PIB-- tx de croissance	0,0693	0,0307
3-month term spread (10ans-3mois) -- à niveau	0,9378	1,6559
S&P500 -- tx de croissance	0,0061	0,0448
Demandes initiales d'assurances chômage-- tx de croissance	0,0318	0,1931
Heures en manufactures-- tx de croissance	-0,0104	0,0362
Masse salariale-- tx de croissance	0,0584	0,0358
Nombre d'employés-- tx de croissance	0,0158	0,0194
CFNAI-- tx de croissance	0,2415	4,8528
Consommation -- tx de croissance	0,0745	0,0301
Consommation, partie du CFNAI-- tx de croissance	0,3366	7,0611
Inflation-- tx de croissance	0,0434	0,0311

Il est à noter que chacune des combinaisons de variables indépendantes donnera à la base des valeurs uniques aux « a », « b » et « σ » et donc des valeurs uniques aux *« α^* »*. Donc, chacune des combinaisons fournira un comportement distinct aux $q^{théo}(t, n, \alpha, \ldots)$. Alors, chacune des combinaisons offrira une valeur différente aux erreurs entre la structure à termes théorique et empirique. De ce fait, en comparant ces différentes erreurs, on sera en mesure de répondre à nos questions qui traitent du niveau explicatif de la consommation et des indices de variables macroéconomiques comme le CFNAI dans le cadre de la probabilité de défaut.

Mise à part les variables indépendantes, voici maintenant une sélection des structures à termes des probabilités de survie en temps continu estimées par (9). La sélection suivante est la structure à terme des probabilités de survie des cotes A, B et Caa pour les années 1970, 1980, 1990 et 2000.

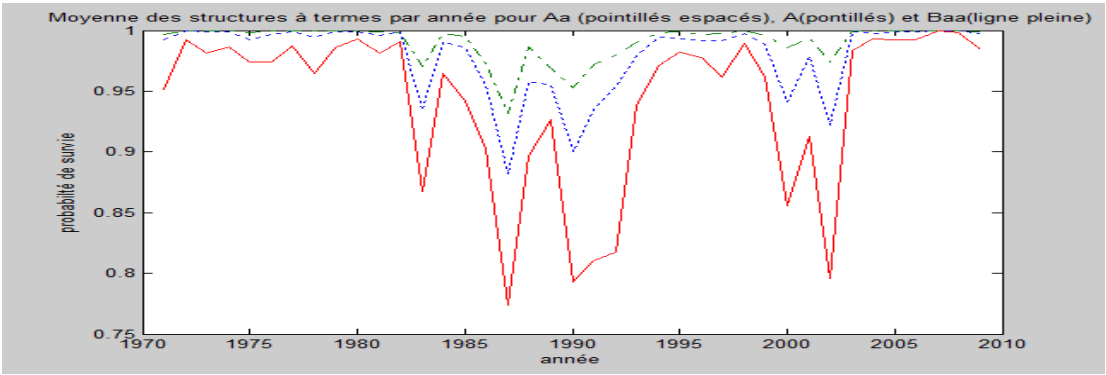
Figure 9



On voit que, peu importe la cote, plus le temps passe, plus il a de chance que la firme fasse défaut, ou moins il y a de chance que le titre survive. Ensuite, sans surprise, plus la cote est faible plus il y a de risque que le titre ou la firme fasse défaut. Finalement, on peut aussi remarquer qu'en 1990-91, où il y a eu une récession particulièrement grave, les structures à termes des probabilités de survie décroissent beaucoup plus rapidement.

Autre aspect intéressant, voici l'évolution de la moyenne de la structure à termes par année des cotes Aa, A et Baa.

Figure 10



Sous un différent angle, on peut voir grâce aux moyennes, qu'en présence de récessions comme celles de 1980, 1990-91 et 2001, les structures à termes sont attirées vers de relativement faibles probabilités de survie. Pour de l'information additionnelle sur les structures à terme, vous référez à l'annexe 3.

Chapitre 4 - Description des variables du modèle affine

Cette section présente la description des variables explicatives de notre modèle d'estimation de la probabilité de défaut conditionnelle. Plus particulièrement, nous avons utilisé treize variables sous fréquence annuelle pour l'estimation de l'intensité. Parce qu'en partie le but de cette étude est de remplacer la consommation par un autre indicateur, et ce, tout en gardant la variable d'inflation; ces treize variables en incluant l'inflation ont formé 12 duos. Par exemple, on a estimé l'intensité en fonction de (i) l'inflation et du CFNAI et (ii) de l'inflation et des heures en manufacture : qui forme en tout deux duos. Finalement, ses variables peuvent être catégorisées par quatre classes : (i) activités économiques – indicateurs individuels, (ii) activités économiques – paniers d'indicateurs individuels, (iii) marché du travail et (iv) marché financier.

4.1-Activités économiques –indicateurs individuels

4.1.1-Inflation

Dans notre recherche, la variable d'inflation est de même nature que celle de Dionne et al. (2011), à l'exception que notre variable d'inflation est sous fréquence annuelle au lieu d'une fréquence trimestrielle. En détail, notre variable d'inflation est représentée par le taux de croissance de l'indice au prix de la consommation pour l'ensemble des items, trouvée sur le site du Bureau of Labor Statistics.

L'impact de l'inflation sur la probabilité de défaut est théoriquement très ambigu. En effet, d'un côté, une hausse d'inflation agit comme un frein à l'économie – coefficient positif. Par contre, les firmes dont la dette est en terme nominal verront leur dette en terme réel diminuer avec l'augmentation de l'inflation, diminuant donc la possibilité de défaut – coefficient négatif (Figlewski, Frydman, & Liang, 2006). Dionne et al. (2011) ont trouvé que l'inflation offre un signe des fois positif et des fois négatif à travers les quatre états et à travers les différentes cotes de crédit. Par contre, Figlewski *et al.* (2006) ont trouvé que pour toutes cotes, l'inflation offre un coefficient négatif significatif à 95%. Impliquant donc l'aspect de la dette corporative domine l'aspect du frein économique.

4.1.2-Consommation

Parce que dans Dionne et al. (2011) la consommation sous fréquence trimestrielle donne des résultats contre-intuitifs, nous nous intéressons donc dans ce cas à l'étude de la consommation, mais sous une fréquence annuelle. Car, par exemple, sous une fréquence annuelle la consommation est de nature plus lissée et sera donc peut-être plus en mesure de capter la récession de 2001. Notre variable de consommation est de même nature que celle de Dionne et al. (2011), c'est-à-dire qu'elle représente le taux de croissance de la somme des dépenses en biens non-durables et en services en plus d'être désaisonnalisée. Cette série est tirée du Bureau of Economic Analysis.

Comme c'est pour l'inflation, Dionne et al. (2011) nous montrent que la consommation offre un signe variant entre les différentes cotes et état. Or, parce qu'une hausse du taux de croissance de la consommation suggère une expansion économique, on anticipe que le signe de son coefficient soit négatif – la consommation doit faire diminuer la probabilité de défaut lorsqu'elle augmente.

4.1.3-PIB

Notre variable PIB est tirée du Bureau of Economic Analysis. Elle représente le taux de croissance en fréquence annuelle de la somme nette des revenus nationaux et elle est désaisonnalisée.

Parce qu'une expansion économique stimule l'échange de liquidité, nous anticipons donc que cette variable offre un coefficient négatif. De plus, c'est ce qui est entre autres démontré par l'étude de Figlewski *et al.* (2006) : pour toutes cotes de crédit, la croissance du PIB diminue la probabilité de défaut.

4.2-Activités économiques –panier d'indicateurs individuels

4.2.1-CFNAI

La description de cet indice a été couverte en détail au début de cette étude. Mais, brièvement, nous avons choisi cet indice parce qu'il offre une grande qualité dans la rapidité d'annonce du début et de la fin d'une récession. Ceci est dû en partie à sa nature qui agglomère 85 indicateurs, et de ce fait, élimine les bruits idiosyncratiques de chacun de ses

indicateurs. Cette série est tirée du site de la Fed de Chicago (Evans, Liu, & Pham-Kanter, 2002). Suite à sa transformation moyenne mobile de trois mois, nous l'avons annualisée en calculant la moyenne des douze moyennes mobiles représentatives de chaque mois de l'année. Finalement, nous avons calculé le taux de croissance de ces valeurs annualisées.

Le CFNAI devrait fournir un coefficient négatif, car une croissance dans le CFNAI indique qu'il y a une expansion économique et donc indique qu'il y a un plus grand accès à la liquidité. Figlewski *et al.* (2006) supporte cette intuition, car pour toutes les cotes à part C, le coefficient respectif au CFNAI est négatif et significatif à 90%. En effet, ce n'est que pour la cote C qu'on retrouve un signe positif au coefficient et une *p-value* de 0.773.

4.2.2-CFNAI, partie consommation

Nous croyons intéressant de comparer l'une des cinq grandes classes du CFNAI, qui est un panier d'indicateurs à la consommation, contre la variable de la consommation prise individuellement que nous utilisons. De cela on pourra comparer un index de consommation qui élimine une partie du bruit idiosyncratique donc qui est beaucoup plus affecté par les mouvements globaux de l'économie; contre un indicateur individuel qui est sous l'influence, d'une part, des mouvements globaux et de l'autre, des bruits idiosyncratiques. La transformation de cette série qui regroupe plusieurs indicateurs de la consommation est la même que celle qui a été apportée sur l'ensemble du CFNAI.

De nouveau, comme c'est pour le CFNAI, nous croyons que la croissance de ce panier d'indicateurs à la consommation devrait fournir un signe négatif.

4.2.3-Aruoba-Diebold-Scotti (ADS)

L'ADS représente aussi un panier d'indicateurs économiques et est obtenu d'une manière semblable au CFNAI. En effet, il est une moyenne pondérée et comme le CFNAI, il a une moyenne de 0 et un écart-type de 1. Donc, s'il offre une valeur de 0, l'économie opère normalement. Par contre, l'ADS n'est composé que de 6 indicateurs[20] qui sont désaisonnalisés alors que le CFNAI en contient 85. Comme le CFNAI, nous avons pris la moyenne de l'indice par année. Ensuite, cette série annualisée a été transformée en taux de

[20] Nombre de demandes d'assistance sociale, masse salariale, production industrielle, revenu personnel net, vente au détail et PIB trimestriel.

croissance. L'ADS est founit sur le site de la Fed de Philadelphie (Federal Reserve Bank of Philadelphia).

Nous anticipons que l'ADS devrait fournir un signe négatif, puisqu'une croissance de l'ADS indique un épanouissement économique et donc doit diminuer la probabilité de défaut.

4.3-Marché du travail

4.3.1-Masse salariale

Notre variable « masse salariale » représente le taux de croissance sous fréquence annuelle de la valeur qu'on obtient en multipliant (i) le nombre d'heures travaillées en moyenne par (ii) le salaire moyen et par (iii) le nombre d'employés moyen durant l'année en court et dans l'ensemble des secteurs privés. Cette série est prise du site du Bureau of Labor Statistics.

Nous croyons que cette variable donnera un signe négatif à son coefficient. Car, comme le démontrent Stock *et al.* (2003), la masse salariale est positivement liée au PIB (Stock & Watson, 2003). Alors, de ce fait, une hausse de la masse salariale doit ajouter une pression vers la baisse sur la probabilité de défaut.

4.3.2-Demandes initiales d'assurance chômage

Nous avons transformé cette série pour l'avoir sous fréquence annuelle. Pour ce faire, nous avons tout simplement sommé les valeurs hebdomadaires pour l'année respective. Ensuite, de ces valeurs annualisées, nous avons calculé le taux de croissance. Cette série est tirée du site du United States Department of Labor.

Cette variable devrait être positivement liée à la probabilité de défaut. Pour supporter cette prédiction, Stock et *al.* (2003) concluent que les variations du nombre de demandes d'assurance chômage représentent l'un des meilleurs indicateurs de l'activité économique, et que cette variable est négativement liée au PIB. Alors, de ce fait, on peut aisément prédire qu'une hausse du nombre de demandes devrait augmenter la probabilité de défaut.

4.3.3-Heures de travail dans le secteur manufacturier

Cette variable qui représente la somme des heures travaillées au cours de l'année pour tous les travailleurs dans le secteur manufacturier est transformée en taux de croissance. Elle est tirée du site du Bureau of Labor Statistics.

Nous anticipons que le signe du coefficient relié à cette variable sera négatif. D'ailleurs Stock *et al.* (2003) annoncent, comme c'est pour les demandes initiales d'assurance chômage, que les heures de travail en manufacture représentent l'un des meilleurs indicateurs à prédire l'activité économique et sont positivement liés au PIB. Alors, ceci vient supporter notre anticipation qu'une hausse des heures en manufacture doit faire diminuer la probabilité de défaut.

4.3.4-Nombre d'employés

Cette variable est la somme des employés durant le cours de l'année dans tous les secteurs mise à part celui de l'agriculture. Ensuite, comme toutes nos variables, elle est transformée en taux de croissance. Cette série est tirée du Bureau of Labor Statistics.

Parce que Stock *et al.* (2003) annoncent entre autres que le nombre d'employés est positivement lié au PIB, nous croyons qu'une hausse du nombre d'employés doit faire diminuer la probabilité de défaut.

4.4-Indicateurs financiers

4.4.1-Federal Funds Rate

Le Federal Funds Rate (FFR) est le taux interbancaire aux États-Unis qui dicte la nature des échanges de liquidité entre les institutions financières. Ce taux d'intérêt est grandement influencé par les actions du Federal Open Market Committee qui intervient sur les marchés pour influencer l'offre de monnaie en but de minimiser l'écart entre le FFR et le taux cible (Board of Governors of the Federal Reserve System). Cette série annualisée est tirée du site de la Federal Reserve. Ensuite nous avons transformé cette série en taux de croissance.

Nous croyons que parce que la Fed utilise la hausse du FFR pour stopper une expansion économique dans le but de diminuer les pressions inflationnistes, le signe du coefficient relié au FFR doit être positif. De plus, mise à part l'impact indirect d'une hausse du FRR qui tarde avant d'entamer un ralentissement économique, l'impact direct et spontané d'une hausse du FFR est que le coût d'emprunt augmente. Créant donc rapidement un environnement où il devient plus difficile de se refinancer à moindre coût et donc alourdit le fardeau de la dette corporative. Bref, autant au niveau court terme que long terme, l'impact d'une hausse du FFR augmente la probabilité de défaut.

4.4.2-Term *Spread* (10ans-FFR)

Le *term spread* (TS) est la différence entre le rendement à maturité d'une obligation du gouvernement américain de 10 ans et le FFR (Stock & Watson, 2003). La série annualisée du rendement à maturité de l'obligation du gouvernement américain est tirée du site du Federal Reserve. Ensuite, après avoir pris la différence entre les deux taux (10ans et FFR) pour chaque année de l'étude, cette nouvelle série (TS) est transformée en taux de croissance.

Parce qu'il est particulièrement risqué d'emprisonner de la liquidité dans des titres à longue maturité en période de récession[21], la demande chute pour les obligations long-terme. De cela, le rendement sur ces obligations de long terme augmente. Augmentant donc le TS entre l'obligation de 10 ans et le FFR. Donc, on s'attend à ce que le signe du coefficient du TS soit positif, lorsque le *spread* s'élargit, la probabilité de défaut doit augmenter. Enfin, il est à noter que le TS, comme c'est pour la masse salariale et le nombre d'heures en manufacture, est l'un parmi les meilleurs indicateurs de l'activité économique, et ce d'après Stock *et al.* (2003).

4.4.3-S&P500

Nous avons transformé cette variable pour qu'elle soit sous fréquence annuelle. Pour se faire, nous avons calculé la moyenne correspondante à l'année. Ensuite, cette série a été transformée en taux de croissance. La série du S&P500 est tirée de Yahoo Finance (Yahoo).

[2121] Par exemple, une firme qui prête peut avoir besoin tout d'un coup d'une large somme de liquidité pour contrer des pertes inattendues dignes d'une récession. Ou encore, en reprise économique, l'investisseur veut avoir accès à de la liquidité le plus tôt possible pour l'investir dans des actions de firmes cycliques –une classe de titres qui offre un rendement élevé en reprise économique (CFA Institute, 2011).

Parce qu'une hausse soutenue du marché boursier est représentative d'une croissance économique, nous croyons donc que le coefficient doit avoir un signe négatif. Par contre, il est à noter que d'après Figlewski *et al.* (2006), le coefficient pour toutes cotes de crédit est en fait positif et non significatif.

Chapitre 5 - Résultats

Cette section a pour but de montrer les résultats que nous avons obtenus des estimations des AR(1) sur les variables explicatives de la probabilité de défaut conditionnelle. Ensuite, il sera question d'élaborer sur les corrélations entre chaque variable explicative et finalement nous présentons les résultats du modèle de la probabilité de défaut conditionnelle et son inférence.

5.1-AR(1)

En guise de rappel, dans le but d'obtenir une équation exponentielle-affine, qui dans notre cas nous permet d'estimer les structures à termes des probabilités de survie, il nous faut d'après Duffie *et al.* (2003) l'utilisation d'un processus markovien (première condition). Dans le cadre de notre étude, ce processus markovien prend forme de la spécification d'Ornstein-Uhlenbeck (O-U). Plus précisément, nous utilisons l'équivalent d'un O-U qui est le processus AR(1), sur chacune de nos variables explicatives de la probabilité de défaut conditionnelle (intensité).

Ensuite, de Singleton (2003), on apprend que pour qu'un processus affine soit respecté, il faut entre autres que le processus markovien soit aussi respecté. Donc, ceci implique que nous devons négliger les variables qui annoncent des paramètres non-significatifs dans leur processus AR(1). De cette manière, nous allons omettre de notre étude toute variable qui a une distribution conditionnelle de X_{t+1} à la période t qui ne dépend pas de l'état de X_t. De plus, nous devons tester la racine unitaire des séries pour nous assurer qu'elles sont bel et bien stationnaires. Car une série qui n'est pas stationnaire créera du biais dans l'estimation. Par exemple, une modélisation faite à partir d'une série qui n'est pas stationnaire subira des chocs permanents, aura une variance grandissante avec le temps; et la variation de la variable d'une période à une autre ne dépendra que des résidus donc, c'est de dire aussi qu'il n'y aura aucun pouvoir de prédiction (marche aléatoire) (Rombouts, 2010). Voici maintenant les résultats des AR(1) et des t-test de Dickey-Fuller (DF) calculés sur nos treize variables où « a » est la constante, « b » est le coefficient et sigma est l'écart-type des résidus:

Figure 11

	a	b	σ	DF
PIB	0.025	0.639	0.022	
t	2.394	4.661		-2.63
CFNAI	-0.906	0.030	4.574	
t	-1.197	0.174		-5.76
ADS	-0.071	-0.015	2.921	
t	-0.148	-0.481		-32.54
CFNAI_C	0.597	0.006	6.558	
t	0.558	0.034		-5.95
consomation	0.014	0.816	0.014	
t	1.833	8.418		-3.49
FFR	0.018	0.355	0.379	
t	0.287	2.186		-3.98
nbre employés	0.010	0.432	0.016	
t	2.607	2.804		-3.68
heure manuf.	-0.005	0.268	0.032	
t	-0.960	1.674		-4.58
InClaims	0.021	0.023	0.173	
t	0.745	0.148		-6.29
S&P500	0.079	0.008	0.120	
t	3.321	0.046		-5.87
masse salariale	0.031	0.487	0.029	
t	3.035	3.286		-3.47
t-spread	0.644	-0.062	2.576	
t	1.506	-0.360		-6.18
IPC	0.010	0.752	0.021	
t	1.758	6.799		-3.19

Nous voyons du tableau qu'à un degré de confiance de 90%, les coefficients de la constante (a) et de la pente (b) sont significatifs pour les variables PIB, consommation, nombre d'employés, masse salariale et inflation. De plus, avec un degré de confiance de 90% et en se fiant aux valeurs critiques de la table de Dickey-Fuller à un degré de liberté de 50, le seuil décisionnel est de -2.6[22]. Alors, il semblerait, à un degré de confiance de 90%, que ces 5 variables sont stationnaires, puisque nous pouvons pour chacune d'entre elles rejeter H_0 qui est « présence de non-stationnarité »[23]. Donc, parce que ces variables permettent d'obtenir des résultats qui respectent la spécification d'O-U et qui en retour soutiennent le processus markovien et en plus d'être stationnaires, nous n'utiliserons que ces 5 variables pour l'estimation de probabilité de défaut conditionnelle.

Il est à noter qu'en comparant les résultats des AR(1) de Dionne et al. (2011) à ceux de notre étude, la consommation offre dans notre étude des coefficients significatifs. L'explication de cette différence est que notre variable consommation est sous une fréquence différente (annuelle dans notre cas) et sous un seul régime. En détail, avec Dionne et al. (2011) les tests statistiques des coefficients de consommation dans le régime faible niveau et haute volatilité donne des *p-value* de 58% pour la constante et 62% pour la pente. Démontrant donc que la consommation dans ce régime n'est pas caractérisée par un processus markovien et donc ne respecte pas l'une des conditions du bon maintien d'un processus exponentiel affine. Or, dans notre étude, la consommation sous fréquence annuelle et qui est sous l'hypothèse que les coefficients restent stables tout au long de la période de l'étude, est caractérisée par un processus markovien puisque les coefficients du AR(1) sont significatifs.

5.2-Corrélation

Afin d'éviter un problème de multicollinéarité qui fausse les tests statistiques (N. Gujarati, 2004), voici la matrice des corrélations entre les 5 variables qui suivent un processus markovien. De nouveau, parce que nous tenons à garder la variable d'inflation, nous nous intéressons donc qu'à la corrélation qui existe entre l'inflation et chacune des 4 autres variables.

---

[22] Parce que nous imposons une constante à nos AR(1), et ce, en but d'obtenir les paramètres nécessaires dans l'estimation des probabilités de survie. Nous utilisons donc cette version du test : $\Delta y_t = \alpha_0 + \pi y_{t-1} + \varepsilon_t$. Où y_t est le taux de croissance à t, Δ est le changement, $\pi = (\theta-1)$ et ε_t sont les résidus. Le test à pour H_0 : $\pi=0$ ou $\theta=1$ ou racine unitaire.

[23] Vous trouverez en annexe-4 les résultats intermédiaires du test de Dickey-Fuller.

Figure 12

	Masse Salar.	Consom.	nbre employés	PIB
IPC	0.394	0.844	0.079	0.600

On apprend de ce tableau de corrélations que lorsqu'on utilisera la consommation ou le PIB jumelé à l'inflation pour estimer l'intensité, ces grandes corrélations (0.844 et 0.600) ne biaiseront pas les estimations, mais au lieu, elles agiront de sorte à diminuer artificiellement les statistiques de t (N. Gujarati, 2004).

5.3-Paramètres estimés de la probabilité de défaut conditionnelle

Comme c'est décrit dans la section de la méthodologie, en utilisant les paramètres connus qui sont obtenus des AR(1) et en utilisant les probabilités de survie physiques; il nous est possible d'obtenir une estimation des paramètres de l'équation de la probabilité de défaut conditionnelle. De nouveau, cette équation de la probabilité conditionnelle est la suivante :

$$h_{t+1} = \alpha + \alpha^{i} i_{t+1} + \alpha^{j} j_{t+1} \qquad (1)$$

Alors, voici les résultats des 4 combinaisons[24] :

[24] (i) Inflation-Masse Salariale, (ii) Inflation-Consommation, (iii) nombre d'employés, (iv) Inflation-PIB.

Figure 13

	Aa	A	Baa
constante	0.00197	0.00446	0.01200
α_inflation	-0.00622	-0.01410	-0.03792
α_Masse-Sal	-0.01111	-0.02519	-0.06772

constante	0.10695	0.08491	0.10898
α_inflation	0.07842	-0.11405	0.37326
α_Consom	-0.13274	0.23460	-0.34095

constante	0.00170	0.00387	0.01040
α_inflation	-0.01212	-0.02755	-0.07408
α_nb_d'emp	-0.00940	-0.02137	-0.05747

constante	0.00226	0.00514	0.01381
α_inflation	-0.00456	-0.01036	-0.02786
α_PIB	-0.01469	-0.03342	-0.08986

Ce tableau nous montre, par cote donnée, les coefficients estimés de la probabilité de défaut conditionnelle par la méthode des moindres carrés non linéaires telle qu'illustrée dans la section de la méthodologie. Par exemple, la fonction de l'intensité (1) pour la cote Aa et pour la combinaison inflation et masse salariale à cette forme :

$$h_{t+1} = 0.00197 - 0.00622 * Inflation_{\mathrm{t+1}} - 0.01111 * M.Salariale_{\mathrm{t+1}}$$

En commençant par les coefficients de la masse salariale, on voit que le signe de $\alpha_{Masse-Sal}$ reste négatif pour toutes les cotes de l'étude. Ce qui rejoint notre anticipation qui portait sur le fait que la masse salariale est positivement liée aux cycles économiques, et de cela, une hausse de celle-ci provoque une diminution de la probabilité de défaut. De plus, avec une diminution de la qualité de crédit, on remarque que la probabilité de défaut devient de plus en plus sensible aux variations de la masse salariale ($\alpha_{\text{Masse-Sal_Aa}}$=-0.01111; $\alpha_{\text{Masse-Sal_A}}$= -0.02519; $\alpha_{\text{Masse-Sal_Baa}}$= -0.06772). Reflétant donc ainsi des titres de moins bonne qualité qui sont effectivement beaucoup plus susceptibles à faire défaut lorsque des éléments de la conjoncture, comme la masse salariale, subissent une baisse.

Ensuite, pour ce qui est de la combinaison consommation et inflation, les résultats sont qualitativement semblables à ceux de Dionne et al. (2011). En effet, leur article nous montre que dans deux états sur quatre, le signe du coefficient de la consommation n'est pas constant à travers les cotes de crédit. Des fois il est négatif, ce qui est intuitif, mais des fois il est positif, ce qui implique que la probabilité de défaut augmente avec la consommation! Dans notre étude, le signe varie aussi à travers les cotes : il est négatif pour Aa et Baa, mais positif pour A. Alors, étant donné que la cote A, qui est pourtant si proche de Aa et Baa, donne tout d'un coup une relation positive et forte –coefficient de 0.23– entre « consommation » et la probabilité de défaut; nous croyons en effet que la consommation n'explique pas adéquatement la probabilité de défaut. Ce qui en fait aide à répondre à l'une de nos questions de cette étude, qui est « est-ce que la consommation explique adéquatement la probabilité de défaut ? ».

Maintenant, pour ce qui est du nombre d'employés, le signe reste stable à travers les cotes et ce signe respecte notre intuition qui est que le nombre d'employés est négativement lié à la probabilité de défaut. De plus, comme c'est pour la masse salariale, avec la diminution en qualité de crédit, la probabilité de défaut devient de plus en plus sensible aux variations du nombre d'employés ($\alpha_{nb_d'employés_Aa}$=-0.0094; $\alpha_{nb_d'employés_A}$=-0.0214; $\alpha_{nb_d'employés_Baa}$= -0.0574). Ce qui de nouveau reflète la fragilité des titres de moins bonne qualité puisqu'ils sont relativement dépendants des éléments de cycles économiques.

Ensuite, le PIB offre de façon anticipée un signe négatif. De plus, ce signe reste constant à travers les cotes. En fait, c'est ce qui a aussi été trouvé par Figlewski *et al.* (2006), où la variation du PIB est négativement liée à la probabilité de défaut, et ce, indépendamment de la qualité de crédit. De plus, comme c'est pour tous les résultats à part la consommation, plus la cote de crédit se détériore, plus l'impact de la variation du PIB est important sur la probabilité de défaut (α_{PIB_Aa}=-0.01469; α_{PIB_A}= -0.03342; α_{PIB_Baa}= -0.08986).

Finalement, mise à part la combinaison consommation et inflation, l'inflation affiche un signe négatif pour toutes les cotes et toutes les autres combinaisons. Ce résultat supporte non seulement notre anticipation, mais aussi supporte les résultats de Figlewski *et al.* (2006) qui ont aussi trouvé un signe négatif pour l'ensemble des cotes. Ce qui indique que l'aspect de la dette réelle (inflation augmente, dette réelle diminue, signe négatif) domine l'aspect du frein économique (inflation augmente, ralentit l'expansion économique, signe positif).

Maintenant en ne considérant que la combinaison consommation et inflation, de nouveau nos résultats sont semblables à ceux de Dionne et al. (2011). En effet, en plus d'être semblable au niveau de l'inconstance dans le signe de la consommation comme c'est déjà mentionné, le signe de l'inflation dans notre étude est aussi inconstant à travers les signes. En détails, dans notre étude, le coefficient de l'inflation est positif pour la cote Aa et Baa, mais il est négatif pour A. Ensuite, les résultats de Dionne et al. (2011) affichent d'une part un signe qui est autant positif que négatif entre les 4 états pour la cote Aa et Baa et d'autre part un signe négatif à travers les états pour la cote A. Ce manque de constance dans le signe de l'inflation que témoigne notre recherche et celle de Dionne et al. (2011) est probablement causée par la variable « consommation ». Car, dans notre recherche, le signe de l'inflation est constamment négatif pour toutes autres combinaisons.

5.4-U de Theil

Afin d'illustrer le « fit » de nos probabilités de défaut théoriques calculées par l'équation (1) contre les probabilités de défaut physiques, nous présenterons d'abord les résultats du U de Theil et ensuite suivront les graphiques.

Étant donné que nos erreurs d'estimation sont exprimées ainsi $h_{t+1} - PD\ physique_{t+1}$, ceci donne de très petites valeurs à niveau pour toutes les combinaisons. Et par ce fait même, parce que ceci donne des résultats très similaires entre les combinaisons lorsqu'on calcule l'erreur moyenne, l'erreur absolue moyenne et la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (RMSE); Nous avons donc choisi d'utiliser le coefficient de Theil pour faciliter la comparaison des « fit » entre combinaisons. Ce coefficient qui s'écrit ainsi, indique que plus il est proche de 0, moins il y a d'erreurs d'estimation (Rombouts, 2010):

$$U\ de\ Theil = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N}(PD\ physique_{t+n} - h_{t+n})^2}{\sum_{n=1}^{N}(PD\ physique_{t+n} - PD\ physique_t)^2}}$$

Appliquant donc ce coefficient sur nos 4 combinaisons, ont obtient ceci :

Figure 14

U-Theil	Aa	A	Baa
Masse-Sal.	41.98670	16.56680	0.26430
Consom.	52.44060	21.05370	0.34500
Nbre D'employés	**39.50270**	**15.74770**	**0.25690**
PIB	42.62310	16.85180	0.26890

Trois points doivent être mentionnés à partir de ce tableau. Tout d'abord, toutes combinaisons confondues, notre modèle capte beaucoup mieux les probabilités de défaut physiques pour les plus faibles cotes. Ceci est probablement dû au fait qu'on retrouve beaucoup moins de constance dans les probabilités de défaut physiques pour ces faibles cotes.

Ensuite, sans surprise, la combinaison inflation et consommation offre le plus faible « fit », et ce, pour toutes classes de crédit. En effet, le coefficient de Theil pour cette combinaison nous annonce qu'il y a 23% de plus d'erreurs que la combinaison inflation et PIB qui offre le troisième meilleur «fit» pour la classe Aa. De plus, pour la cote A, cette combinaison avec consommation a 25% de plus d'erreurs que la combinaison avec PIB qui offre encore pour sa part un troisième meilleur «fit». Et pour la dernière cote, Baa, la combinaison avec consommation a 26% de plus d'erreurs que la combinaison qui offre le troisième meilleure «fit» qui est de nouveau celle qui est formée du PIB et inflation. Ce mauvais «fit» de la combinaison inflation et consommation vient de nouveau supporter notre conclusion sur le fait que la consommation ne doit pas être un facteur qui explique adéquatement la probabilité de défaut, et ce, peu importe la cote.

Enfin, comme troisième et dernier point, nous concluons d'après les résultats du coefficient de Theil que pour toutes les cotes, le nombre d'employés forment le meilleur indicateur de la probabilité de défaut. Par contre, il est à noter que cette conclusion se base sur deux hypothèses principales. La première est que nous supposons que le coefficient de Theil est suffisant pour évaluer le niveau d'erreur entre les probabilités de défaut théoriques et physiques. Ensuite, comme le font Denault *et al.* (2008), nous supposons que les probabilités physiques sont identiques aux vraies probabilités de défaut.

5.5-Inférence en méthode des moments généralisée apportée sur le modèle affine

5.5.1-Démarche

Cette section décrit tout d'abord la démarche que nous avons utilisée pour l'inférence sur nos paramètres et ensuite elle décrit les résultats obtenus de cette démarche. Bref, nous utilisons une inférence en méthode des moments généralisée (GMM) appliquée sur nos paramètres du modèle (1). Pour ce faire, nous simulons des séries instrumentalisées qui jouent le rôle de variables explicatives de la probabilité de défaut. Finalement, à partir de ces séries instrumentalisées, nous obtenons les variances des paramètres du modèle (1).

En respectant une condition en particulier, alors d'après Kenneth (2011), il est possible d'employer une inférence en GMM alors qu'on modélise en moindres carrés non-linéaires (NLLS). Cette condition qui permet une inférence en GMM alors qu'on modélise en NLLS est celle qui se rapporte à la juste spécification du modèle. C'est-à-dire que le modèle estimé utilise l'ensemble des variables explicatives du vrai modèle. Si ce n'est pas le cas, on se retrouve donc soit dans une situation de sous spécification où l'on omet certaines variables et crée de cette manière une source de biais; ou on surspécifie le modèle en utilisant des variables à pouvoir explicatif nul et crée de l'inefficacité dans le modèle (N. Gujarati, 2004). De plus, peu importe si nos variables explicatives sont endogènes ou exogènes –comme c'est dans le cadre de notre recherche–, si notre modèle est correctement spécifié, nous pouvons donc utiliser la méthode d'instrumentalisation venant des GMM (Kenneth G., 2011). De ces instruments, il est possible ensuite de calculer la variance des erreurs qui ensuite permet d'obtenir les variances des paramètres. Voici avant tout la démarche pour l'instrumentalisation en méthode des moments qui est tirée de (Ashley & Parmeter, 2011)

Pour que cette matrice d'instruments (Z) respecte la condition de juste spécification, elle doit être une matrice (NxK), où N est le nombre d'observations qui correspond entre autres à la dimension du vecteur de la variable dépendante (h) et K est la dimension du vecteur des paramètres. Alors, de cette manière, Z joue le rôle de la matrice X en incluant ainsi une constante et K-1 séries de variables explicatives instrumentalisées. De cette manière, si Z est bel et bien NxK et donc elle forme un modèle correctement spécifié, il est possible d'employer une inférence en GMM alors qu'on modélise en NLLS. De plus, pour

que Z soit adéquat, nous devons respecter deux conditions. La première condition est que les variables explicatives instrumentalisées, qui forment Z, doivent expliquer h_t –comme c'est le cas des variables explicatives de la matrice X. Donc, ces variables instrumentalisées doivent varier pour ainsi permettre une corrélation entre celles-ci et h_t. Ensuite, la deuxième condition est que les K-1 séries d'instruments doivent avoir une covariance de 0 avec les erreurs du modèle d'h_t. Voici donc tout d'abord l'approche mathématique pour soutirer une des séries d'instruments, ensuite nous donnons l'équivalent en forme vectorielle pour soutirer cette fois-ci l'ensemble de la matrice Z.

Figure 15

Condition pour une série d'instruments
$\frac{1}{39}\left[\sum_{i=1}^{39} z_i * u_i\right]=0$
$\equiv \frac{1}{39}\left[\sum_{i=1}^{39} z_i * (h_t - X_i\hat{\alpha})\right]=0$
$\equiv \frac{1}{39}\left[\sum_{i=1}^{39} m_i(\hat{\alpha})\right]=0$
$\equiv \bar{m}(\hat{\alpha}) = 0$
L'équivalent en forme vectorielle
$\equiv \frac{1}{39}[(Z'H) - ((Z'X)\hat{\alpha})] = 0$

En mots, pour ce qui est de la partie algébrique, dans le cas où l'on ne veut soutirer qu'une seule série d'instruments, on utilise tout d'abord la condition qui porte sur la covariance de 0 où z_i est la série d'instruments et u_i sont les erreurs. Ensuite en deuxième ligne, on définit nos erreurs (u_i) du modèle h_t par h_t-$X_t\alpha$. De cette manière on trouve en troisième ligne une définition des moments (m_i). Enfin, notre moyenne des moments dont on veut qu'elle égalise 0 est définie de manière vectorielle en dernière ligne. De cette dernière ligne sous forme vectorielle on a créé ensuite un programme qui minimise une version équivalente de cette dernière ligne en fonction de Z et sous contrainte que Z ne soit pas constant. Ce qui donne ceci :

$$\min_{Z}\left[\frac{1}{39}\left(\left(Z'H\right) - (\left(Z'X\right)\hat{\alpha})\right)\right]^2$$

De cette version, on impose donc la limite inférieure à 0. Alors, en minimisant ce programme en fonction des instruments, on se rapprochera le plus possible de 0 pour chacune des séries d'instruments, donc on minimisera la covariance entre les instruments et les erreurs. En annexe-4, vous trouverez quelques-unes des nos séries d'instruments. Ensuite, en supposant que nos erreurs (u_i) sont homoscédastiques et indépendantes, nous obtenons de cette manière notre matrice variance-covariance des résidus qui est une matrice KxK.:

$$\hat{V} = \frac{U'U * Z'Z}{39}$$

Nous fournissons en annexe-4 la variance des résidus correspondante à chacune des séries d'instruments illustrées dans cette annexe. Finalement, la matrice variance-covariance des coefficients est obtenue par cette fonction :

$$Var(\hat{\alpha}) = \left[(X'Z)\hat{V}^{-1}(Z'X)\right]^{-1}$$

Vous trouverez en annexe-4 nos résultats complets de ces variances-covariances des paramètres pour la cote Baa. Après avoir obtenu les matrices variance-covariance de nos paramètres, il est possible d'apporter les tests t usuels sur nos paramètres.

5.5.2-Résultats de l'inférence

Voici maintenant nos résultats des tests statistiques qui sont exprimés en t-stat :

Figure 16

	Aa	A	Baa
constante	0,000	0,000	0,003
α_inflation	-0,103	-0,056	-3,261
α_Masse-Sal	-0,052	-0,052	-3,191
constante	0,000	0,000	10,660
α_inflation	0,061	-0,075	0,050
α_Consom	-0,007	0,876	-0,019
constante	2,560	0,000	0,003
α_inflation	-0,148	-0,033	-6,782
α_nb_d'employés	-0,196	-0,082	<-15
constante	0,000	>15	0,000
α_inflation	0,000	0,000	-0,010
α_PIB	0,000	0,000	-0,023

Ce tableau annonce entre autres trois résultats principaux. Le premier résultat est que notre modèle n'obtient pas de coefficients significatifs pour les cotes de meilleure qualité (Aa, A); ce qui soutient en fait les résultats du coefficient de Theil, où le coefficient de Theil est très élevé pour ces cotes de meilleure qualité. De nouveau, ceci est probablement dû au fait que les probabilités de défaut physiques pour ces cotes sont dans l'ensemble très stables et n'offrent donc pas assez de volatilité pour créer suffisamment de corrélation entre les facteurs du modèle et la probabilité de défaut. Par contre, beaucoup plus de nos paramètres sont significatifs pour la cote Baa, dans laquelle ont retrouve un niveau plus élevé de volatilité dans la probabilité de défaut.

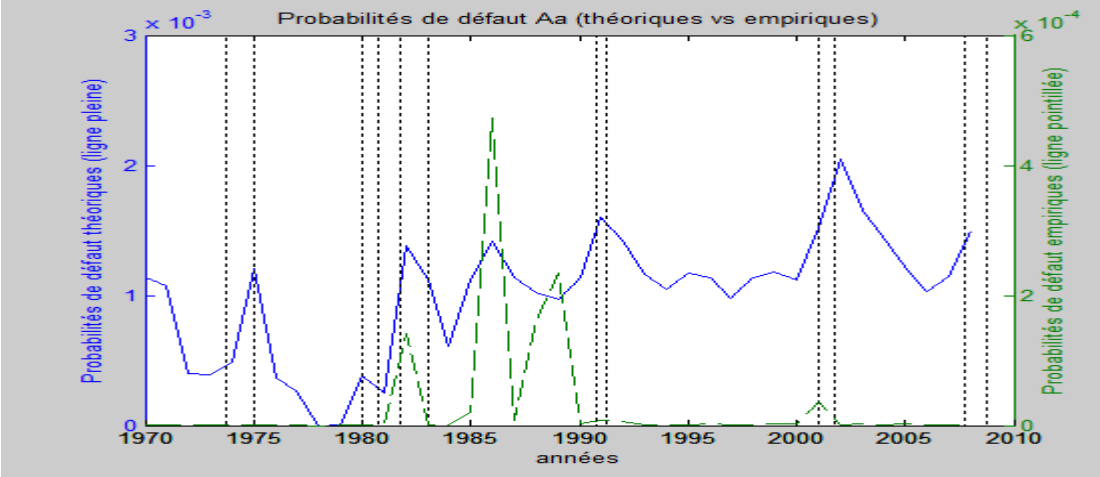
Ensuite, comme deuxième résultat, les deux duos *consommation-inflation* et *PIB-inflation* n'offrent pas dans l'ensemble des coefficients significatifs pour les pentes, et ce, pour toutes les cotes. Ce qui est justement en lien avec les résultats du U de Theil de ces duos pour les trois cotes. En effet, ces deux duos offrent les deux coefficients de Theil les plus élevés pour les trois cotes. Par contre, il est important de rappeler que les corrélations entre consommation et inflation (0.84) et celle de PIB et inflation (0.60) sont des facteurs à considérer dans cette inférence, puisque la multicollinéarité agit de sorte à diminuer artificiellement les statistiques de t. Finalement, comme dernier point, les deux duos *masse-salariale et inflation* et *nombre d'employés et inflation*, offrent dans la catégorie Baa des coefficients de pente très significatifs. On retrouve dans les deux duos un coefficient négatif et significatif pour l'inflation, nous démontrant ainsi que dans le cadre de l'inflation, l'aspect de la dette réelle domine l'aspect du frein économique. Ensuite, les coefficients du marché du travail, masse salariale et le nombre d'employés, sont négatifs et significatifs

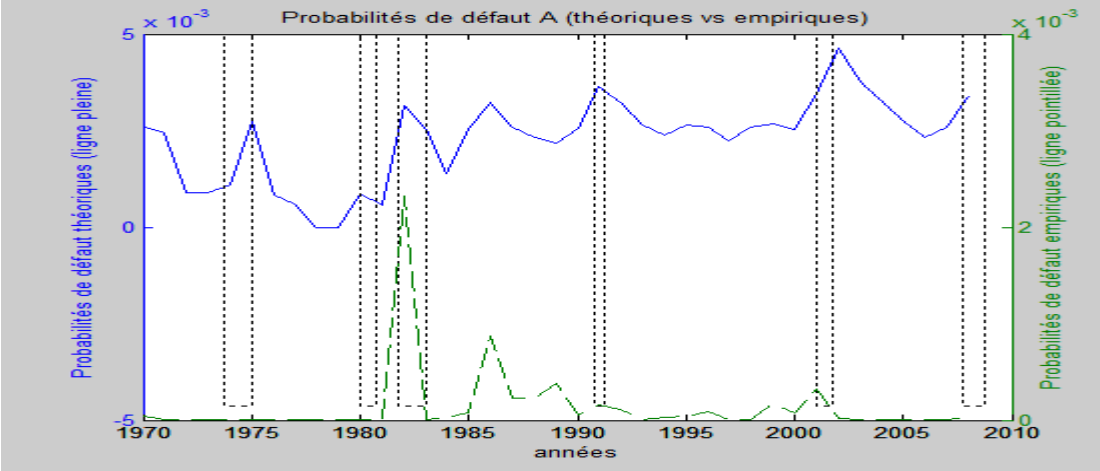
5.6 -Graphiques des probabilités de défaut physiques et théoriques

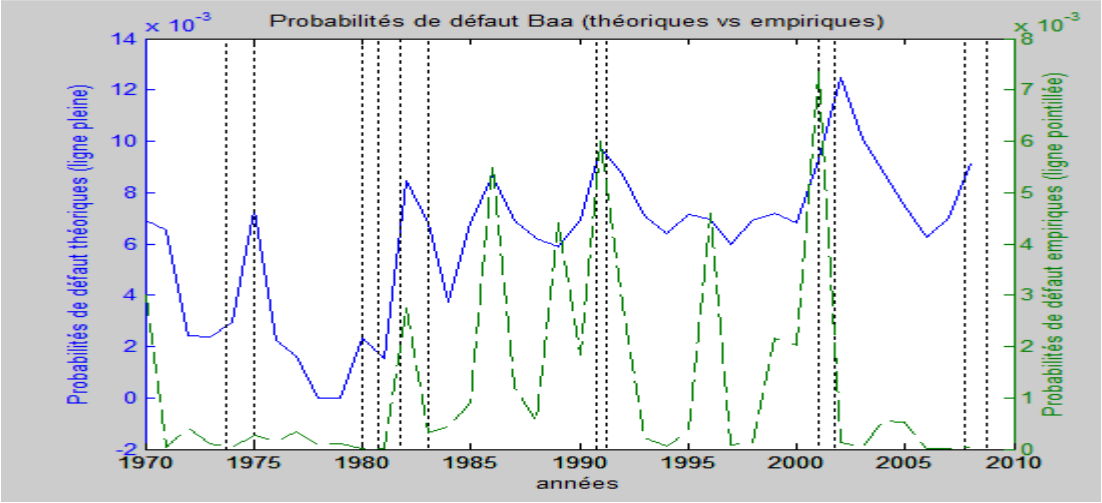
Dans cette section nous présentons les graphiques des probabilités de défaut physiques et théoriques des duos de (i) *masse salariale et inflation* et (ii) *nombre d'employés et inflation*. De plus, nous avons ajouté à ces graphiques les six récessions de la période d'étude qui sont représentées par les zones pointillées.

Figure 17

Masse salariale et Inflation







En portant notre attention sur la courbe des probabilités physiques (pointillée), nous pouvons remarquer que durant 1986, 1988-89 et 1995-96 pour la cote Baa uniquement, la probabilité de défaut augmente de façon notable alors qu'il n'y a pas de récession. La hausse de la probabilité de défaut en 1986 est probablement causée par la diminution significative de la production industrielle domestique suite à la diminution des exportations nette (Cacy, Miller, & Hoxworth, 1985). En effet, on apprend de Cacy *et al.* (1985) que la demande de consommation domestique absorbait une part notablement plus grande de biens importés; diminuant ainsi la production domestique. Ensuite, arriva à la fin de 1987 l'événement du Black Monday qui fut à cette époque le plus grand crash boursier depuis octobre 1929 (Goodfriend, 2002). À titre d'exemple, le Dow Jones a perdu 30% de sa valeur dans une période aussi courte que cinq jours (Goodfriend, 2002). Finalement, suite à la reprise économique de la récession de 1990-91, l'économie américaine était en surchauffe. Alors, en but de freiner cet élan économique et en évitant une autre récession, en 1995-96 la Fed a suivi un programme de « soft landing » qui a pour but d'augmenter les taux d'intérêt de façon très graduelle (Gillette, 1996). Et ces hausses de taux d'intérêt semblent avoir particulièrement affecté la probabilité de défaut des cotes inférieures telle que la Baa.

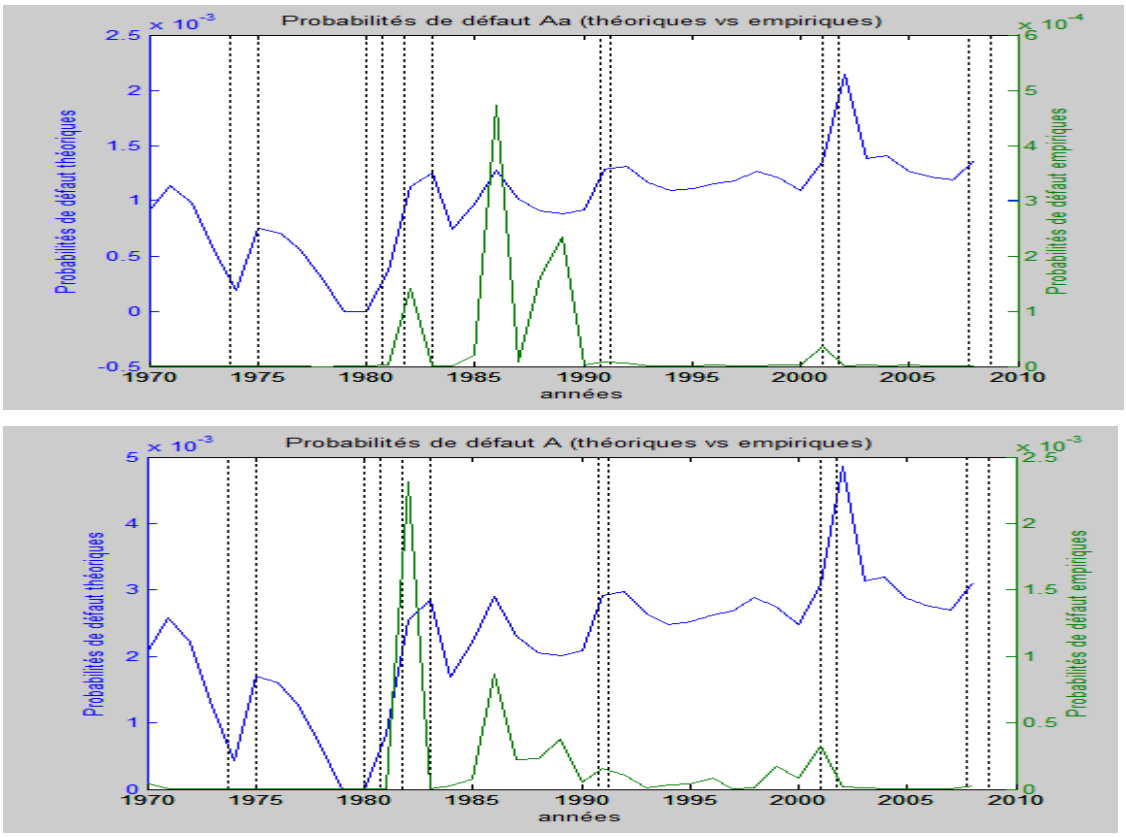
En portant notre attention cette fois-ci sur la courbe des probabilités théoriques (ligne pleine), deux points en particulier ressortent de ces graphiques. Le premier point est que pour l'ensemble des récessions et pour toutes les cotes, la probabilité de défaut théorique augmente un peu avant que les récessions n'aient débuté. Nous indiquant donc que notre modèle capte bien l'aspect graduel des cycles économiques et il semble donc avoir un pouvoir d'anticipation. De ce point, il est à noter que contrairement à Dionne et al. (2011)

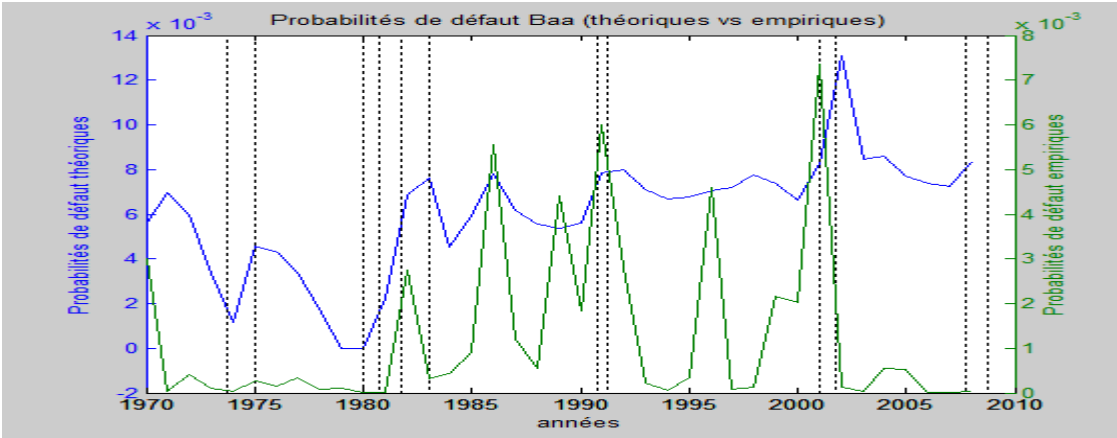
avec leur choix de duo –consommation et inflation–, notre modèle capte bien la récession de 2001. Finalement, pour ce qui est du deuxième point, comme en témoignent les résultats du coefficient de Theil et de l'inférence, visuellement on peut voir que notre modèle ne capte pas adéquatement les probabilités physiques des cotes supérieures.

Maintenant, voici les résultats graphiques du deuxième duo, *nombre d'employés et inflation*.

Figure 18

Nombre d'employés et Inflation





Pour ce duo, les résultats sont similaires au duo précédent. Par contre, ce duo avec le nombre d'employés tarde relativement à augmenter la probabilité de défaut théorique pour la récession 73-75. Alors qu'avec le duo de la masse salariale, le modèle augmente quelques mois avant la probabilité de défaut. De plus, avant l'arrivée de la grande récession de 07-09, ce duo avec le nombre d'employés n'a pas augmenté de beaucoup la probabilité de défaut. Alors que le duo avec la masse salariale nous montre clairement l'arrivée d'une récession importante.

5.7-Lien avec la fonction d'utilité

Parce que notre étude est en lien étroit avec l'article de Dionne *et al.* (2011) et que dans leur article il est question entre autres d'estimer l'utilité marginale de la consommation et de l'aversion au risque; nous proposons donc de remplacer la variable de consommation par l'une de nos deux variables qui expliquent le mieux la probabilité de défaut : nombre d'employés ou la masse salariale.

En effet, comme en témoignent les résultats en moindres carrés linéaires suivants,

Figure 19

	nbre d'employés	masse salariale
constante	0.6200	0.0404
p-value	0.0000	0.0000
pente	0.7927	0.5844
p-value	0.0010	0.0000
R^2	0.2591	0.4808

où les variations du taux de croissance de la consommation semblent être linéairement expliquées par les variations du taux de croissance du nombre d'employés et de la masse salariale; et ce, avec un niveau de confiance de 99% où les p-values des paramètres de pente de la masse salariale et du nombre d'employés sont respectivement égalent à 0 et 0.001. À partir de ces résultats, nous suggérons donc dans le cadre de leur fonction d'utilité de remplacer la variable de la consommation – qui mène à différentes problématiques – par l'une de ces deux variables.

Chapitre 6 - Conclusion

Pour conclure cette étude, le coût d'opportunité d'un dollar de plus en risque augmente avec l'arrivée de Bâle III : en effet, pour un risque donné, les institutions bancaires devront accroître la qualité de leur capital requis et en plus, devront élargir ce capital requis. Ce qui implique qu'il devient encore plus important d'estimer correctement le risque total que subit l'institution bancaire. La littérature nous offre quatre méthodes pour estimer la probabilité de défaut qui est en soi une partie fondamentale du risque de crédit, et qui est à son tour, partie importante du risque total. La méthode la plus appropriée semble être celle des modèles à formes réduites, comme c'est utilisé par Dionne et al. (2011) et Denault *et al.* (2008), où la probabilité de défaut ou encore l'intensité peut être expliquée par divers éléments incluant les variables observées et non observées. Notre étude, comme c'est le cas pour Dionne et al. (2011), repose donc sur un modèle à forme réduite où l'intensité est directement expliquée par des variables macroéconomiques.

Ensuite, en basant principalement notre recherche sur Denault *et al.* (2008), Dionne et al. (2011) et sur Duffie & Singleton (2003), nous avons entre autres l'information sur la spécification d'Ornstein-Uhlenbeck; qui est utilisée sur nos variables explicatives en but d'identifier les processus markoviens et d'obtenir les paramètres nécessaires pour l'estimation des structures à termes des probabilités de survie –Denault *et al.* (2008). De plus, l'article nous fournit une ligne directrice sur l'extraction des probabilités de défaut physiques – Denault *et al.* (2008). De Dionne et al. (2011), nous utilisons la méthodologie de l'estimation de la probabilité de défaut en employant à la base un modèle affine dans lequel se trouvent des variables explicatives observées telles que la masse salariale. Enfin, de Duffie et Singleton (2003), nous obtenons les trois conditions nécessaires pour le bon maintien de notre modèle d'estimation de la structure à termes des probabilités de survie.

De cela, notre méthodologie a pour but d'estimer les paramètres de la fonction affine (α) qui minimisent l'erreur entre la probabilité de défaut théorique et physique. Pour ce faire, nous avons intégré le processus d'intensité qui caractérise le modèle (1) dans un modèle exponentiel affine, car cela nous permet d'obtenir une formule analytique qui fournit en output $q^{théo}(t, n, \alpha, \dots)$ et qui nous est utile dans la fonction des erreurs aux carrées pour estimer «α^*» (équation 11). Ensuite, nous utilisons une approche en temps continu pour obtenir les probabilités de survie empiriques $q^{emp}(t, n)$. De cette manière, on s'assure entre autres d'une meilleure estimation de la probabilité des événements rares. Finalement, on a

nos deux éléments qui rendent possible la minimisation de l'erreur entre la structure à termes des probabilités de survie empiriques et théoriques. Étant donné que les paramètres « a », « b » et « σ » qui sont à ce stade déjà connus à l'aide des processus AR(1) sur les variables indépendantes du modèle (1) comme le CFNAI ou l'inflation par exemple et étant donné que les paramètres temporels, n, et de structure à termes, t, sont choisis, les derniers paramètres inconnus qui influencent la valeur de $q^{théo}\left(t, n, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha^i}, \boldsymbol{\alpha^j}, a^i, a^j, b^i, b^j, \sigma^i, \sigma^j\right)$ sont les « α ». Et, c'est avec la variation des « α » et de l'équation (11), qu'on réussit à minimiser sous contrainte[25] l'erreur entre la structure à termes théorique et empirique pour chaque cote. En sachant que les *« α^* »* minimisent l'erreur entre les probabilités de survie théorique et empirique c'est de savoir aussi que les *« α^* »* minimisent l'erreur entre la probabilité de défaut théorique (h_{t+1}) et empirique : les « α^*» sont donc les meilleurs estimateurs pour le modèle (1).

Cette recherche tente, entre autres, de répondre à trois questions principales. La première, comment se comporte la consommation dans l'estimation de la probabilité de défaut? Ensuite, quelle force domine dans le contexte de l'inflation : est-ce qu'une hausse de l'inflation, qui freine l'économie, augmente la probabilité de défaut; ou est-ce qu'une hausse de l'inflation, qui diminue la valeur réelle de la dette, diminue la probabilité de défaut? Finalement, comment se comportent les indices comme le CFNAI dans l'estimation de la probabilité de défaut?

En réponse à notre première question, la consommation en fréquence annuelle est caractérisée par un processus markovien qui par ailleurs n'est pas le cas dans Dionne et al. (2011). Ensuite, nous trouvons qu'en comparant à toutes les variables qui respectent le processus markovien et qui sont stationnaires, la consommation est celle qui performe le moins bien dans l'explication de la probabilité de défaut. En effet, en comparant à notre variable «nombre d'employés», la consommation a 33%, 40% et 30% plus d'erreurs dans l'explication de la probabilité de défaut pour les cotes Aa, A et Baa respectivement. De plus, ce duo de consommation et inflation n'offre aucun coefficient de pente significatif, et ce, pour les trois cotes. Par contre, il est important de rappeler que la consommation et l'inflation ont une corrélation de 0.80. Ce qui donne inévitablement de la multicollinéarité dans le modèle et donc diminue artificiellement les statistiques de t, rendant donc difficile le rejet de l'hypothèse nulle du coefficient qui est égal à zéro.

[25] $0<q^{théo}<1$

Ensuite en réponse à notre deuxième question, mise à part le duo consommation et inflation et celui du PIB et inflation, nous trouvons que l'inflation ajoute dans la majorité des cas un impact négatif sur la probabilité de défaut. Nous indiquant donc que lorsque l'inflation augmente, l'aspect de la diminution de la dette réelle (coefficient négatif) domine généralement l'aspect du frein économique (coefficient positif). Ensuite, pour les duos (i) nombre d'employés et inflation et ainsi que (ii) masse salariale et inflation, l'inflation offrent des coefficients significatifs pour la cote Baa.

Enfin, en réponse à notre dernière question principale, tous nos indices — le CFNAI, la partie consommation du CFNAI et l'ADS— ne sont pas caractérisés par un processus markovien. Alors, parce qu'ils ne sont pas caractérisés par un processus markovien, ils ne respectent donc pas la première condition du processus exponentiel affine. Alors, nous n'avons pas pu estimer leur impact sur la probabilité de défaut. Il est à noter aussi que même si nous avons éliminé les *outliers* qui sont à trois écarts-types de la moyenne ou plus en termes absolus, ces indices ne suivent tout de même pas un processus markovien.

De l'ensemble de nos résultats, nous concluons que notre catégorie de variables du marché du travail est celle qui performe le mieux dans l'explication de la probabilité de défaut. En effet, nos variables masse salariale et nombre d'employés sont celles qui offrent les plus faibles ratios de Theil pour toutes les cotes. En plus, tous leurs coefficients de pentes sont significatifs pour la cote Baa, ce qui n'est pas le cas des autres variables caractérisées par un processus markovien. Également, nous trouvons en *in-sample*, que les variables du marché du travail ajoutent au modèle une qualité notable sur l'anticipation des récessions à venir. En effet, ces variables dont plus particulièrement la masse salariale, font augmenter la probabilité de défaut estimée quelques mois avant les périodes de récessions.

Nous remarquons aussi que notre modèle n'est pas en mesure de capter les probabilités physiques des cotes Aa et A. Ceci est probablement dû au fait que les probabilités de défaut physiques ne varient presque pas. En effet, la cote Baa à 7.40 et 3.25 fois plus de volatilité que les cotes Aa et A respectivement. Bref, ce manque de volatilité rend difficile l'obtention des corrélations nécessaires.

Ce qui suit représente pour nous des additions favorables à notre recherche. L'une de ces additions est d'utiliser une approche de maximum de vraisemblance au lieu d'utiliser une estimation en moindres carrés non linéaire. En effet, la méthode du maximum de vraisemblance, d'une part, facilite grandement l'estimation de la variance et d'autre part, ne

requiert pas de séries estimées –les instruments– pour extraire la variance des paramètres. Finalement, comme deuxième addition, il serait intéressant d'estimer la probabilité de défaut avec plus de deux variables explicatives, nous permettant donc surement d'obtenir un fit significativement supérieur.

7-Bibliographie

Burreau of Labor Statistics. (n.d.). *Consumer Price Index-All Urban Consumers*. Retrieved octobre 12, 2010, from United States Department of Labor: http://data.bls.gov/cgi-bin/surveymost?cu

Altman, E. (1968). Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Distress. *Journal of Finance* , pp. 23, 589–609.

Ashley, A. R., & Parmeter, F. C. (2011, juillet 13). *Sensitivity Analysis of GMM Inference*. Consulté le septembre 15, 2011, sur http://ashleymac.econ.vt.edu/working_papers/Ashley_Parmeter_Credible_GMM.pdf

Basel III accord. (n.d.). *Basel III accord.* Retrieved Octobre 06, 2010, from Basel III accord: http://www.basel-iii-accord.com/

Bauwens, L., & Hautsch, N. (2006, Mars 27). *STOCHASTIC CONDITIONAL INTENSITY PROCESSES.* Retrieved Novembre 14, 2010, from http://www.core.ucl.ac.be/econometrics/bauwens/Papers/JFEC05-263_revised.pdf

Board of Governors of the Federal Reserve System. (n.d.). *Open Market Operations*. Retrieved janvier 14, 2011, from Board of Governors of the Federal Reserve System: http://www.federalreserve.gov/monetarypolicy/openmarket.

Bureau of Economic Analysis. (n.d.). *National Economic Accounts*. Retrieved octobre 4, 2010, from BEA: http://www.bea.gov/national/nipaweb/SelectTable.asp?Popular=Y

Bureau of Economic Analysis. (n.d.). *Table 2.3.5. Personal Consumption Expenditures by Major Type of Product* . Retrieved octobre 9, 2010, from U.S. Department of Commerce: http://www.bea.gov/national/nipaweb/TableView.asp?SelectedTable=65&ViewSeries=NO&Java=no&Request3Place=N&3Place=N&FromView=YES&Freq=Year&FirstYear=1969&LastYear=2001&3Place=N&Update=Update&JavaBox=no#Mid

Bureau of Labor Statistics. (n.d.). *Data Retrieval: Employment, Hours, and Earnings*. Retrieved octobre 5, 2010, from United States Department of Labor: http://www.bls.gov/webapps/legacy/cesbtab9.htm

Bureau of Labor Statistics. (n.d.). *Top Picks*. Retrieved octobre 8, 2010, from United States of Department of Labor: http://data.bls.gov/cgi-bin/surveymost?ce

Bureau of Labor Statistics. (n.d.). *United States Department of Labor*. Retrieved octobre 15, 2010, from Top Picks: http://data.bls.gov/cgi-bin/surveymost?ce

Cacy, J., Miller, G., & Hoxworth, D. (1985, Décembre). *The U.S. Economy in 1985 and 1986*. Retrieved Juin 30, 2011, from Kansascity Fed: http://www.kansascityfed.org/PUBLICAT/ECONREV/econrevarchive/1985/4q85mill.pdf

CFA . (2008). Program Curriculum. In *Corporate Finance and Portfolio Management Level 1* (p. 39). Boston: Pearson Costum Publishing.

CFA Institute. (2011). Assigned Reading-38, Equity, Concepts and Techniques. In *Equity* (p. 61). Pearson.

Christen, H., Hansen, E., & Lando, D. (2004). Confidence sets for continuous-time rating transition probabilities . *Journal of Futures Markets (28)* , 2575-2602.

Christensen, H. J., Hansen, E., & Lando, D. (2004). Confidence sets for continuous-time rating transition probabilities. *Journal of Banking & Finance (28)* , 2575–2602.

Czado, C., & Pflüger, C. (2008, fev 18). *Modeling dependencies between rating categories and their effects.* Retrieved octobre 13, 2010, from Wiley InterScience: http://www.google.com/search?ie=UTF-8&oe=UTF-8&sourceid=navclient&gfns=1&q=Modeling+dependencies+between+rating+categories+and+their+effectson+prediction+in+a+credit+risk+portfolio

Data Archive. (2010, octobre 06). Retrieved octobre 06, 2010, from Marketsdata: http://markets.ft.com/ft/markets/reports/FTReport.asp?dockey=SPR-061010

Denault, M., Gauthier, G., & Simonato, J.-G. (2008). Estimation of Physical Intensity Models for Default Risk. *The Journal of Futures Markets* , pp. Vol. 29, No. 2, 95–113.

Dionne, G. (2010). Calculation of the Capital Ratio Under the 1996 Amendment. In G. Dionne, *Gestion des risques et assurances* (p. table 4.10). Montreal: HEC Montreal.

Dionne, G. (2010). Cours 12 : Gestion du risque de crédit. In G. Dionne, *Gestion des risques et assurances* (p. 149). Montréal: HEC Montréal.

Dionne, G. (2010). Risque de marché, mesure du risque et VaR dans des portefeuilles avec options. In G. Dionne, *Gestion des risques et assurances* (p. 103). Montréal: HEC.

Dionne, G., Gauthier, G., Hammami, K., Maurice, M., & Simonato, J.-G. (2011). A Reduced Form of Default *Spread*s with Markov Switching Macroeconomic Factors. *Journal of Banking and Finance* , 1984-2000.

Dionne, G., Gauthier, G., Hammami, K., Maurice, M., & Simonato, J.-G. (2010). Default risk in corporate yield *spread*s. *Financial Management* , vol.39, n°2, p.707-731.

Duffie, D., & Singleton, K. J. (2003). *Credit Risk: Pricing, Measurement and Management* . Princeton University Press.

European Financial Stability Facility. (2010, mai). *EFSF*. Retrieved janvier 7, 2011, from European Financial Stability Facility: http://www.efsf.europa.eu/about/index.htm

Evans, L. C., Liu, T. C., & Pham-Kanter, G. (2002, octobre). *The 2001 recession and the Chicago Fed National Activity Index: Identifying business cycle turning points*. Retrieved

octobre 10, 2010, from Federal Reserve Bank of Chicago: http://www.chicagofed.org/digital_assets/publications/cfnai/2002/3qepart2.pdf

Federal Reserve Bank of Philadelphia. (n.d.). *Aruoba-Diebold-Scotti Business Conditions Index*. Retrieved octobre 21, 2010, from Federal Reserve Bank of Philadelphia: http://www.philadelphiafed.org/research-and-data/real-time-center/business-conditions-index/

Federal Reserve. (n.d.). *Selected Interest Rates - Historical Data*. Retrieved octobre 10, 2010, from Federal Reserve Statistical Release : http://www.federalreserve.gov/Releases/H15/data.htm

Figlewski, S., Frydman, H., & Liang, W. (2006). *Modeling the Effect of Macroeconomic Factors on Corporate Default and Credit Rating Transitions.* New York: Stern School of Business.

Gillette, J. R. (1996). *U. S. Economy Experiences "Soft Landing" in 1995; Look for More of the Same in 1996*. Retrieved Juin 30, 2011, from Kentucky Annual Economic Report: http://cber.uky.edu/pdf/kaer96.pdf

Goodfriend, M. (2002). *The Phases of U.S. Monetary Policy: 1987 to 2001*. Retrieved Juin 30, 2011, from Richmond Fed: http://www.richmondfed.org/publications/research/economic_quarterly/2002/fall/pdf/goodfriend.pdf

J.P. Morgan. (1997). *CreditMetrics.* New York: J.P. Morgan.

Kenneth G., S. (2011). *The optimal construction of instruments in nonlinear regression: implication for GMM inference.* Victoria: University of Victoria, Department of Economics.

Labor, U. S. (n.d.). *Databases, Tables & Calculators by Subject*. Retrieved octobre 21, 2010, from Bureau of Labor Statistics: http://data.bls.gov/PDQ/servlet/SurveyOutputServlet

Lando, D., & Skødeberg, M. T. (2002). Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations. *Journal of Banking & Finance (26)* , 423–444.

Lo, A. (1986). Logit versus discriminant analysis: A specification test and application to corporate bankrupties. *Journal of Econometrics* , pp. 31, 151–178.

Martinez, L., & Martinez, R. A. (2008). *Computational Statistics Handbook, Second Edition.* New York: Capman & Hall/CRC.

Moody's. (2007, Mars). *Corporate Default Risk Service.* Retrieved Octobre 6, 2010, from Moody's: http://v3.moodys.com/sites/products/ProductAttachments/FAQs%20Default%20Risk%20Service.pdf

N. Gujarati, D. (2004). section 10.4. In *Économétrie* (p. 352). Bruxelles: De Boeck Université.

Rombouts, V. J. (2010). *Économétrie des Séries Temporelles.* Montréal: HEC Montréal.

Stock, J., & Watson, M. (2003). How Did Leading Indicator Forecasts Perfom During the 2001 Recession? *Federal Reserve Bank of Richmond Economic* , pp. 89, 71-89.

The Economist. (2010, Aout 26). *A stickier problem.* Retrieved Octobre 06, 2010, from The Economist: http://www.economist.com/node/16888999?story_id=16888999

The Economist. (2010, Septembre 23). *Euro follies.* Retrieved Octobre 07, 2010, from The Economist: http://www.economist.com/node/17095329?story_id=17095329

The Economist. (2010, Septembre 09). *Mission unaccomplished.* Retrieved Octobre 06, 2010, from The Economist: http://www.economist.com/node/16994720?story_id=16994720

The Economist. (2010, Août 19). *Super model.* Retrieved Octobre 08, 2010, from The Economist: http://www.economist.com/node/16847862?story_id=16847862

The Economist. (2010, Septembre 16). *Taming the banks.* Retrieved Octobre 06, 210, from The Economist: http://www.economist.com/node/17039091?story_id=17039091

The Economist. (2010, Septembre 30). *Two cheers, three tiers.* Retrieved Octobre 06, 2010, from The Economist: http://www.economist.com/node/17155937?story_id=17155937

United States Department of Labor. (n.d.). *Databases, Tables & Calculators by Subject*. Retrieved octobre 21, 2010, from Bureau of Labor Statistics: http://data.bls.gov/PDQ/servlet/SurveyOutputServlet

United States Department of Labor. (n.d.). *Unemployment Insurance Weekly Claims Data*. Retrieved octobre 3, 2010, from Employment and Training Administration: http://www.ows.doleta.gov/unemploy/claims.asp

Yahoo. (n.d.). *S&P 500 INDEX,RTH (^GSPC)*. Retrieved octobre 12, 2010, from Yahoo Finance: http://ca.finance.yahoo.com/q/hp?s=^GSPC&a=00&b=3&c=2001&d=11&e=31&f=2009&g=m&z=66&y=0

8-Annexes

8.1- Processus d'intensité :

$\Delta x_t = \kappa(\theta - x_t)\Delta t + \sigma\Delta B$ … Où B est un mouvement brownien; Δ représente un changement temporel.

$x_t - x_{t-1} = \kappa(\theta - x_{t-1})\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta}$

$x_t = x_{t-1} + \kappa\theta\Delta t - \kappa x_{t-1}\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta}$

$x_t = x_{t-1} + \kappa\theta\Delta t - \kappa x_{t-1}\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta}$

$x_t = x_{t-1}(1 - \kappa\Delta t) + \kappa\theta\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta}$

Qui devient un AR(1) :

$x_t = a + x_{t-1}b + e_i$

Où

$b = (1 - \kappa\Delta t)$

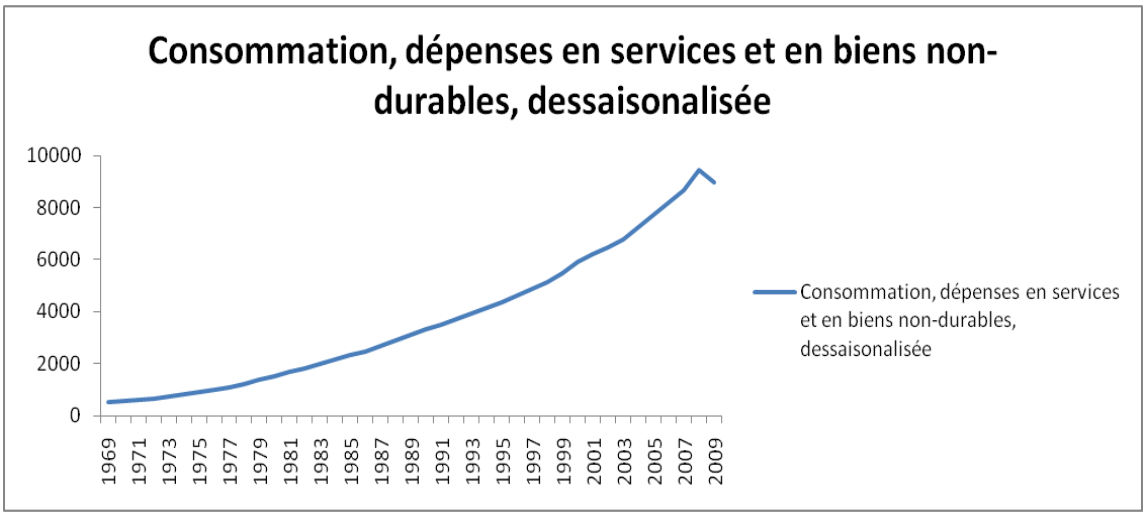
$a = \kappa\theta\Delta t$

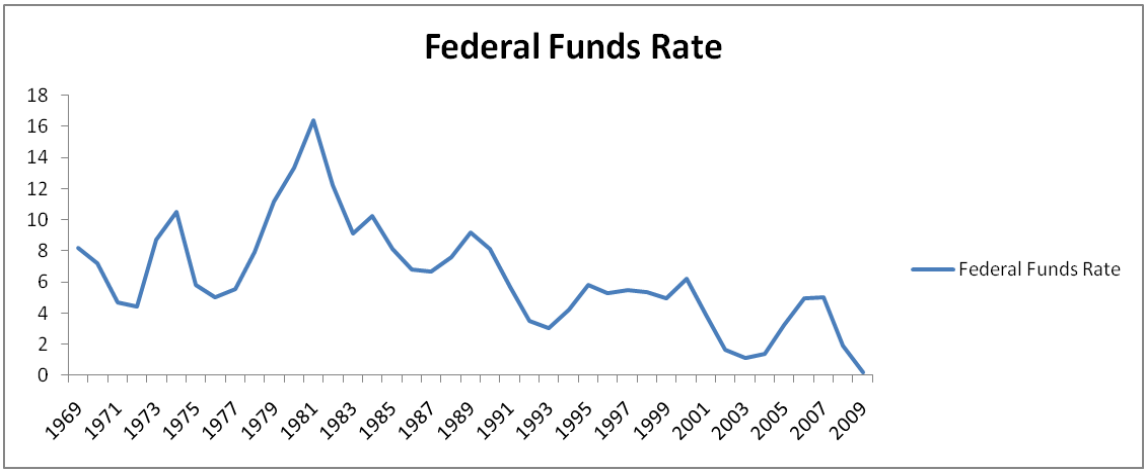
$e_i = \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta}$

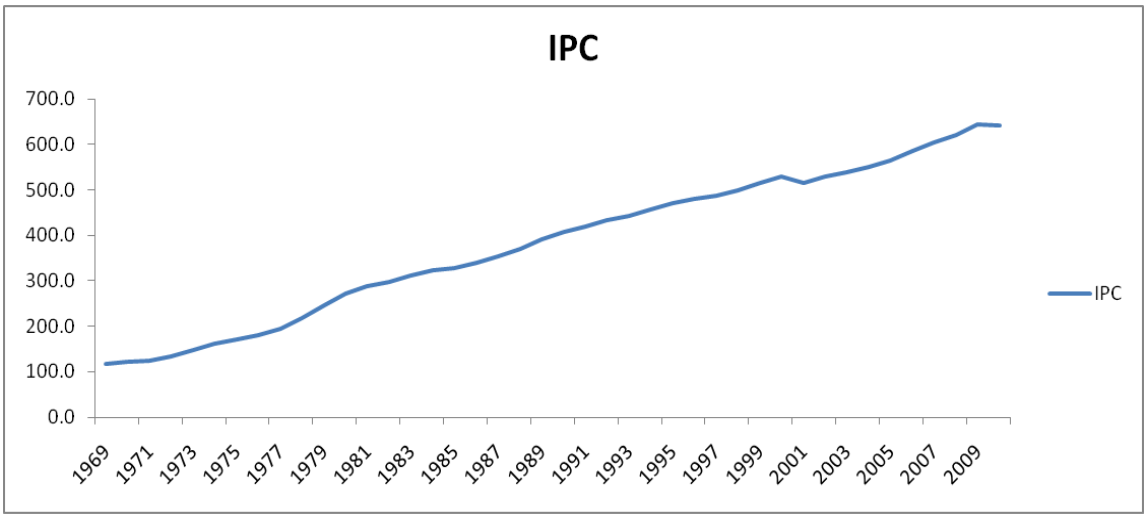
8.2-Séries des variables indépendantes du modèle d'intensité (modèle(1))

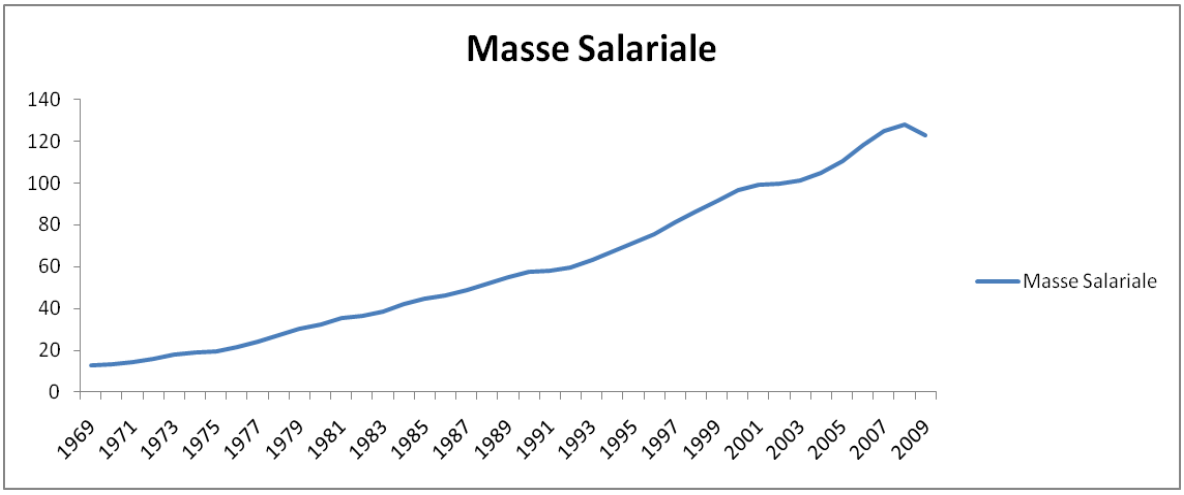
Voici les séries qui seront utilisées comme variables indépendantes du modèle (1) et dans les processus AR(1), qui donnera ensuite les paramètres « a », « b » et « σ » pour le calcul des $q^{théo}(t, n, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha^i}, \boldsymbol{\alpha^j}, a^i, a^j, b^i, b^j, \sigma^i, \sigma^j)$.

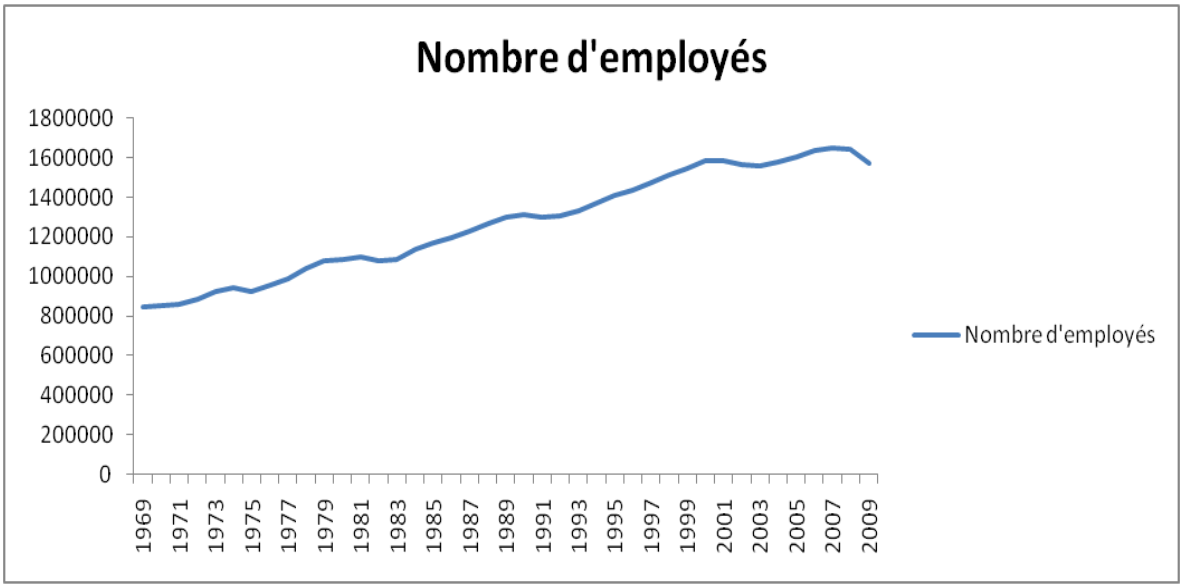
Figure 20

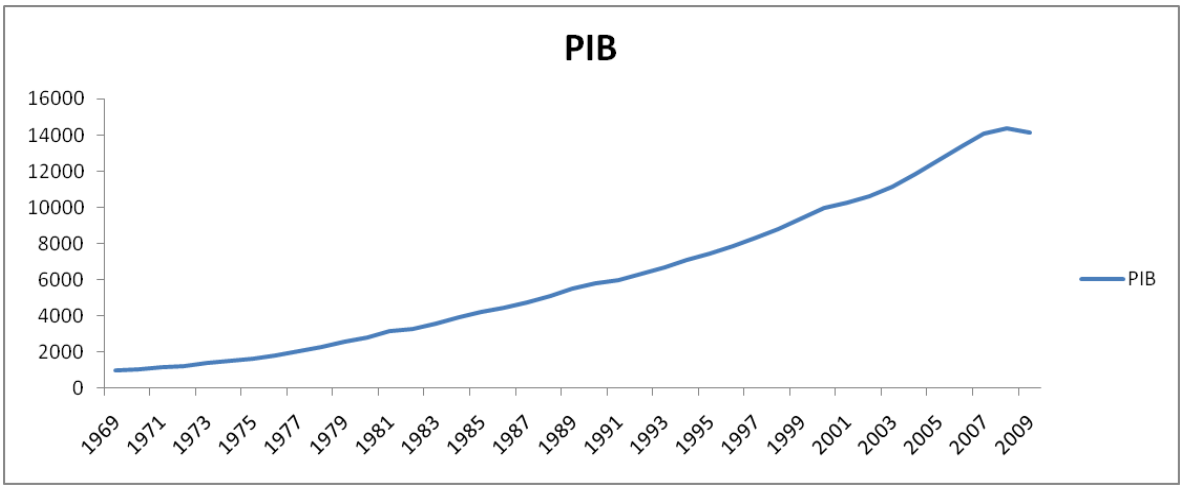


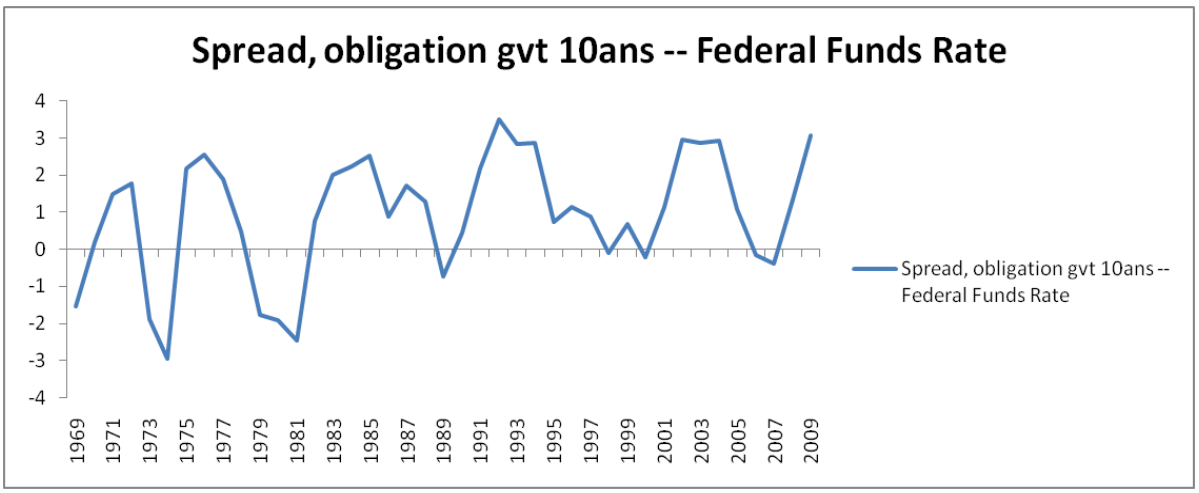


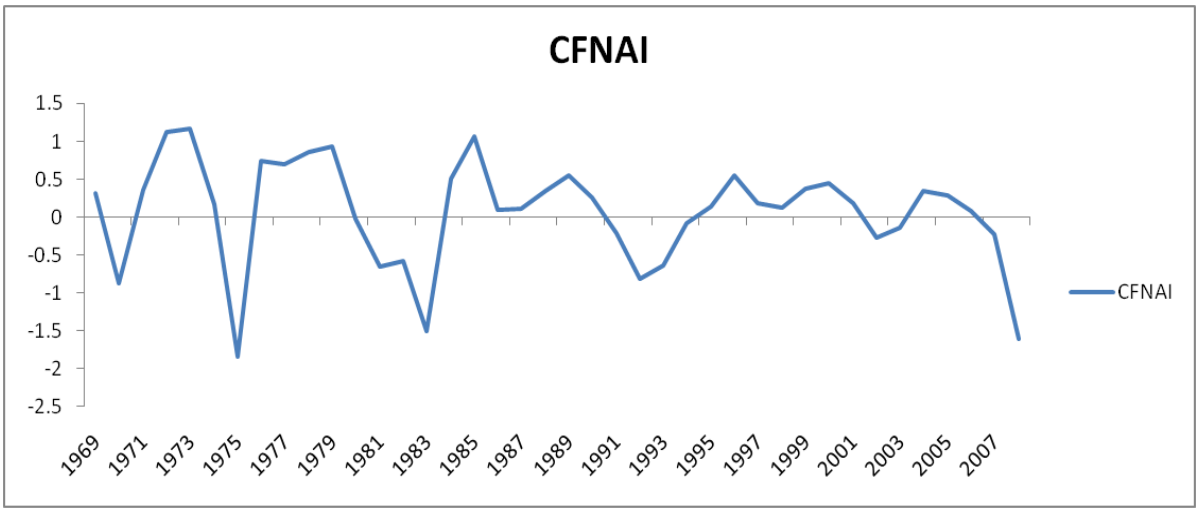

IPC
700.0
600.0
500.0
400.0
300.0
200.0
100.0
0.0
1969 1971 1973 1975 1977 1979 1981 1983 1985 1987 1989 1991 1993 1995 1997 1999 2001 2003 2005 2007 2009
IPC

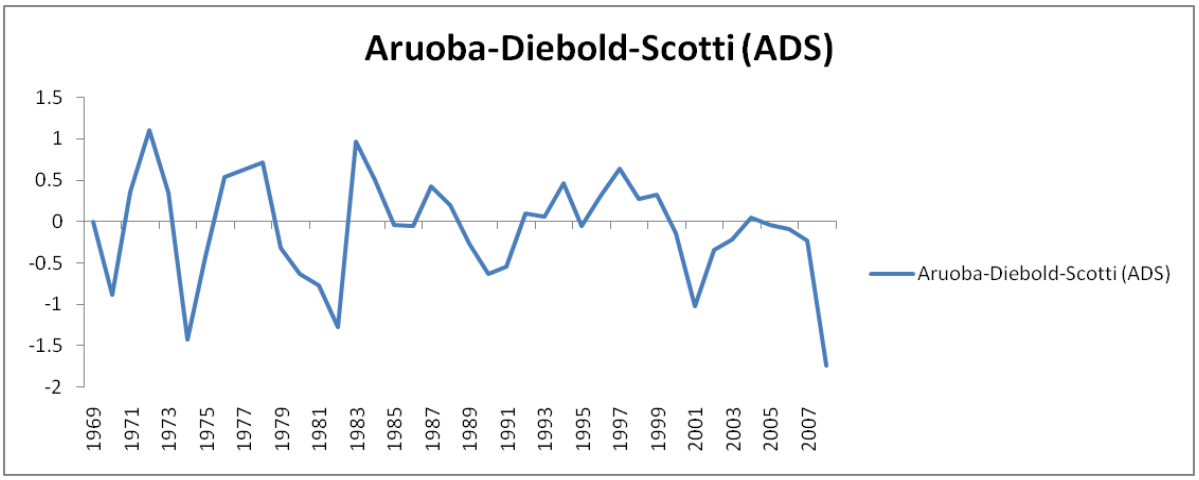

Masse Salariale
140
120
100
80
60
40
20
0
1969 1971 1973 1975 1977 1979 1981 1983 1985 1987 1989 1991 1993 1995 1997 1999 2001 2003 2005 2007 2009
Masse Salariale

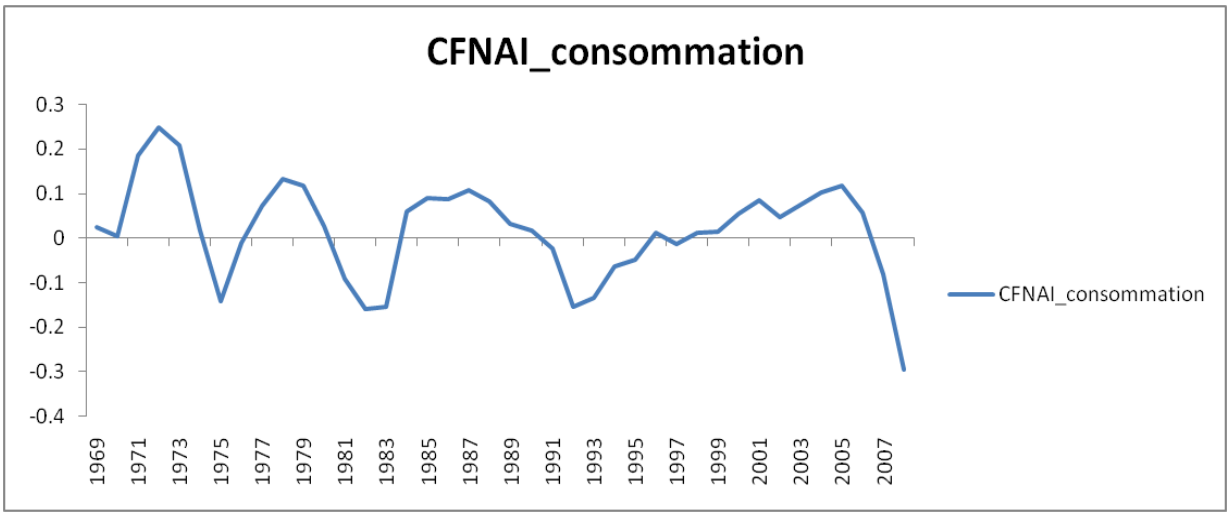

Nombre d'employés
1800000
1600000
1400000
1200000
1000000
800000
600000
400000
200000
0
1969 1971 1973 1975 1977 1979 1981 1983 1985 1987 1989 1991 1993 1995 1997 1999 2001 2003 2005 2007 2009
Nombre d'employés

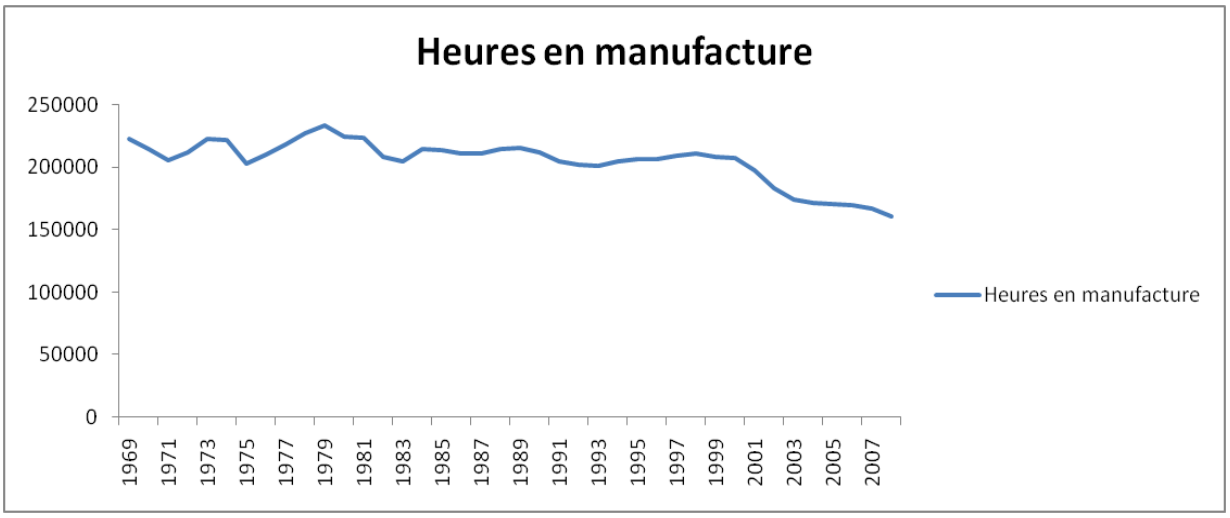

PIB
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
1969
1971
1973
1975
1977
1979
1981
1983
1985
1987
1989
1991
1993
1995
1997
1999
2001
2003
2005
2007
2009
PIB

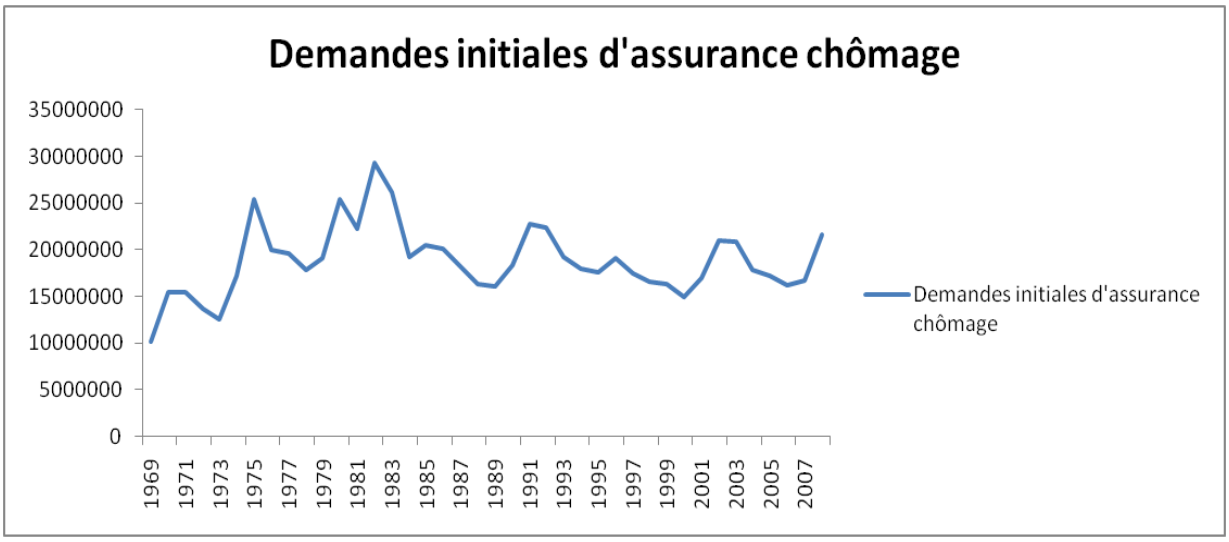

Spread, obligation gvt 10ans -- Federal Funds Rate
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
1969
1971
1973
1975
1977
1979
1981
1983
1985
1987
1989
1991
1993
1995
1997
1999
2001
2003
2005
2007
2009
Spread, obligation gvt 10ans -- Federal Funds Rate

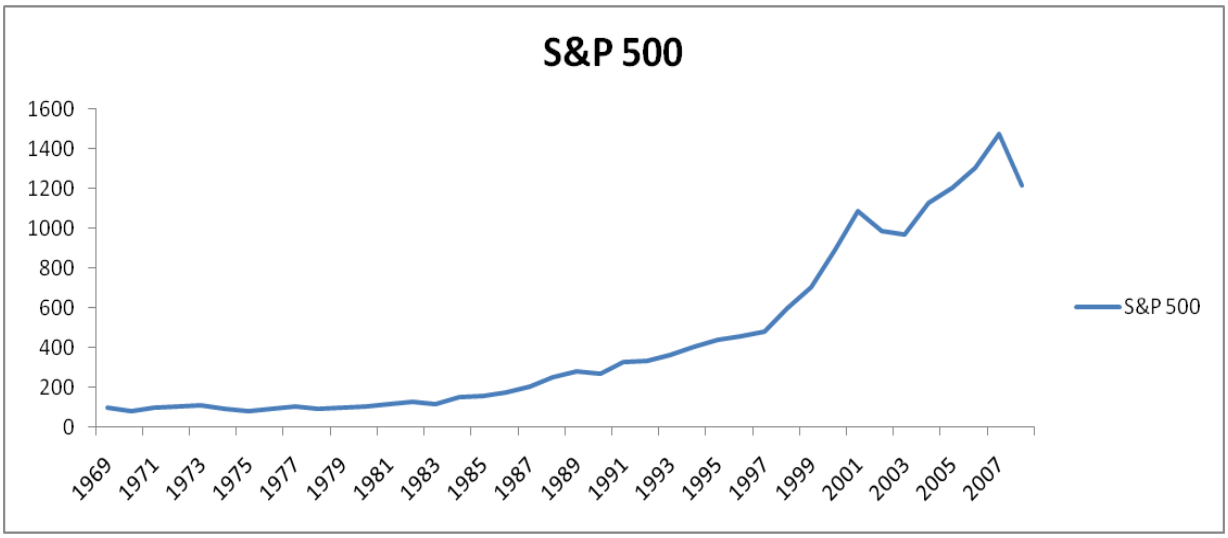

CFNAI
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
1969
1971
1973
1975
1977
1979
1981
1983
1985
1987
1989
1991
1993
1995
1997
1999
2001
2003
2005
2007
CFNAI


Aruoba-Diebold-Scotti (ADS)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
1969
1971
1973
1975
1977
1979
1981
1983
1985
1987
1989
1991
1993
1995
1997
1999
2001
2003
2005
2007
Aruoba-Diebold-Scotti (ADS)


CFNAI_consommation
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
1969
1971
1973
1975
1977
1979
1981
1983
1985
1987
1989
1991
1993
1995
1997
1999
2001
2003
2005
2007
CFNAI_consommation


Heures en manufacture
250000
200000
150000
100000
50000
0
1969
1971
1973
1975
1977
1979
1981
1983
1985
1987
1989
1991
1993
1995
1997
1999
2001
2003
2005
2007
Heures en manufacture


Demandes initiales d'assurance chômage
35000000
30000000
25000000
20000000
15000000
10000000
5000000
0
1969
1971
1973
1975
1977
1979
1981
1983
1985
1987
1989
1991
1993
1995
1997
1999
2001
2003
2005
2007
Demandes initiales d'assurance chômage


S&P 500
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
1969
1971
1973
1975
1977
1979
1981
1983
1985
1987
1989
1991
1993
1995
1997
1999
2001
2003
2005
2007
S&P 500

8.3- Statistiques descriptives des structures à termes

Figure 21

Une fois avoir trouvé la moyenne de la structure à termes par année (de 1970 à 2001) et par cote, on obtient les moyennes et écart-type temporels de ces moyennes par année.

	moyenne	écart-type
Aaa	0.9954	0.0095
Aa	0.989	0.0161
A	0.9747	0.0317
Baa	0.9313	0.0684
Ba	0.8098	0.1355
B	0.5813	0.189
CCC	0.2989	0.2763

Sans surprise, on voit que la moyenne des moyennes par année des structures à terme des probabilités de survie augmente avec la qualité du crédit et l'écart-type diminue avec la qualité.

8.4- Résultats du test Dickey-Fuller

Figure 22

	IPC	conso	masse-s	nbre employ	PIB	ADS	CFNAI
constante	0.0181	0.0378	0.0313	0.0098	0.0254	-0.0711	-0.9057
π	-0.4378	-0.5108	-0.5134	-0.5679	-0.361	-1.015	-0.9706
ET(ε)	0.0233	0.0155	0.0292	0.0158	0.0223	2.9206	4.5739
ET(π)	0.1372	0.1464	0.1481	0.1541	0.1371	0.0312	0.1686

	CFNAI_Cons	heure en ma	FFR	InClaims	t-spread	S&P500
constante	0.597	-0.0051	0.0178	0.0212	0.6437	0.079
π	-0.9944	-0.7323	-0.6452	-0.9771	-1.0618	-0.9922
ET(ε)	6.5582	0.0319	0.3793	0.1734	2.5758	0.1204
ET(π)	0.1671	0.16	0.1623	0.1554	0.1717	0.1691

8.5- Résultats de l'inférence

Figure 23

L'une des deux séries d'instruments par combinaison, pour la cote Baa.

	masse sal.	consom.	nbre_employés	PIB
	3,5197	13,7825	0,9268	-3,5077
	-2,3775	1,2120	3,0739	-0,0496
	1,8047	-9,1185	-0,6288	1,8874
	2,0765	-10,7517	1,2190	3,1113
	1,7914	2,6857	2,8865	1,6105
	0,6071	10,0964	0,6354	2,0400
	2,3146	0,8627	0,7834	3,7964
	5,7522	1,9589	2,6965	4,5567
	3,0124	-9,6978	2,8352	4,1775
	2,0858	-6,2035	2,6199	3,6298
	3,3707	6,1576	2,5204	1,3019
	1,5604	-8,8836	0,1010	1,0737
	-0,7907	-18,9570	-0,3919	-0,5667
	0,5139	-5,8419	-2,4689	4,9795
	1,6888	2,6965	1,9788	3,2365
	6,2625	-2,0422	5,9210	1,4352
	1,7262	6,2461	1,0283	2,6305
	1,3583	-1,3857	0,0280	-0,1885
	0,4864	1,1562	1,6544	0,6059
	-0,3535	0,9746	4,0873	2,6639
	1,7110	-1,2200	2,1838	1,7290
	0,3131	6,6831	3,5784	2,4835
	0,2581	10,0633	1,2940	-0,1670
	2,8522	1,3417	-0,1010	-0,7956
	0,2459	-1,5295	0,3459	2,2073
	-0,1726	-3,6099	0,1492	-1,3276
	0,0261	1,5569	1,7714	1,9967
	0,4328	21,7362	0,5752	0,3519
	-1,5035	0,4693	-0,3109	0,1961
	0,9027	3,9612	-2,9831	0,8769
	0,1325	-8,0962	0,7659	3,8352
	4,8409	5,9926	1,7353	-3,1223
	-9,5315	-24,4526	-10,7711	-9,7399
	-1,3863	-8,4410	0,8336	-1,8289
	-0,3608	11,4152	-1,2109	-1,3686
	0,0370	1,7202	0,2158	-1,7052
	0,5077	4,5504	-0,3011	0,6772
	1,3825	0,9716	1,0861	-3,2543
	-1,3033	2,0773	4,3488	5,1634
cov(z,ui)	4,76E-17	7,06E-13	1,81E-12	5,54E-18
var(u)	0,087293407	0,114285418	0,008845385	0,01085418

Matrice variance-covariance des paramètres de nos combinaisons, en cote Baa

nbre d'employés	13,6226952405	1,1931969112	0,399515060
	1,1931969112	0,0001193012	0,034993085
	0,3995150598	0,0349930852	0,000000019
cons	0,0001045115	0,0054351913	-0,008074145
	0,0054351913	56,3545667498	-0,026621368
	-0,0080741454	-0,0266213679	338,333228
PIB	1104,9957806997	95,7085395316	128,218620
	95,7085395316	8,2897371187	11,10557798
	128,2186195111	11,1055779837	14,87789789
masse sal.	14,6772073333	1,2582343214	1,462291553
	1,2582343214	0,0001353688	0,125358004
	1,4622915528	0,1253580043	0,000450503

Où l’on retrouve la variance du paramètre de la constance à (1,1) ; la variance du paramètre de pente de l’inflation à (2,2) ; la variance du paramètre de pente de la variable correspondante à (3,3).